PROBABILITÉS
Exercices

Vecteurs Gaussiens

Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ un vecteur ligne et $\Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive[(i)]. On dit que $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ est un **vecteur gaussien** de moyennes μ et matrice de covariance Σ s'il admet la densité

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\Big[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)^T \Big],$$

ou on écrit $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{M}_{1,n}$.

L'exemple le plus simple est celui de n gaussiennes standard indépendantes $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ dont la densité est

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\big[-\tfrac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \big] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\big(-\tfrac{1}{2}\mathbf{x}\,\mathbf{x}^T \big).$$

Cela rentre bien dans le cadre des vecteurs gaussiens (avec $\Sigma = I_n$ et $\mu = (0, \ldots, 0)$).

Exercice 1.
Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ou $X_1, \ldots, X_n$ sont des gaussiennes standard indépendantes. De plus, soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un vecteur gaussien général (avec matrice de covariance Σ et moyennes μ),

(a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ un vecteur ligne. Posons $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}A + B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

En utilisant le changement de variable, calculer la densité de $\mathbf{Z}$ et déduire que c'est un vecteur gaussien de moyenne $B + \mu A$ et matrice de covariance $A^{-1}\Sigma^{-1}(A^{-1})^T$ (cette dernière est encore symétrique et définie positive).

(b) Sachant que Σ, comme toute matrice symétrique et définie positive, s'écrit $\Sigma = A^T A$ pour une certaine matrice inversible A, déduire que $\mathbf{X}A + \mu$ admet la même densité que $\mathbf{Y}$, donc qu'ils sont de même loi.

(c) Conclure que tout vecteur gaussien peut être construit comme combinaison linéaire de gaussiennes standard indépendantes.

Exercice 2.
Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un vecteur gaussien comme dans l'exercice précédent (de matrice de covariance Σ et moyennes μ).

[(i)] c.-à-d. telle que $U\Sigma U^T > 0$ pour tout vecteur ligne $U \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non-nul.

(a) Calculer la densité de Y_1 et déduire que c'est une gaussienne de moyenne et variance à déterminer.

(b) Montrer que pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{Y} = \lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_n Y_n$$

est une gaussienne de moyenne et variance à déterminer.
Indication: En supposant que $\lambda_1 \neq 0$, utiliser le changement de variable

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n, y_2, \dots, y_n),$$

pour déduire que $(\tilde{Y}, Y_2, \dots, Y_n)$ est un vecteur gaussien.

Exercice 3.
Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur gaussien comme dans l'exercice précédent (de matrice de covariance Σ et moyennes μ). Calculer $\mathbb{E}(Y_i)$ et $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ et déduire que la matrice Σ contient bien les covariances des variables Y_i et que μ est bien le vecteur des esperances des variables Y_i.

Exercice 4.
Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur aléatoire, avec la propriété que pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i$ est une variable gaussienne. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbf{Y}$ est un vecteur gaussien.

Notons $\Sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ et $\mu_i = \mathbb{E}(Y_i)$. Soit $\mathbf{X}$ un vecteur gaussien de matrice de covariance Σ et moyennes μ.

(a) Supposons que $\Sigma = I_n$ et $\mu = (0, \dots, 0)$. Calculer pour $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{\mathbf{Y}}(t_1, \dots, t_n) := \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i \sum_{i=1}^n t_i Y_i\Big)\Big].$$

Montrer que $\Phi_{\mathbf{Y}}(t_1, \dots, t_n) = \Phi_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n)$.

(b) Passons au cas général. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice telle que $AA^T = \Sigma^{-1}$. Montrer que le vecteur $(\mathbf{Y} - \mu)A$ satisfait les conditions du point précédent. Déduire que $\Phi_{(\mathbf{Y}-\mu)A}(t_1, \dots, t_n) = \Phi_{(\mathbf{X}-\mu)A}(t_1, \dots, t_n)$.

(c) En utilisant l'injectivité de la transformé de Fourrier (c.à d. le fait que la fonction caractéristique détermine la loi), conclure que $\mathbf{Y}$ est un vecteur gaussien.

Processus de Galton-Watson

Exercice 5 (Couplage de la marche aléatoire et le processus de GW)**.**
Soient $X_1, X_2, \dots$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ avec $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$. Notons $S_n = 1 + \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Posons $T_0 = 0$ et, pour $k \geq 0$, $T_{k+1} = T_k + S_{T_k}$. En fin, posons $Y_k = T_{k+1} - T_k = S_{T_k}$ (avec $Y_1 = T_1 = 1$). Montrer par recurrence que $S_{T_k} \geq 0$.

(b) Posons $Z_i = X_i + 1$. Écrire la loi de Y_{k+1} sachant $\{T_k = n \text{ et } S_{T_k} = m\}$ en fonction des variables Z_i.

(c) Déduire que la loi de Y_{k+1} sachant $Y_1, \dots, Y_k$ (c.-à-d. sachant $\{Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k\}$ pour une famille arbitraire $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{N}$) est celle de la somme de Y_k variables indépendantes de même loi que les Z_i.

(d) Déduire que $Y_1, Y_2, \dots$ est un processus de Galton Watson d'une loi de réproduction à décrire.

(e) Montrer que $\mathbb{P}(\exists n \text{ tel que } S_n = 0) = 1$ si et seulement si $\mathbb{E}(X_1) \leq 0$.

(f) Montrer à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que si $\mathbb{E}(X_1) > 0$, alors le nombre d'indices n tels que $S_n = 0$ est p.s. fini.

Exercice 6 (Percolation sur l'arbre)**.**
Considérons l'arbre r-régulier $T_r = (V, E)$ avec $r \geq 2$. Déclarons chaque arrête de T_r ouverte avec probabilité p et fermée avec probabilité $1 - p$ indépendamment (on peut utiliser une famille $(X_e)_{e \in E}$ de v.a. i.i.d. Bern(p) pour faire ces choix). Un cluster est un ensemble maximal de sommets de T_r tel que tous deux sommets sont connectés par des arrêtes ouvertes. Notons $\mathcal{C}_0$ le cluster contenant le sommet d'origine de l'arbre.

(a) Montrer que $|\mathcal{C}_0| = \infty$ est un événement mesurable pour la tribu produit.

(b) Notons Y_k le nombre de sommets au niveau k, accessibles à partir de l'origine par des arrêtes ouvertes. Détériminer la loi de la suite $Y_0, Y_1, \dots$.

(c) Déduire que $\mathbb{P}(|\mathcal{C}_0| = \infty) = 0$ si et seulement si $p \leq 1/r$.

(d) Montrer que l'événement "il existe un cluster infini dans T_r" est mesurable. Montrer qu'il a probabilité 0 si $p \leq 1/r$ et 1 si $p > 1/r$.

Dominos sur $\mathbb{Z}$

Exercice 7.
Plaçons des dominos d'hauteurs aléatoires $(H_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sur chaque point de $\mathbb{Z}$, ou les H_k sont des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec $\mathbb{P}(H_k = 0) > 0$. On renverse tous les dominos à gauche de 0 vers la droite. Tout domino atteint par un domino renversé est a nouveau renversé (on dit que le domino en k renverse les dominos aux positions $k+1, \dots, k+H_k$).

(a) Supposons que $\mathbb{E}(H_0) < \infty$. Montrer à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que le nombre de dominos qui tombent sur le point 0 est p.s. fini.

(b) Déduire que le nombre de dominos renversés à droite de 0 est p.s. fini.

(c) Montrer que si $\mathbb{E}(H_0) = \infty$ le nombre de dominos qui tombent sur le point 0 est p.s. infini. Déduire que tous les dominos tombent.

(d) Que dire du même problème si on considère des dominos sur $\mathbb{N}$ à la place de $\mathbb{Z}$ (on renverse uniquement le domino en 0 vers la droite)?
- Argumenter que si $\mathbb{E}(H_0) < \infty$, uniquement un nombre fini de dominos tombent.
- Supposons que $\mathbb{E}(H_0) = \infty$. Argumenter que $\prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(H_0 < j) \to 0$ quand $n \to \infty$. A quoi correspond cette quantité?

- Montrer que si $\sum_{n\geq 1}\prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(H_0<j)<\infty$, alors il existe une probabilité strictement positive que tous les dominos tombent.