# Théorie de la mesure et intégration

Ioan Manolescu

November 29, 2023

# Table des matières


**I Théorie de la mesure** **7**

**0 Introduction et prérequis** **9**
0.1 Mesure de Jordan et intégrale de Riemann . . . . . 9
0.2 Glossaire topologique . . . . . 13
0.2.1 Espaces topologiques généraux . . . . . 13
0.2.2 Espaces métriques . . . . . 15

**1 Tribus et mesures** **23**
1.1 Définitions de tribus et mesures . . . . . 23
1.2 Tribu engendrée . . . . . 27
1.3 Classes monotones: unicité des mesures . . . . . 29

**2 Intégrale contre une mesure** **33**
2.1 Fonctions mesurables . . . . . 33
2.2 Intégration des fonctions positives . . . . . 36
2.2.1 Fonctions étagées . . . . . 36
2.2.2 Fonctions mesurables positives . . . . . 39
2.2.3 Convergence monotone . . . . . 40
2.2.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives . . . . . 42
2.2.5 Lemme de Fatou . . . . . 44
2.2.6 Mesures à densité . . . . . 45
2.3 Intégration des fonctions quelconques . . . . . 45
2.4 Théorème de convergence dominée . . . . . 47
2.5 Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . . 49
2.6 Fonctions à valeurs complexes et vectorielles . . . . . 50

**3 Construction des mesures** **51**
3.1 Mesures extérieures; théorème de Caratheodory . . . . . 51
3.1.1 Théorème de Caratheodory . . . . . 51
3.1.2 Construction des mesures extérieures . . . . . 53
3.1.3 Tribu complétée . . . . . 56
3.2 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ . . . . . 57
3.2.1 Construction de la mesure de Lebesgue . . . . . 57
3.2.2 Les ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue . . . . . 60

3.2.3 Fonctions de répartition . . . 60
3.2.4 Exemple d'ensemble non-mesurable . . . 64
3.2.5 Lien avec l'intégrale de Riemann . . . 65
3.3 Mesures produits . . . 66
3.3.1 Construction . . . 66
3.3.2 Intégration des mesures produits . . . 67
3.3.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ . . . 71
3.3.4 Changement de variable . . . 73
3.4 Mesures et topologie . . . 75
3.4.1 Régularité des mesures boréliennes . . . 75
3.4.2 Théorème de représentation de Riesz . . . 80
3.5 Paradoxe de Banach-Tarski: limites de la théorie de la mesure * . . . 85

**4 Dimension et mesure de Hausdorff * 91**
4.1 Mesures de Hausdorff . . . 91
4.2 Dimension de Hausdorff . . . 95
4.3 Hausdorff vs. Lebesgue . . . 98
4.4 Utilisation pour le changement de variable sphérique . . . 102
4.5 Complément: dimension de Minkowski . . . 104

**II Éléments d'analyse fonctionnelle 107**

**5 Analyse fonctionnelle abstraite 109**
5.1 Espaces vectoriels normés . . . 109
5.1.1 Norme . . . 109
5.1.2 Produit scalaire . . . 110
5.1.3 Complétude . . . 111
5.1.4 Dimension finie vs. dimension infinie . . . 112
5.2 Dual . . . 113
5.2.1 Norme d'operateur . . . 113
5.2.2 Dual et bi-dual . . . 114
5.2.3 Théorème de Hahn-Banach . . . 116
5.3 Convergence faible et faible-* . . . 119
5.4 Espaces de Hilbert . . . 123
5.5 Espaces de Banach et de Hilbert complexes . . . 128

**6 Espaces de Lebesgue $L^p$ 131**
6.1 Définitions; propriétés . . . 131
6.2 $L^p$ comme espace de Banach . . . 133
6.3 Inclusions entre espaces $L^p$ . . . 134
6.4 Théorèmes de densité . . . 136
6.5 Inégalité de Hölder; dualité . . . 140
6.6 $L^2$ comme espace de Hilbert . . . 142

**7 Espaces de mesures: mesures signées** **145**
7.1 Définitions; variation totale . . . . . 145
7.2 Décomposition de Hahn . . . . . 149

**8 Décomposition de Lebesgue et théorème de Radon-Nikodim** **155**
8.1 Décomposition par rapport à la mesure de Lebesgue * . . . . . 159

**9 Théorèmes de dualité** **161**
9.1 Dualité $L^p/L^q$ . . . . . 161
9.2 Dual de $\mathcal{C}_0$: théorème de représentation de Riesz pour les mesures signées . . 164
9.3 Dual de $L^\infty$: mesures additives * . . . . . 168

(0)* Le parties marquées d'un astérisque sont des compléments

# Partie I

# Théorie de la mesure

# Chapitre 0

# Introduction et prérequis

## 0.1 Mesure de Jordan et intégrale de Riemann

Le but de la théorie de la mesure et de l'intégration est de mesurer la "taille" de certains ensembles. Commençons par l'ensemble des nombres réelles $\mathbb{R}$.

Pour un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sa taille (ou longueur) est évidement

$$\ell([a, b]) = b - a.$$

On peut étendre la définition de taille aux unions finies d'intervalles. En effet, pour $a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n$, on pose

$$\ell([a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_n, b_n]) = \sum_{j=1}^{n} \ell([a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{n} b_j - a_j.$$

Que faire pour des ensembles plus complexes que des unions finies d'intervalles ? On peut essayer de les approximer par des union finies d'intervalles pour approcher leur taille.

Une procédure similaire peut être appliquée en dimension plus grande (c.-à-d. dans des espaces $\mathbb{R}^d$ avec $d > 1$). En dimension 2, le rôle des intervalles est joué par les rectangles $[a, b] \times [c, d]$, dont l'aire est de $(b - a)(d - c)$. Pour d'autres sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$, l'aire est approximée par des pavages de rectangles (voir Fig. 0.1). Plus généralement, dans $\mathbb{R}^d$ on utilise des ensembles de type $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ à la place des intervalles.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui s'écrivent comme unions finies d'intervalles fermés. Les membres de $\mathcal{M}$ sont appelés les ensembles élémentaires de $\mathbb{R}$. Ainsi, on peut essayer de poser, pour $A \subset \mathbb{R}$,

$$\ell(A) = \sup\{\ell(B) : B \subset A;\ B \in \mathcal{M}\}. \tag{0.1}$$

Pour être sur qu'un sous-ensemble de $A \subset \mathbb{R}$ est bien approximé par des ensembles de $\mathcal{M}$, il faut aussi qu'on puisse l'approximer par le haut. Pour éviter les problèmes des ensemble de taille infinie, on se limite aux ensemble bornés. On dit qu'un ensemble borné $A \subset \mathbb{R}$, est

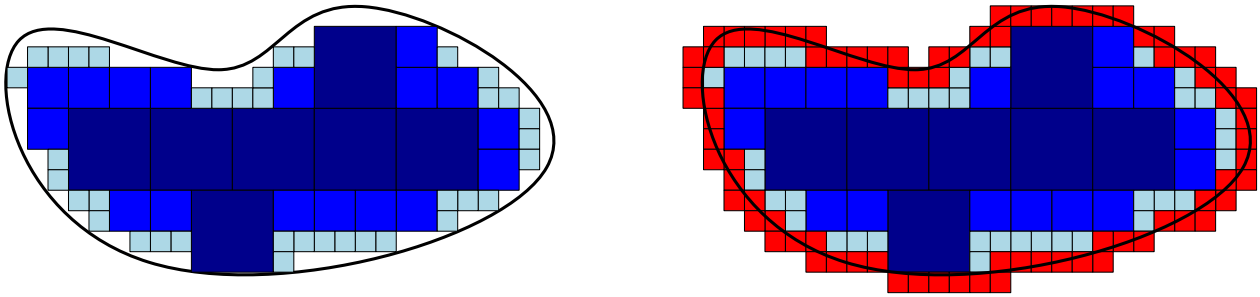


Figure 0.1: Approximation de l'aire d'un ensemble par un pavage par des carrés. L'erreur est au plus l'aire de la partie rouge, qui peut être rendue aussi petite qu'on veut en prenant des carrés de plus en plus petits.

*Jordan-mesurable* si

$$\sup\{\ell(B) : B \subset A;\, B \in \mathcal{M}\} = \inf\{\ell(B) : A \subset B;\, B \in \mathcal{M}\} =: \ell(A).$$

Pour $A \subset \mathbb{R}$ non-borné, on dit qu'il est Jordan-mesurable si et seulement si $A \cap [a, b]$ est Jordan-mesurable pour tout $a < b$. On pose alors $\ell(A) = \lim\limits_{M\to\infty}\uparrow \ell(A \cap [-M, M])$.

Ainsi on a défini une notion d'ensemble mesurable (au sens de Jordan) et d'une mesure pour tout tel ensemble. Cette idée de mesure est intuitive et donne lieu au concept classique d'intégrale de Riemann – le lien entre les deux est expliqué dans l'exercice 7.

L'intégrale est censée mesurer l'aire sous une courbe décrite par une fonction. Les fonctions de base, qui jouent le même rôle que les intervalles dans la construction précédente, sont les indicatrices des intervalles:

$$\mathbf{1}_{[a,b]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \mathbf{1}_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions élémentaires, pour lesquelles l'intégrale est définie directement, sont les combinaison linéaires d'indicatrices d'intervalles. L'intégrale est définie pour commencer pour les fonctions positives. De plus, pour parler d'approximation par le haut et par le bas, on doit limiter aux fonction à support compact.

Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. Le support de $f$ est l'ensemble fermé $\mathrm{Supp}(f) := \overline{f^{-1}((0, \infty))}$. On dit que $f$ est à support compact si $\mathrm{Supp}(f)$ est un compact, ce qui revient à dire que $f$ est nulle en dehors d'un ensemble $[-M, M]$ pour $M$ assez grand.

**Définition 0.1.** *Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ une fonction à support compact. On dit que $f$ est*

Riemann-intégrable *si* [1],

$$\sup\Big\{\sum_{j=1}^n \lambda_j(b_j-a_j):\ a_1,b_1,\dots,a_n,b_n\in\mathbb{R},\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\in[0,+\infty),\ \sum_{j=1}^n \lambda_j\mathbf{1}_{[a_j,b_j]}\le f\Big\}$$
$$=\inf\Big\{\sum_{j=1}^n \lambda_j(b_j-a_j):\ a_1,b_1,\dots,a_n,b_n\in\mathbb{R},\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\in[0,+\infty),\ \sum_{j=1}^n \lambda_j\mathbf{1}_{[a_j,b_j]}\ge f\Big\}.$$

*Le cas échéant, on appelle la quantité au-dessus l'intégrale de Riemann de $f$, et on l'écrit $\int f(x)dx$.*

*Pour $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ quelconque, on dit que $f$ est Riemann-intégrable si, pour tout $a\le b$, $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ est Riemann-intégrable. On pose alors*

$$\int_a^b f(x)dx := \int f(x)\mathbf{1}_{[a,b]}(x)dx \quad \text{et} \quad \int f(x)dx := \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dx. \tag{0.2}$$

Pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'intégrale contient une partie positive et une partie négative. Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on définit les fonctions positives $f_+,f_-:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ par

$$f_+(x)=\max\{0,f(x)\} \quad \text{et} \quad f_-(x)=-\min\{0,f(x)\} \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

On dit que $f$ est Riemann-intégrable si $f_+$ et $f_-$ le sont et

$$\int f_+(x)dx<\infty \quad \text{et} \quad \int f_-(x)dx<\infty.$$

Le cas échéant, on pose

$$\int f(x)dx=\int f_+(x)dx-\int f_-(x)dx.$$

L'intégrale ainsi définie a une série de propriétés convenables (linéarité; théorème fondamental de l'analyse) qu'on suppose connues. Elle a pourtant aussi des défauts importants. Ceux-ci apparaissent surtout dans les études approfondies de l'analyse ou des probabilités. On en donne quelques exemples.

- Une limite simple de fonctions Riemann-intégrables n'est pas toujours Riemann-intégrable. Similairement, une union dénombrable d'ensembles Jordan-mesurables n'est pas toujours Jordan-mesurable.
- Il existe des fonctions dérivables $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ où $F'$ n'est pas Riemann-intégrable.
- L'intégrale de Riemann dépend beaucoup de la structure topologique de $\mathbb{R}$.

Une définition d'intégrale plus robuste est donc nécessaire.

**Exercice 1.**
Montrer qu'un singleton $\{x\}\subset\mathbb{R}$ est Jordan-mesurable, mais que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

[1] Dans l'équation suivante, on prend toujours $a_j<b_j$.

**Exercice 2.**
Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. Montrer que $f$ est à support compact si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que,

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \notin [a, b].$$

Déduire que pour une fonction quelconque $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ et $a < b$, $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ est à support compact.

**Exercice 3.**
Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ à support compact,

$$\sup\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (b_j - a_j) : a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R},\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, +\infty),\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} \le f \Big\}$$
$$\le \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (b_j - a_j) : a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R},\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, +\infty),\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} \ge f \Big\}.$$

**Exercice 4.**
Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions Riemann-intégrables et $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda f + \mu g$ est aussi Riemann intégrable et que

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx. \tag{0.3}$$

**Exercice 5.**
Expliquer pourquoi la limite dans (0.2) existe pour toute fonction positive Riemann-intégrable $f$.

Donner des exemples de fonctions positives Riemann-intégrables $f$ tels que

- $\int_a^b f(x)dx < \infty$ pour tout $a < b$ mais $\int f(x)dx = \infty$;
- $f$ est à support compact mais $\int f(x)dx = \infty$;
- $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais $\int f(x)dx < \infty$.

**Exercice 6.**
Montrer qu'une fonction continue à support compact est Riemann-intégrable.
*Indication:* utiliser le fait qu'une telle fonction est uniformément continue.

Déduire que toute fonction positive continue par morceaux est Riemann-intégrable.

**Exercice 7.**
Fixons $a < b$. Montrer qu'un ensemble $A \subset [a, b]$ est Jordan-mesurable si et seulement si $\mathbf{1}_A$ est une fonction Riemann-intégrable. De plus, si c'est le cas,

$$\ell(A) = \int \mathbf{1}_A(x) dx.$$

Inversement, montrer qu'une fonction positive bornée $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble $\{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : 0 \le y \le f(x)\}$ est Jordan-

mesurable, et que, le cas échéant,

$$\int_a^b f(x)dx = \ell(\{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \, 0 \leq y \leq f(x)\}).$$

**Exercice 8.**
Soit $\epsilon > 0$. Donner un recouvrement de $\mathbb{Q}$ par une union **dénombrable** d'intervalles ouverts dont la somme des tailles est inférieure à $\epsilon$. En autres mots, trouver $a_1, b_1, a_2, b_2 \cdots \in \mathbb{R}$ avec

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} b_n - a_n < \epsilon.$$

## 0.2 Glossaire topologique

### 0.2.1 Espaces topologiques généraux

Soit $E$ un ensemble. Une topologie sur $E$ est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ avec les propriétés suivantes

(i) $\emptyset, E \in \mathcal{T}$,

(ii) si $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{T}$,

(iii) pour toute collection $(U_i)_{i \in I}$ d'ensembles de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Les membres de $\mathcal{T}$ sont les **ouverts** de la topologie $\mathcal{T}$; leur complémentaires sont appelés les **fermés**.

Pour un espace topologique $(E, \mathcal{T})$, on peut définir les notions de

- **convergence**: une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in E$ si pour tout $U \in \mathcal{T}$ avec $x \in U$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$ est fini;
- **topologie Hausdorff**: $\mathcal{T}$ est dite Hausdorff, si pour tout $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe des ouverts disjoints $U, V \in \mathcal{T}$ avec $x \in U$ et $y \in V$.
- **Intérieur et adhérence**: Soit $A \subset E$. L'intérieur de $A$, noté $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans $A$; l'adhérence de $A$, notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé contenant $A$:

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ ouvert}}} U, \qquad \overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

  Le fait que $\mathring{A}$ est ouvert et $\overline{A}$ est fermé suit des propriétés de $\mathcal{T}$.
- On dit que $A \subset E$ est **dense** dans un ensemble $B \subset E$ (avec $A \subset B$) si $B \subset \overline{A}$. (Souvent, on dit qu'un ensemble $A$ est dense s'il est dense dans $E$).
- On dit que $E$ est **séparable** s'il existe un ensemble dénombrable $A \subset E$ qui est dense dans $E$.
- **compacité**: un ensemble $K \subset E$ est dit compact si pour toute collection d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ avec $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.
- On dit que $A \subset E$ est **précompact** si $\overline{A}$ est compact.

- On dit que $E$ est **$\sigma$-compact**, s'il existe une suite croissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles compacts de $E$ avec $E = \bigcup_n K_n$.
- On dit que $E$ est **localement compact**, si pour tout $x \in E$ il existe un ensemble ouvert et précompact $U$ avec $x \in U$.

Inversement, si on se donne une notion de convergence $\to$, comme celles décrites au-dessus, on peut leur associer une topologie comme suit.

- Un ensemble $U \subset E$ est ouvert si et seulement si, pour tout $x \in U$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ avec $x_n \to x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow x_n \in U$.
- Un ensemble $F \subset E$ est fermé si et seulement si, pour tout $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ avec $x_n \to x$, on a $x \in F$.

Il faut évidement vérifier que les notions d'ensemble ouverts et fermés qu'on vient de définir obéissent aux conditions d'une topologie. De plus rien ne garantit que les suites convergentes au sens de $\to$ sont les seules suites convergentes pour la topologie qu'on vient de définir.

Mentionnons qu'en général une suite peut converger vers deux limites différentes. Toutefois, si la topologie qu'on considère est Hausdorff, alors toute suite converge vers au plus une limite. Par la suite, on va travailler dans des topologies Hausdorff pour éviter la possibilité de plusieurs limites distinctes.

**Exercice 9** (Preuve topologique de l'infinité des nombres premiers)**.**
On définit sur $\mathbb{Z}$ une topologie $\mathcal{T}$ de la manière suivante. Posons

$$U_{a,b} = \{a + kb : k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{pour } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \geq 1.$$

Alors les éléments de $\mathcal{T}$ (c.-à-d. les ouverts) sont toutes les unions – finies ou infinies – d'ensembles de la forme $U_{a,b}$. L'ensemble vide appartient aussi à $\mathcal{T}$.

(a) Montrer que $\mathcal{T}$ est bien une topologie, c.-à-d. montrer que si $A$ et $B$ sont des union arbitraires d'ensembles de la forme $U_{a,b}$, alors $A \cap B$ en est une aussi.

(b) Montrer que les ensembles $U_{a,b}$ sont aussi fermés dans la topologie $\mathcal{T}$.

(c) En supposant que l'ensemble des nombres premiers est fini, montrer que $\{-1, +1\}$ est un ensemble ouvert.

(d) Conclure en exhibant une contradiction.

**Exercice 10.**
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique Hausdorff. Montrer alors qu'une suite converge vers au plus une limite.

**Exercice 11.**
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. On écrira $\xrightarrow{\mathcal{T}}$ pour la convergence induite par la topologie $\mathcal{T}$. Posons:

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \left\{U \subset E : \text{ tel que, pour tout } x \in U \text{ et } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \text{ avec } x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x,\ x \in U\right\} \tag{0.4}$$

(a) Montrer que $\widetilde{\mathcal{T}}$ est une topologie sur $E$.

(b) Montrer que $\mathcal{T} \subset \widetilde{\mathcal{T}}$.

(c) Donner un exemple pour lequel $\mathcal{T} \neq \widetilde{\mathcal{T}}$.

(d) Pouvez-vous donner une condition suffisante pour avoir $\mathcal{T} = \widetilde{\mathcal{T}}$?

### 0.2.2 Espaces métriques

Les espaces topologiques étant très généraux, ils ont parfois des propriétés inattendues. Pour un comportement plus intuitif on étudie souvent une classe plus restreinte d'espaces, à savoir les espaces métriques.

**Définition 0.2.** *Soit $E$ un ensemble. Une* distance *sur $E$ est une fonction $d : E^2 \to [0, +\infty)$ telle que pour tout $x, y, z \in E$,*

(i) $d(x, y) = d(y, x)$, *(symétrie)*

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *(inégalité triangulaire)*

(iii) $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.

*Si la troisième propriété est remplacée par simplement $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$, alors on dit que $d$ est une* pseudo-distance *sur $E$.*
*Si $d$ est une distance sur $E$, le couple $(E, d)$ est un* espace métrique.

*Remarque* 0.3. Supposons que $E$ est un espace avec une pseudo-distance $d$. On peut alors modifier $E$ pour obtenir un espace métrique comme suit.

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $E$ donnée par

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad d(x, y) = 0, \qquad \text{pour } x, y \in E.$$

Une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire et de la symétrie de $d$ est que $\sim$ est bien une relation d'équivalence. De plus, l'inégalité triangulaire montre que, si $x \sim x'$ et $y \sim y'$ alors $d(x, y) = d(x', y')$.

Soit $\hat{E} = \{\hat{x} : x \in E\}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$. Alors on peut définir une distance sur $\hat{E}$, qu'on va aussi appeler $d$, par $d(\hat{x}, \hat{y}) = d(x, y)$. (Le fait que cette quantité est bien définie ressort de l'observation précédente; il est immédiat que $d$ est bien une distance sur $\hat{E}$.) On vient donc d'associer à $(E, d)$ un espace métrique $(\hat{E}, d)$ de manière canonique. On va revenir à ce type de construction dans la partie 6.1.

Soit $(E, d)$ un espace métrique. Alors $E$ admet une topologie induite par $d$, définie comme suit:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{E,d} = \big\{U \subset E : (x \in U) \Rightarrow (\exists r > 0 \text{ t.q. } d(x, y) < r \Rightarrow y \in U)\big\}.$$

De manière équivalente, on associe à $d$ la notion de convergence

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad d(x_n, x) \to 0.$$

La topologie $\mathcal{T}_{E,d}$ issue d'une métrique est Hausdorff, ce qui entraîne l'unicité des limites.

On étudie souvent les propriétés topologiques des sous-ensembles $F$ d'un espace métrique $(E, d)$. Certaines propriétés dépendent de la structure de $F$ uniquement, et non de l'espace ambiant $E$ (e.g. complétude, compacité). Il est alors convenable de parler de $F$ sans devoir mentionner $E$. Le lemme suivant nous le permet.

**Lemme 0.4.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $F \subset E$. Alors $(F, d)$ est un espace métrique.*

On laisse la preuve en exercice.

**Exercice 12.**
Soit $(E, d)$ un espace métrique et $F \subset E$. Montrer que $(F, d)$ est un espace métrique.

**Suites dans les espaces métriques.** Dans un espace métrique $(E, d)$, la topologie induite par $d$ admet une description séquentielle:

- Un ensemble $U \subset E$ est ouvert dans la topologie induite $\mathcal{T}_{E,d}$ si et seulement si, pour tout $x \in U$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ avec $x_n \to x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow x_n \in U$.
- Un ensemble $F \subset E$ est fermé dans la topologie induite $\mathcal{T}_{E,d}$ si et seulement si, pour tout $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ avec $x_n \to x$, on a $x \in F$.

Avec les notations de l'exercice 11, l'énoncé au-dessus s'écrit simplement "$\mathcal{T} = \widetilde{\mathcal{T}}$ si $\mathcal{T}$ est la topologie d'un espace métrique". On laisse la preuve en exercice.

Une conséquence de la caractérisation séquentielle des ouverts et fermés dans les espaces métriques, est la caractérisation séquentielle des fonctions continues.

**Proposition 0.5.** *Soient $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction. Alors on a équivalence de*

(i) *$f$ est continue (c.-à-d. pour tout ouvert $U \subset F$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $E$);*

(ii) *pour tout $x \in E$ et $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $y \in E$ satisfait $d_E(x, y) < \delta$, alors $d_F(f(x), f(y)) < \epsilon$;*

(iii) *pour tout $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, si $x_n \to x$ alors $f(x_n) \to f(x)$.*

On laisse la preuve de cette proposition en exercice.

Quand on travaille avec des fonctions sur des espaces métriques, on dispose de notions qui quantifient la continuité.

**Définition 0.6.** *Soient $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction.*

- *On dit que $f$ est* uniformément continue *si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x, y \in E$ satisfont $d_E(x, y) < \delta$, alors $d_F(f(x), f(y)) < \epsilon$;*
- *On dit que $f$ est* lipschitzienne *s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x, y \in E$, $d_F(f(x), f(y)) \leq C d_E(x, y)$.*
- *On dit que $f$ est* hölderienne *d'exposant $\alpha \in (0, 1]$ (ou $\alpha$-*hölderienne*) s'il existe une*

*constante $C > 0$ telle que pour tous $x, y \in E$, $d_F(f(x), f(y)) \leq C d_E(x, y)^\alpha$.*

**Exercice 13.**
Prouver la proposition 0.5.

**Exercice 14.**
Montrer les implications suivantes

- pour $\beta < \alpha \leq 1$ et $f$ une fonction bornée, $\quad f$ $\alpha$-hölderienne $\Rightarrow f$ $\beta$-hölderienne;
- $f$ 1-hölderienne $\Rightarrow f$ $\beta$-hölderienne pour tout $\beta < 1$;
- pour tout $\alpha \in (0, 1]$, $\quad f$ $\alpha$-hölderienne $\Rightarrow f$ uniformément continue;
- $f$ uniformément continue $\Rightarrow f$ continue.

Donner des contre-exemples pour les implications inverses.

**Exercice 15.**
Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$. Montrer que

(a) $\overline{A}$ est l'ensemble des points $x$ tels qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \to x$.

(b) $\overline{A}$ est l'ensemble des points $x$ à distance 0 de $A$, c.-à-d. tels que

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : \ y \in A\} = 0.$$

(c) $\mathring{A}$ est l'ensemble des points à distance strictement positive de $A^c$.

(d) $A$ est dense dans $E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$ et $\epsilon > 0$, il existe $y \in A$ avec $d(x, y) < \epsilon$.

### Complétude

**Définition 0.7.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de $E$. On dit que $(x_n)_n$ est* de Cauchy *si*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ (m, n > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon).$$

*On dit que $(E, d)$ est un espace* complet*, si toute suite de Cauchy dans $E$ admet une limite (dans $E$).*

Les espaces complets sont un bon cadre pour l'analyse; on va donc essayer d'éviter ceux qui ne le sont pas. C'est d'ailleurs la raison principale pour travailler avec les nombres réels plutôt qu'avec les nombres rationnels.

**Théorème 0.8.** *$\mathbb{R}$ est complet pour la distance euclidienne $d(x, y) = |x - y|$.*

On ne va pas prouver ce théorème, surtout car il dépend fortement de la construction de $\mathbb{R}$ qu'on utilise. En effet, on peut simplement introduire $\mathbb{R}$ comme le complété de $\mathbb{Q}$.

Si $(E, d)$ est un espace métrique qui n'est pas complet, on peut le compléter de manière canonique comme suit. Soit $\ell_{\mathrm{cv}}(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de $E$. Pour $(x_n), (y_n) \in \ell_{\mathrm{cv}}(E)$, posons

$$d_{cv}\big((x_n), (y_n)\big) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

L'inégalité triangulaire implique que $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc que la limite est bien définie. De plus, $d_{cv}$ est une pseudo-distance sur $\ell_{\mathrm{cv}}(E)$. On peut donc quotienter $\ell_{\mathrm{cv}}(E)$ pour obtenir un espace métrique $\mathrm{comp}(E)$, comme décrit dans la partie précédente.

L'espace de départ $E$ est contenu dans $\mathrm{comp}(E)$ de manière isométrique et canonique: on associe à chaque élément $x \in E$ la classe d'équivalence dans $\mathrm{comp}(E)$ de la suite constante égale à $x$.

**Proposition 0.9.** *L'espace* $(\mathrm{comp}(E), d_{cv})$ *est complet. On l'appelle le* complété *de* $(E, d)$.

Quand on veut montrer qu'un espace est complet, ou plus généralement quand on veut montrer qu'une suite de Cauchy converge, la difficulté principale consiste à trouver la limite de la suite. Le lemme suivant peut être utile.

**Lemme 0.10.** *Soient* $(E, d)$ *un espace métrique et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $E$*. Si* $(x_n)$ *contient une sous-suite* $(x_{\sigma(n)})$ *qui convergent vers un point* $x \in E$*, alors* $x_n \to x$*.*

**Preuve:** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in E$ comme dans l'énoncé. Fixons $\epsilon > 0$. Alors, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$. De plus, comme $x_{\sigma(n)} \to x$, il existe $j \geq 1$ tel que $\sigma(j) \geq N$ et $d(x_{\sigma(j)}, x) < \epsilon$. On conclut que, pour tout $n \geq N$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\sigma(j)}) + d(x_{\sigma(j)}, x) < 2\epsilon.$$

Ainsi $x_n \to x$ quand $n \to \infty$. □

**Preuve de la proposition 0.9:** Soit $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{comp}(E)$. Prenons pour chaque $\mathbf{x}^{(k)}$ un représentant $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_{\mathrm{cv}}(E)$. Notre but est de montrer que $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\geq 1}$ converge pour la distance $d_{cv}$ vers un élément de $\mathrm{comp}(E)$ (qu'on peut identifier par un représentant dans $\ell_{\mathrm{cv}}$).

Grâce au lemme 0.10, il suffit de montrer que $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite convergente. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $d_{cv}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)}) < 2^{-k}$ pour tout $k \geq 1$.

Pour $k \geq 1$, soit $N_k \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n, m \geq N_k$

- $d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) < 2^{-k}$,
- $d(x_m^{(k)}, x_m^{(k+1)}) < 2^{-k}$.

L'existence de $N_k$ est assurée par le fait que $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et que $d_{cv}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)}) = \lim_{m\to\infty} d(x_m^{(k)}, x_m^{(k+1)}) < 2^{-k}$.

On peut toujours augmenter chaque $N_k$ en gardant les propriétés mentionnées. On peut donc supposer que la suite $(N_k)_{k\geq 1}$ est croissante. On définit la suite $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ par

$$y_n = x_n^{(k)}, \qquad \text{si } N_k < n \leq N_{k+1}.$$

Soit $j \geq 1$ et $n > N_j$. Soit $k \geq j$ tel que $N_k < n \leq N_{k+1}$. Alors

$$d\big(y_n, x_n^{(j)}\big) \leq \sum_{i=j}^{k-1} d\big(x_n^{(i)}, x_n^{(i+1)}\big) \leq \sum_{i=j}^{k-1} 2^{-i} < 2^{1-j}. \tag{0.5}$$

Donc, pour tout $n, m > N_j$,

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, x_n^{(j)}) + d(y_m, x_m^{(j)}) + d(x_m^{(j)}, x_n^{(j)}) \leq 5 \cdot 2^{-j},$$

ce qui entraîne que $\mathbf{y}$ est de Cauchy, donc dans $\ell_{\text{cv}}$. De plus, (0.5) entraîne aussi que

$$d_{cv}\big(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}\big) < 2^{1-j}.$$

Ainsi $\mathbf{x}^{(j)} \to \mathbf{y}$ quand $j \to \infty$, ce qui fini la preuve. □

**Exercice 16.**
Soient $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$ un ensemble dense dans $E$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue (c.-à-d. telle que, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in E$ avec $d(x, y) < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$).
Montrer qu'il existe une unique fonction $F : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que $F$ est uniformément continue.
Donner un contre-exemple si on suppose que $f : A \to \mathbb{R}$ est seulement continue, pas uniformément continue.

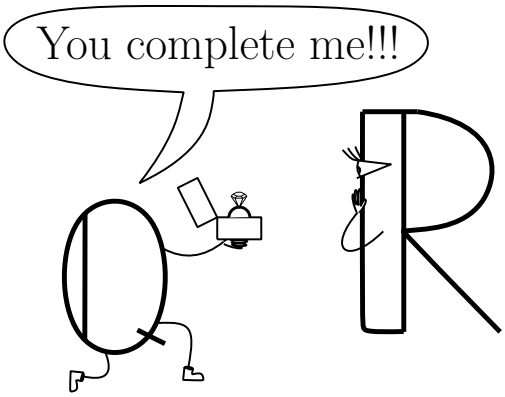
**Exercice 17.**
Soient $(E, d_E), (F, d_F)$ et $(G, d_G)$ trois espaces métriques avec $F$ et $G$ complets et $E$ qui est plongé de manière isométrique dans $F$ et $G$, c.-à-d. $E \subset F \cap G$ et pour tout $x, y \in E$, $d_F(x, y) = d_G(x, y) = d_E(x, y)$. Supposons de plus que $E$ est dense dans $F$ et dans $G$.

Montrer que $F$ et $G$ sont isométriques, c.-à-d. qu'il existe une bijection $\phi : F \to G$ avec

$$d_G(\phi(x), \phi(y)) = d_F(x, y) \qquad \forall x, y \in F$$

et telle que $\phi(x) = x$ pour tout $x \in E$.

*Ce qu'on vient de montrer est que toute façon de compléter $E$ mène au même résultat.*




**Compacité dans les espaces métriques** Dans le cadre des espaces métriques, la compacité admet définition séquentielle qui peut être très utile.

**Théorème 0.11.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$. Alors on a équivalence de:*

(i) *$A$ est compact;*

(ii) *pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in A$ tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.*

*(La deuxième propriété est appelée compacité séquentielle.)*

Un espace métrique $(E, d)$ est dit *propre* si, pour tout $x \in E$ et $r > 0$, la boule fermée $\overline{B}(x, r) = \{y \in E \,:\, d(x, y) \leq r\}$ est compacte.

**Exercice 18.**
Prouver le Théorème 0.11.

**Exercice 19.**
Soit $(E, d)$ un espace métrique. Montrer que si $E$ est compact, alors il est complet et borné (c.-à-d. il existe $M > 0$ tel que $d(x, y) < M$ pour tout $x, y \in E$).
*Indication:* Pour montrer que $E$ est borné, utiliser la contraposée: si on suppose que $E$ n'est pas borné, construire une suite qui ne contient pas de sous-suite convergente.
Déduire que si $A \subset E$ est compact, alors $A$ est fermé et borné. Est-ce que l'inverse est vrai ?

**Exercice 20.**
Soit $(E, d)$ un espace métrique et $K \subset E$ un compact.

- Montrer que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(K)$ est borné et $f$ atteint sont sup et son inf:
$$\exists x, y \in K \text{ t.q.} \quad f(x) = \sup_{z\in K} f(z) \quad \text{et} \quad f(y) = \inf_{z\in K} f(z).$$
- Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in K$ tel que
$$d(x, y) = \inf_{z\in K} d(x, z) =: \operatorname{dist}(x, K).$$
- Montrer que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f$ est uniformément continue.

**Exercice 21.**
Montrer que $\mathbb{R}$ muni de la distance euclidienne $d(x,y) = |x-y|$ est un espace métrique.
Montrer que dans $\mathbb{R}$ avec la topologie induite par cette distance, un ensemble est compact si et seulement s'il est fermé et borné (il s'agit du théorème de Bolzano–Weierstrass).
Est-ce que l'espace métrique $\mathbb{R}$ est compact / $\sigma$-compact / localement compact / séparable ?

**Exercice 22.**
On considère l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}\,\forall n \in \mathbb{N}\}$ et pour $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\boldsymbol{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \min\{|x_n - y_n|, 1\}.$$

(a) Argumenter que dist est bien défini et que c'est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) Soient $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour $k \geq 1$ et $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ si et seulement si $x_n^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Pour $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $N \geq 0$ et $\epsilon > 0$, posons $B_{N,\epsilon}(\boldsymbol{y}) = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n - y_n| < \epsilon, \forall n = 0,\dots,N\}$. Montrer que tout ensemble $B_{N,\epsilon}(\boldsymbol{y})$ est ouvert. Montrer que tout ouvert $U$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ s'écrit comme union (quelconque) d'ensembles de la forme $B_{N,\epsilon}(\boldsymbol{y})$ avec $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $N \geq 0$ et $\epsilon > 0$.

On dit alors que la famille $\{B_{N,\epsilon}(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, N \geq 0\, \epsilon > 0\}$ est une base d'ouverts pour la topologie induite par dist.

(d) Montrer que dans le point précédent on peut se limiter aux suites $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ stationnaires à 0 et aux $\epsilon$ rationnels. Plus précisément, montrer que $\{B_{N,\epsilon}(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ avec $y_n = 0$ si $n > N$, $N \geq 0$, $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}\}$ est une base d'ouverts.

(e) Est-ce que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec la topologie induite par dist est separable, compact, complet?

(f) Est-ce que le sous-ensemble $[0,1]^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in [0,1]\,\forall n \in \mathbb{N}\}$ avec la topologie induite par dist est separable, compact, complet?

**Exercice 23.**
Le but de cet exercice est de s'habituer avec les différentes propriétés des espaces métriques. Ce qu'il faut retenir est qu'un espace métrique localement séparable est également complet et $\sigma$-compact. De plus, c'est essentiellement un espace propre (quitte à modifier la distance sans modifier la topologie).

(a) Montrer qu'un espace métrique localement compact est complet.

(b) Montrer qu'un espace métrique propre est localement compact, $\sigma$-compact, complet et séparable.

(c) Donner un exemple d'espace métrique qui est polonais (complet et separable) mais pas localement ou $\sigma$-compact.

(d) Donner un exemple d'espace métrique qui est localement compact mais pas $\sigma$-compact.

(e) Montrer qu'un espace métrique localement compact est $\sigma$-compact si et seulement si il est séparable.

(f) ☠ Soit $(E, d)$ un espace métrique localement compact qui est $\sigma$-compact. Montrer qu'il existe un distance $d'$ sur $E$ qui génère la même topologie que $d$ et telle que $(E, d')$ est propre.

(g) Donner un exemple d'espace métrique qui est localement est $\sigma$-compact mais pas propre (*Indication:* modifier la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$ pour que $B(0, 1) = \mathbb{R}$ mais sans modifier la topologie).

# Chapitre 1

# Tribus et mesures

## 1.1 Définitions de tribus et mesures

Imaginons qu'on veut mesurer la "taille" des ensembles d'un espace $E$ (dans un premier temps, on peut voir $E$ comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$). Comme on va voir plus tard, on ne peut pas espérer en général mesurer tous les sous-ensembles de $E$. Il faut ainsi commencer par définir la classe des ensembles qu'on peut mesurer.

**Définition 1.1.** *Soit $E$ un ensemble. Une tribu (ou $\sigma$-algèbre) est une collection $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ de sous-ensembles de $E$ telle que*

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$,

(ii) *si $A \in \mathcal{E}$, alors $A^c := E \setminus A \in \mathcal{E}$,*

(iii) *si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{E}$.*

*On appelle le couple $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.*

**Définition 1.2.** *Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ est une fonction $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ telle que*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille* **dénombrable** *d'ensembles de $\mathcal{E}$ deux à deux disjoints, alors*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{1.1}$$

*On appelle le triplet $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.*

Dans (1.1), tous les membres de la somme sont positifs, ainsi la somme a toujours une valeur bien définie. Celle-ci peut être infinie, même si tous les termes de la somme sont finis. Si l'un des termes dans la somme est infini, il en est de même de la somme.

**Proposition 1.3.** *Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Alors*

(i) *pour $A, B \in \mathcal{E}$ avec $A \cap B = \emptyset$,*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \sqcup B);$$

(ii) *pour $A, B \in \mathcal{E}$ avec $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
*De plus, si $\mu(A) < \infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;*

(iii) *pour $A, B \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A \cap B) < \infty$,*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B);$$

(iv) *pour $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ avec $A_1 \subset A_2 \subset \dots$,*

$$\mu\Big(\bigsqcup\!\!\!\uparrow_{n\geq 1} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(A_n);$$

(v) *pour $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ avec $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ et $\mu(A_1) < \infty$,*

$$\mu\Big(\bigcap\!\!\!\downarrow_{n\geq 1} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mu(A_n);$$

(vi) *pour $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$,*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Dans la proposition précédente, on utilise implicitement le fait que $\mathcal{E}$ est stable par les opérations usuelles sur les ensembles, appliquées un nombre fini ou dénombrable de fois (voir exo 24).

Un mot sur la notation: les symboles $\bigsqcup$, $\bigsqcup\!\!\!\uparrow_n$ et $\bigcap\!\!\!\downarrow_n$ signifient respectivement union d'ensembles deux à deux disjoints, union d'une suite croissante d'ensembles et intersection d'une suite décroissante d'ensembles. On les utilise pour accentuer le fait que les ensembles auxquels on les applique ont certaines propriétés. Formellement, il faut quand même énoncer les propriétés des ensembles au préalable.

La preuve de la proposition 1.3 est laissée en exercice.

Dans la proposition 1.3 on voit que certaines propriétés sont valables seulement pour des ensembles de mesure finie. Pour cette raison, on préfère travailler avec des mesures finies, ou presque. Une mesure $\mu$ sur un espace $(E, \mathcal{E})$ est dite

- *finie* si $\mu(E) < \infty$;
- *de probabilité* si $\mu(E) = 1$;
- *$\sigma$-finie* s'il existe une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ et $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $\mu$ est une mesure sur un espace $(E, \mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ contient les singletons, on dit que $x \in E$ est un *atome* de $\mu$ si $\mu(\{x\}) > 0$. On note $\delta_x$ la *mesure de Dirac* en $x$, c.-à-d. la mesure

donnée par

$$\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On dit qu'une mesure $\mu$ est *atomique* si c'est une combinaison linéaire de mesures de Dirac. Plus précisément s'il existe un ensemble $\mathcal{I}$, des points $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de $E$ et des réels positifs $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ tels que

$$\mu = \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i \delta_{x_i} \tag{1.2}$$

La somme au dessus est une somme de fonctions de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$. Pour comprendre le sens de la somme infinie, voir l'exercice 28.

**Exemple:** Soit $E$ un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E)$ est une tribu sur $E$ (voir exercice 25). Quelques exemples simples de mesures sur $(E, \mathcal{P}(E))$ sont

- les mesures de Dirac;
- les combinaisons linéaires de mesures de Dirac (voir aussi l'exercice 31);
- la mesure de comptage $A \mapsto |.|$ qu'on peut aussi écrire $|.| = \sum_{x\in E} \delta_x$ (voir l'exercice 29).

Toutes ces mesures sont atomiques. Un exemple de mesure sans atomes est donné dans l'exercice 26.

**Exercice 24.**
Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{E}$ une tribu sur $E$. Montrer que,

(a) si $A, B \in \mathcal{E}$, alors $A \cup B \in \mathcal{E}$, $A \cap B \in \mathcal{E}$ et $A \setminus B \in \mathcal{E}$;

(b) si $A_1, A_2 \cdots \in \mathcal{E}$, alors $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{E}$.

**Exercice 25.**
Soit $E$ un ensemble. Montrer que $\{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des tribus sur $E$.

**Exercice 26.**
Est-ce que

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini}, \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini}, \end{cases}$$

définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ?
La même question pour

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini ou dénombrable}, \\ \infty & \text{sinon}. \end{cases}$$

**Exercice 27.**
Démontrer la proposition 1.3.

Donner un exemple d'espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et d'ensembles $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ avec $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\mu(A_n) = \infty$ pour tout $n$, mais

$$\bigcap\nolimits^{\downarrow}_{n\geq 1} A_n = \emptyset.$$

**Exercice 28.**
Soit $\mathcal{I}$ un ensemble et $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in [0, +\infty]^{\mathcal{I}}$ une famille de nombres positifs. On pose

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i := \sup\Big\{ \sum_{i\in\mathcal{J}} a_j : \mathcal{J} \subset \mathcal{I},\, \mathcal{J} \text{ fini}\Big\}$$

Montrer que si $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}$ sont des ensembles disjoints, alors

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_1} a_i + \sum_{i\in\mathcal{I}_2} a_i = \sum_{i\in\mathcal{I}_1\sqcup\mathcal{I}_2} a_i.$$

On utilise cette notation le plus souvent quand $\mathcal{I}$ est fini ou dénombrable. Supposons que $\mathcal{I}$ est infini, non-dénombrable et que $a_i > 0$ pour tout $i \in \mathcal{I}$. Montrer alors que $\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i = \infty$.

**Exercice 29.**
Soit $E$ un ensemble. Montrer que $\mu(A) = |A|$ définit une mesure sur $(E, \mathcal{P}(E))$.
Sous quelle condition $\mu$ est-elle $\sigma$-finie ?

**Exercice 30.**
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour $B \in \mathcal{E}$ définit une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. On l'appelle la restriction de $\mu$ à $A$.

**Exercice 31.**
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(\mu_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille de mesures sur $(E, \mathcal{E})$ et $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in (0, +\infty)^{\mathcal{I}}$. Montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i\mu_i : \mathcal{E} &\to [0, +\infty] \\ A &\mapsto \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i\mu_i(A) \end{aligned}$$

est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

**Exercice 32.**
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que pour $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ de mesures finies,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu\Big(\bigcap_{k\in I} A_k\Big).$$

*Indication:* procéder par récurrence.

## 1.2 Tribu engendrée

**Proposition 1.4.** *Soient $E$ un ensemble et $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur $E$. Alors $\bigcap_{i\in I}\mathcal{E}_i$ est une tribu sur $E$.*

Ce qui est important dans cette proposition est que la famille $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ est quelconque. On ne demande pas qu'elle soit finie ou dénombrable.

**Preuve:** On vérifie simplement que les conditions de la définition 1.1 s'applique à $\bigcap_{i\in I}\mathcal{E}_i$. □

**Définition 1.5.** *Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$. La* tribu engendrée *par $\mathcal{A}$ est la tribu*

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\mathcal{E}\ \textit{tribu}:\ \mathcal{A}\subset\mathcal{E}} \mathcal{E}.$$

Remarquons qu'il existe au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, à savoir $\mathcal{P}(E)$. De plus, grâce à la proposition 1.4, $\sigma(\mathcal{A})$ est bien une tribu.

**Proposition 1.6.** *Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$. Alors $\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{A}$. Plus précisément, si $\mathcal{E}$ est une tribu sur $E$ avec $\mathcal{A}\subset\mathcal{E}$, on a $\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{E}$.*

**Preuve:** Le résultat suit directement de la définition de $\sigma(\mathcal{A})$. □

**Exemple: tribu borélienne** Supposons que $E$ est un espace muni d'une topologie (c.-à-d. une notion de sous-ensemble ouvert). Alors on considère souvent sur $E$ une tribu cohérente avec sa structure topologique, à savoir la tribu *borélienne*.

**Définition 1.7.** *La* tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ *d'un espace topologique $E$ est la tribu engendrée par l'ensemble des parties ouvertes de $E$. Formellement*

$$\mathcal{B}(E) := \sigma\big(\{U\subset E : U\ \textit{ouvert}\}\big).$$

**Exemple: tribu produit** Soient $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$ deux ensembles mesurés. On considère souvent le produit cartésien $E\times F$ de $E$ et $F$. Celui-ci admet une tribu engendrée par celles de $E$ et $F$ comme suit. Soit

$$\mathcal{A} = \big\{U\times V : U\in\mathcal{E} \text{ et } V\in\mathcal{F}\big\}.$$

Les membres de $\mathcal{A}$ sont appelés les pavés de $E \times F$. La tribu produit sur $E \times F$ est

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} := \sigma(\mathcal{A}).$$

On peut ainsi faire des produits d'un nombre fini arbitraire d'espaces mesurables (voir aussi l'exercice 37).

On va vouloir aussi faire des produits d'un nombre infini d'espaces mesurables. Dans ce cas, la définition de la tribu produit s'adapte comme suit.

**Définition 1.8.** *Soit $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables. Un* cylindre *de $\bigtimes_{i\in I} E_i$ est un ensemble de la forme $A = \bigtimes_{i\in I} A_i$, où $A_i \in \mathcal{E}_i$ pour tout $i \in I$ et $A_i = E_i$ pour tout sauf un nombre fini d'indices $i \in I$.*

*Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble de cylindres de $\bigtimes_{i\in I} E_i$. Alors la tribu produit sur $\bigtimes_{i\in I} E_i$ est celle engendrée par les cylindres, à savoir,*

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{E}_i := \sigma(\mathcal{A}).$$

Si tous les espaces $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$ sont égaux, une autre façon de voir $\bigtimes_{i\in I} E_i$ est comme l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$ des fonctions de $I$ dans $E$. Alors la tribu produit est celle engendrée par les ensembles de la forme $\{f \in \mathcal{F}(I, E) : \ f(i) \in A\}$ pour $i \in I$ et $A \in \mathcal{E}$.

**Exercice 33.**
Soit $E$ un espace quelconque. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de $E$ ?

**Exercice 34.**
Soit $E$ un espace topologique et $F \subset E$ un ensemble fermé. Montrer que $F \in \mathcal{B}(E)$.

**Exercice 35.**
Plaçons-nous sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts:

$$\mathcal{I} = \{(a, b) : \ a < b\}.$$

Que vaut $\sigma(\mathcal{I})$ ?
Et si on prenait les intervalles fermés, ou semi-ouverts ?
Et si on imposait dans la définition de $\mathcal{I}$ que $a$ et $b$ soient rationnels ?

**Exercice 36.**
Considérons l'espace topologique $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ muni de la topologie engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ ainsi que les ensembles de la forme $[-\infty, a)$ et $(a, +\infty]$ pour $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ si et seulement si $A \setminus \{\pm\infty\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

**Exercice 37.**
Soient $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$ et $(G, \mathcal{G})$ trois espaces mesurés. Montrer que

$$\mathcal{E} \otimes (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = (\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}.$$

**Exercice 38.**
Soit $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces mesurables. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, soit $A_i \in \mathcal{E}_i$. Montrer que

$$\bigtimes_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_i.$$

**Exercice 39.**
Observons que $\mathbb{R}^2$ a une topologie canonique et donc une tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part $\mathbb{R}^2$ est le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et donc a une tribu produit. Montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Généraliser cela à $\mathbb{R}^d$.

**Exercice 40.**
Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on dispose de la tribu produit des boréliens de $\mathbb{R}$ écrite $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On dispose aussi de la topologie de la convergence simple – décrite dans l'exercice 22 par une distance – et de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ induite par celle ci. On note cette tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

## 1.3 Classes monotones: unicité des mesures

**Définition 1.9.** *Soit $E$ un ensemble. Une classe monotone sur $E$ est une collection de sous-ensembles $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$, telle que*

(i) $E \in \mathcal{M}$;

(ii) *si $A, B \in \mathcal{M}$ sont tels que $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$;*

(iii) *si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ sont tels que $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$.*

**Théorème 1.10** (Lemme de classe monotone)**.** *Soient $E$ un ensemble, $\mathcal{M}$ une classe monotone sur $E$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une collection de sous-ensembles stable par intersection finie (c.-à-d. telle que $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$).*

*Alors, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, on a aussi $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.*

Ce théorème est utilisé pour montrer que tous les ensembles d'une tribu ont une certaine propriété. Supposons par exemple qu'on travaille avec la tribu borélienne d'un espace topologique $E$ et qu'on s'intéresse à une propriété $\pi$. Si on peut montrer que

(i) les ensembles satisfaisant $\pi$ forment une classe monotone et

(ii) les ensembles ouverts satisfont $\pi$,

alors le lemme de classe monotone nous montre que tout borélien satisfait $\pi$. En effet, la collection d'ensembles ouverts $\{U \subset E : U \text{ ouvert}\}$ est stable par intersection finie. De plus

elle est contenue dans la classe monotone $\mathcal{M}$ des ensembles satisfaisant $\pi$. Ainsi $\mathcal{B}(E) = \sigma(\{U \subset E : U \text{ ouvert}\}) \subset \mathcal{M}$, ce qui est la conclusion désirée.

Généralement c'est plus facile de montrer que les ensembles satisfaisant une certaine propriété $\pi$ forment une classe monotone que de montrer qu'ils forment une tribu.

On va voir par la suite différentes applications de ce résultat.

**Preuve:** Tout comme pour les tribus, on peut parler de la classe monotone engendrée par une collection de sous-ensembles. Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une collection stable par intersections finies. Notons $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ classe monotone} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{M}}} \mathcal{M}.$$

Alors ce qu'on cherche à montrer est que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Il est facile de vérifier qu'une classe monotone stable par intersections finies est une tribu (voir exercice 41), il suffit donc de montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par intersections finies.

Soit $A \in \mathcal{A}$ et posons $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$. Évidement $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_A$ car, si $B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. De plus, $\mathcal{C}_A$ est une classe monotone:

(i) $E \cap A = A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ donc $E \in \mathcal{C}_A$;

(ii) si $B, C \in \mathcal{C}_A$ sont tels que $B \subset C$, alors

$$A \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),$$

par le fait que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une classe monotone. Ainsi $B \setminus C \in \mathcal{C}_A$;

(iii) enfin, si $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{C}_A$ sont tels que $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, alors

$$A \cap \Big( \bigcup_{n \geq 1} B_n \Big) = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap B_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),$$

par le fait que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une classe monotone. Ainsi $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{C}_A$.

On conclut que $\mathcal{C}_A$ est une classe monotone contenant $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_A$. En d'autres mots, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Maintenant, fixons $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ arbitraire et posons, comme avant, $\mathcal{C}_B = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$. Par ce qui précède, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_B$. De plus, $\mathcal{C}_B$ est une classe monotone, donc $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_B$. Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

On conclut que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une classe monotone stable par intersections finies, c'est donc une tribu. □

**Application: unicité de la mesure de Lebesgue** Comme décrit dans l'introduction, l'intégrale de Lebesgue est censée étendre celle de Riemann. Ainsi, la mesure de Lebesgue devrait mesurer aux moins tous les ensembles Riemann mesurables, donc en particulier les intervalles. On devrait donc construire une mesure $\lambda$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que

$$\lambda([a, b]) = b - a, \qquad \forall a < b.$$

La construction d'une telle mesure s'avère difficile (elle est traitée dans le chapitre 3). On a toutefois déjà les outils pour montrer son unicité.

**Proposition 1.11** (Unicité de la mesure de Lebesgue)**.** *Il existe au plus une mesure $\lambda$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que*

$$\lambda([a,b]) = b - a, \qquad \forall a < b.$$

**Preuve:** Soient $\lambda$ et $\nu$ deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec $\nu([a,b]) = \lambda([a,b]) = b - a$ pour tout $a < b$ Définissons $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des segments de $\mathbb{R}$. Alors $\nu(A) = \lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. De plus, $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.

Fixons $M > 0$ et posons $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \lambda(A \cap [-M,M]) = \nu(A \cap [-M,M])\}$. Alors $M$ est une classe monotone:

(i) $\lambda([-M,M]) = \nu([-M,M]) = 2M$ donc $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$;

(ii) si $A, B \in \mathcal{M}$ sont tels que $A \subset B$, alors

$$\begin{aligned}\lambda\big((B \setminus A) \cap [-M,M]\big) &= \lambda\big(B \cap [-M,M]\big) - \lambda\big(A \cap [-M,M]\big) \\ &= \nu\big(B \cap [-M,M]\big) - \nu\big(A \cap [-M,M]\big) = \nu\big((B \setminus A) \cap [-M,M]\big),\end{aligned}$$

donc $B \setminus A \in \mathcal{M}$ [(1)];

(iii) si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ sont tels que $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, alors

$$\begin{aligned}\lambda\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n \cap [-M,M]\Big) &= \lim_n \lambda\big(A_n \cap [-M,M]\big) \\ &= \lim_n \nu\big(A_n \cap [-M,M]\big) = \nu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n \cap [-M,M]\Big),\end{aligned}$$

donc $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$.

Ainsi, par le lemme de classe monotone $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(A) \subset \mathcal{M}$.

On déduit que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $M > 0$, $\lambda(A \cap [-M,M]) = \nu(A \cap [-M,M])$ . En prenant $M \to \infty$, on obtient

$$\lambda(A) = \nu(A), \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

□

**Attention!** On va par la suite utiliser la mesure de Lebesgue $\lambda$ dans plusieurs exemples. On admet donc son existence pour l'instant.

La procédure qu'on a utilisé pour montrer l'unicité de la mesure de Lebesgue se généralise comme suit.

[(1)] ici on utilise la restriction à $[-M,M]$ pour assurer que $\lambda\big(B \cap [-M,M]\big) = \nu\big(B \cap [-M,M]\big) < \infty$.

**Proposition 1.12.** *Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $\mu, \nu$ deux mesures sur $E$ et $\mathcal{A}$ une collection d'ensembles stable par intersections finies. Supposons que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$ et que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$.*

(i) *Si $\mu(E) < \infty$ et $E \in \mathcal{A}$, alors $\mu = \nu$.*

(ii) *S'il existe une suite $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ dans $\mathcal{A}$ avec $\mu(A_k) < \infty$ pour tout $k \geq 0$ et telle que $E = \bigcup_{k \geq 0} A_k$, alors $\mu = \nu$.*

On laisse la preuve en exercice.

**Exercice 41.**
Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone stable par intersections finies. Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu.

**Exercice 42.**
Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{M}$ un classe monotone sur $E$. Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par union disjointe finie, à savoir que si $A, B \in \mathcal{M}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $A \sqcup B \in \mathcal{M}$.

**Exercice 43.**
Soit $E$ un ensemble fini, avec $|E|$ pair. Posons $\mathcal{M} = \{A \subset E : |A| \text{ pair}\}$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone mais pas une tribu.

**Exercice 44.** (a) Admettons l'existence de la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $\mathbb{R}$. Fixons un entier $M \geq 1$ et posons

$$\mathcal{M} = \big\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \lambda(B \cap [0, M]) \in \mathbb{N}\big\}.$$

Montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone. Exhiber un borélien qui n'appartient pas à $\mathcal{M}$.

(b) Posons $\mathcal{A} = \{[a, a+1) \cup B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : a \in [0, M-1] \text{ et } B \cap [0, M) = \emptyset\}$. Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ et que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.
*On a donc construit une classe monotone qui génère $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais n'y est pas égale.*

(c) Posons $\mathcal{A}' = \{[a, a+1) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\}$. Que vaut $\sigma(\mathcal{A}')$? Quelle est la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}'$.

**Exercice 45.**
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $\mu, \nu$ deux mesures sur $E$ et $\mathcal{A}$ une collection d'ensembles stable par intersections finies. Supposons que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$ et que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$.

(a) Si $\mu(E) < \infty$ et $E \in \mathcal{A}$, montrer que $\mu = \nu$.

(b) Supposons qu'il existe une suite $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ dans $\mathcal{A}$ avec $\mu(A_k) < \infty$ pour tout $k \geq 0$ et telle que $E = \bigcup_{k \geq 0} A_k$. Montrer que $\mu = \nu$.

(c) Montrer par un contre-exemple que, sans les conditions de finitude (ou $\sigma$-finitude) d'avant, on peut avoir $\mu \neq \nu$.

**Exercice 46.**
On admet l'existence de la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\lambda(A \cap [a, b]) = \frac{1}{2}(b - a)$ pour tous $a < b$.

# Chapitre 2

# Intégrale contre une mesure

## 2.1 Fonctions mesurables

Avant de définir la notion d'intégrale, on va etudier les fonctions qui peuvent être integrées.

**Définition 2.1.** *Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : E \to F$ est dite mesurable si,*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} \in \mathcal{E} \quad \textit{pour tout } B \in \mathcal{F}.$$

*Remarque* 2.2. Par la suite, les fonctions à valeurs réelles occuperont un rôle central. Dans ce cas la, on dit qu'une fonction $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ est mesurable, si pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$.

De plus, on va parfois autoriser les fonctions à prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$. Quand on parle de $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on considère qu'un ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si $A \setminus \{\pm\infty\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Le lemme suivant (surtout le point (iii)) est utile pour montrer qu'une fonction est mesurable.

**Lemme 2.3.** *Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurés et $f : E \to F$ une fonction.*

(i) *L'ensemble $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur $E$.*

(ii) *L'ensemble $\{B \in \mathcal{F} : f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\}$ est une tribu sur $F$.*

(iii) *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ telle que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Alors $f$ est mesurable si et seulement si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{E}, \qquad \forall B \in \mathcal{A}. \tag{2.1}$$

**Preuve:** (i) Notons $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}$. Alors $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A}$. Pour $A = f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, on a $A^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$. Enfin, si $A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ pour $n \geq 1$, alors

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) \in \mathcal{A}.$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est une tribu.

(ii) Notons $\mathcal{X} = \{B \in \mathcal{F} : f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\}$. Alors $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{E}$, donc $\emptyset \in \mathcal{X}$. Si $B \in \mathcal{X}$ alors $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \in \mathcal{E}$, donc $B^c \in \mathcal{X}$. Enfin, si $B_n \in \mathcal{X}$ pour $n \geq 1$, alors

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{E},$$

donc $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{X}$. Ainsi $\mathcal{X}$ est une tribu.

(iii) Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ telle que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Il est immédiat que, si $f$ est mesurable, alors (2.1) est satisfait.

Supposons inversement que (2.1) est satisfait. On peut réécrire cela comme $\mathcal{A} \subset \{B \in \mathcal{F} : f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\}$. Mais on vient de montrer que l'ensemble de droite est une tribu. Ainsi

$$\mathcal{F} = \sigma(A) \subset \{B \in \mathcal{F} : f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\},$$

ce qui implique que $f$ est mesurable. □

**Corollaire 2.4.** *Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors $f$ est mesurable de $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.*

**Preuve:** On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ ouvert}\})$. Par continuité de $f$, $f^{-1}(U)$ est ouvert (donc dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$) pour tout ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$. Par le troisième point de la proposition précédente, on conclut que $f$ est mesurable. □

**Proposition 2.5.** *Soient $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$ et $(G, \mathcal{G})$ des espaces mesurables.*

(i) *Si $f, g : E \to \mathbb{R}$ sont mesurables, alors*

$$f + g, \quad fg, \quad \max\{f, g\} = f \vee g, \quad \min\{f, g\} = f \wedge g$$

*le sont aussi.*

(ii) *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont mesurables, alors $g \circ f$ l'est aussi.*

(iii) *Si $f_n : E \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que*

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x), \qquad \forall x \in E,$$

*alors $f$ est aussi mesurable.*

(iv) *Si $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les fonctions $\sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ et $\liminf_{n\to\infty} f_n$ sont aussi mesurables de $E$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

(v) *Pour $A \in \mathcal{E}$, la fonction $\mathbf{1}_A : E \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

*est mesurable.*

**Preuve:**

(ii) Soit $B \in \mathcal{G}$. Alors $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ car $g$ est mesurable. Comme $f$ est mesurable,

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big) \in \mathcal{E},$$

donc $g \circ f$ est mesurable.

(iii) D'après le lemme 2.3, il suffit de montrer que $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{E}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Observons que, pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty, a)) &= \big\{x \in E : \lim_n f_n(x) < a\big\} \\ &= \big\{x \in E : \exists\, k \geq 1 \text{ et } N \geq 1 \text{ t.q. } \forall n \geq N \text{ t.q. } f_n(x) < a - \tfrac{1}{k}\big\} \\ &= \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \big\{x \in E : f_n(x) < a - \tfrac{1}{k}\big\}. \end{aligned}$$

Vue que chaque fonction $f_n$ est mesurable, $\{x \in E : f_n(x) < a - \frac{1}{k}\} \in \mathcal{E}$. Ainsi, graçe aux propriétés des tribus, $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{E}$.

(iv) On traite uniquement le cas du sup; les autres sont laissés en exercice. Observons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\big(\sup_n f_n\big)^{-1}((a, +\infty]) = \bigcup_{n \geq 1} f_n^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{E}.$$

Vu que $\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$ génère $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, on conclut en appliquant le lemme 2.3.

(i) Soient $f, g : E \to \mathbb{R}$ mesurables. Alors la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : E &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

est mesurable. En effet, pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\Phi^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \in \mathcal{E}$; et par le lemme 2.3, $\Phi$ est mesurable. Les fonctions

$$\begin{array}{llll} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ (x, y) \mapsto x + y & (x, y) \mapsto xy & (x, y) \mapsto x \vee y & (x, y) \mapsto x \wedge y \end{array}$$

sont continues, donc mesurable. Par (ii) on obtient les propriétés désirées.

(v) Soit $A \subset E$. Observons que

$$\mathbf{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B, \\ A & \text{si } 0 \notin B \text{ mais } 1 \in B, \\ A^c & \text{si } 0 \in B \text{ mais } 1 \notin B, \\ E & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B. \end{cases}$$

Ainsi, $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $\emptyset, A, A^c, E \in \mathcal{E}$. Cela revient à $A \in \mathcal{E}$.

□

**Exercice 47.**
En utilisant uniquement la partie prouvé de la Proposition 2.5 (notamment que le sup de fonctions mesurables est mesurable), montrer que que pour des fonctions mesurables $f_n : E \to \mathbb{R}$ pour $n \geq 1$,

- $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont des fonctions mesurables de $E$ dans $\overline{\mathbb{R}}$;
- $\{x \in E : \lim_n f_n(x) \text{ existe}\} \in \mathcal{E}$.

**Exercice 48.**
Montrer que toute fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable.

**Exercice 49.**
Soit $f : E \to F$ une fonction et $\mathcal{E}$ une tribu sur $E$. Expliquer pourquoi $\{f(B) : B \in \mathcal{E}\}$ n'est pas forcement une tribu sur $F$.

## 2.2 Intégration des fonctions positives

Comme pour l'intégrale de Riemann, l'intégrale contre une mesure (dite de Lebesgue quand l'espace de base est $\mathbb{R}$), commence par l'intégration des fonctions positives. Pour l'intégrale de Riemann on a commencé par définir l'intégrale des fonctions de la forme $\mathbf{1}_{[a,b]}$ pour $a < b$, ensuite on l'a étendue aux fonctions positives par linéarité et passage à la limite. La procédure dans le cas présent est similaire, mais commence par une classe plus large de fonctions. Une image qui montre la différence des deux approches est donnée dans la figure 2.1

### 2.2.1 Fonctions étagées

Fixons un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$.

**Définition 2.6.** *Une fonction étagée est une fonction $f : E \to [0, +\infty)$ telle qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ avec*

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}. \tag{2.2}$$

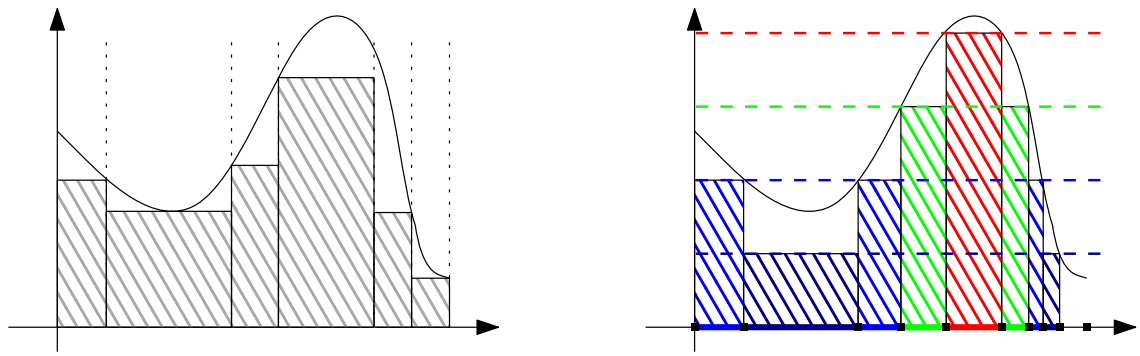


Figure 2.1: A gauche on approxime l'aire sous le graphe de $f$ par des blocs découpés verticalement; c'est la procédure utilisée dans l'intégrale de Riemann. À droite on découpe l'aire sous le graphe de $f$ en fonction de la hauteur (correspondant aux différentes couleurs), qu'on multiplie ensuite par la taille de l'ensemble pré-image correspondent. La différence essentielle arrive quand les ensemble de différentes couleurs sur l'axe horizontale ne sont pas des unions finies d'intervalles.

Pour les fonctions étagées, la définition de l'intégrale apparaît naturellement. En effet, on aimerait écrire

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k).$$

Pour que la définition qu'on vient de donner ait un sens, il faut faire une observation. En effet, l'écriture d'une fonction étagée (2.2) comme combinaison de fonctions indicatrice n'est pas unique. Il faut donc mentionner que l'intégrale de $f$ ne dépend pas de l'écriture choisie.

**Lemme 2.7.** *Soit $f$ une fonction étagée avec*

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{B_j},$$

*où $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in (0, \infty)$ et $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{E}$. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j). \tag{2.3}$$

**Preuve:** Soit $f$ une fonction étagée. Alors il existe une écriture $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$ où $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints. Fixons une telle écriture. Pour démontrer le lemme 2.7 il suffit de montrer (2.3) pour toute autre écriture $f = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{B_j}$.

Notons $C_{i,j} = A_i \cap B_j$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. Alors, pour chaque $1 \leq j \leq m$,

$B_j = \bigsqcup_{i=1}^n C_{i,j}$, d'où

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{1}_{B_j} = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} b_j \mathbf{1}_{C_{i,j}}. \tag{2.4}$$

De plus, pour chaque $1 \le j \le m$, $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(C_{i,j})$. Ainsi

$$\sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \mu(C_{i,j}).$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que, pour chaque $1 \le i \le n$,

$$\sum_{j=1}^m b_j \mu(C_{i,j}) = a_i \mu(A_i).$$

Fixons pour le reste de la preuve $1 \le i \le n$. Pour $J \subset \{1, \dots, m\}$, écrivons

$$D_J = \Big(\bigcap_{j\in J} C_{i,j}\Big) \cap \Big(\bigcap_{j\notin J} A_i \setminus C_{i,j}\Big) = \big\{x \in A_i : \forall j,\, x \in C_{i,j} \text{ si } j \in J \text{ et } x \notin C_{i,j} \text{ si } j \notin J\big\}.$$

Alors, $A_i = \bigsqcup_{J\subset\{1,\dots,m\}} D_J$ et, pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, $C_{i,j} = \bigsqcup_{j\in J\subset\{1,\dots,m\}} D_J$. Ainsi

$$\sum_{j=1}^m b_j \mu(C_{i,j}) = \sum_{j=1}^m b_j \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,m\}\\ \text{avec } j\in J}} \mu(D_J) = \sum_{J\subset\{1,\dots,m\}} \sum_{j\in J} b_j \mu(D_J).$$

Mais (2.4) implique que

$$a_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{1}_{C_{i,j}} = \sum_{J\subset\{1,\dots,m\}} \Big(\sum_{j\in J}^m b_j\Big) \mathbf{1}_{D_J},$$

ce qui entraîne que, pour tout $J \in \{1, \dots, m\}$ avec $D_J \neq \emptyset$, $\sum_{j\in J} b_j = a_i$. Ainsi

$$\sum_{J\subset\{1,\dots,m\}} \sum_{j\in J} b_j \mu(D_J) = a_i \sum_{J\subset\{1,\dots,m\}} \mu(D_J) = a_i \mu(A_i),$$

ce qui achève la preuve. □

Grâce au lemme précédent, on peut définir l'intégrale des fonctions étagées positives.

**Définition 2.8.** *Soit $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$ une fonction étagée, avec $a_1, \dots, a_n \in (0, \infty)$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$. Alors on pose*

$$\mathrm{Int}_\mu(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k).$$

On écrit pour l'instant $\mathrm{Int}_\mu(f)$ à la place de $\int f d\mu$ pour des raisons qui vont devenir

évidentes dans la partie suivante.

**Proposition 2.9.** *Soit $f, g$ des fonctions étagées et $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$. Alors*

(i) *$\alpha f + \beta g$ est une fonction étagée et*

$$\mathrm{Int}_\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{Int}_\mu(f) + \beta \mathrm{Int}_\mu(g).$$

(ii) $\mathrm{Int}_\mu(f) \geq 0$.

(iii) $\mathrm{Int}_\mu(f) = 0$ *si et seulement s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) = 0$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in A^c$ (on dit alors que $f$ est nulle $\mu$-presque partout.*

**Vocabulaire:** On dit qu'une certaine propriété $\pi$ applicable aux éléments de $E$ est vraie *$\mu$-presque partout* (ou pour *$\mu$-presque tout $x$*) s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) = 0$ tel que $\pi$ est vraie pour tout $x \notin A$.

**Preuve:** Les points (i) et (ii) sont évidents.

Pour le point (iii) écrivons $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$ avec $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ et $a_1, \ldots, a_n > 0$. Supposons de plus

$$\mathrm{Int}_\mu(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = 0.$$

Alors, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k \mu(A_k) = 0$, donc $\mu(A_k) = 0$. Posons $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Alors $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = 0$ et, pour tout $x \notin A$, $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$.

Inversement, supposons qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) = 0$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \notin A$. Alors $A_k \subset A$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, donc $\mu(A_k) \leq \mu(A) = 0$. Ainsi

$$\mathrm{Int}_\mu(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = 0.$$

□

### 2.2.2 Fonctions mesurables positives

Une fois l'intégrale définie pour les fonctions positives étagées, elle peut être étendue aux fonctions positives mesurables par approximation. Les fonctions mesurables sont celles qui peuvent être bien approximées par des fonctions étagées (voir partie 2.2.3).

**Définition 2.10.** *Soit $f : E \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. L'intégrale de $f$ contre $\mu$ est définie par*

$$\int f \, d\mu = \sup \big\{ \mathrm{Int}_\mu(g) : \, g \text{ etagée positive}, \, g \leq f \big\}. \tag{2.5}$$

On a en ce moment deux définitions distinctes pour l'intégrale des fonctions étagées positives, à savoir 2.8 et 2.10, d'où la notation distincte de la définition 2.8. Les deux donne évidement le même résultat.

**Lemme 2.11.** *Soit $f : E \to [0, \infty)$ une fonction étagée. Alors*

$$\int f \, d\mu = \mathrm{Int}_\mu(f).$$

**Preuve:** Observons que dans (2.5) on peut prendre $g = f$ dans le supremum. Ainsi $\int f \, d\mu \geq \mathrm{Int}_\mu(f)$.

Inversement, si $g : E \to [0, +\infty)$ est étagée et telle que $g \leq f$, alors $f - g$ est une fonction étagée positive et par la proposition 2.9,

$$\mathrm{Int}_\mu(f) = \mathrm{Int}_\mu(g) + \mathrm{Int}_\mu(f - g) \geq \mathrm{Int}_\mu(g).$$

Ainsi $\int f \, d\mu = \sup \big\{ \mathrm{Int}_\mu(g) : g \text{ étagée positive}, \, g \leq f \big\} \leq \mathrm{Int}_\mu(f)$ et la preuve est finie. □

Le lemme suivant est une conséquence directe de la définition 2.10.

**Lemme 2.12.** *Soient $f, g : E \to [0, \infty]$ deux fonction mesurables avec $f \geq g$. Alors*

$$\int f \, d\mu \geq \int g \, d\mu.$$

### 2.2.3 Convergence monotone

**Théorème 2.13** (Convergence monotone)**.** *Soit $f, f_1, f_2, \ldots$ des fonctions mesurables de $E$ dans $[0, +\infty]$. Supposons que, pour tout $x \in E$,*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \quad \text{et} \quad f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x).$$

*Alors,*

$$\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \int f \, d\mu.$$

On dit que la suite $(f_n)_n$ converge ponctuellement, de façon croissante, vers $f$. Le théorème de convergence monotone nous dit que alors l'intégrale de $f_n$ converge vers celle de $f$.

Ce théorème, avec celui de convergence dominée énoncé plus bas, sont les théorèmes principaux permettant d'inverser limite et intégrale. Le théorème de convergence monotone est particulièrement important, car il nous dit que, peu importe comment on approxime une fonction positive $f$ par des fonctions étagées (positives et plus petites que $f$), l'intégrale de $f$ est obtenue comme limite des intégrales de ces fonctions étagées. Une suite de telles fonctions étagées approximant $f$ est donnée par la proposition 2.14 à suivre (et plus explicitement par la construction dans sa preuve).

**Preuve:** Soient $f$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ comme dans l'énoncé. On a $f_n \leq f$. Par monotonie de l'intégrale (Lemme 2.12), $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, donc

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

Par le suite on va montrer l'inégalité inverse:

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \int f \, d\mu. \tag{2.6}$$

Soit $g : E \to [0, \infty)$ étagée avec $0 \leq g \leq f$ et $\int g \, d\mu < \infty$. Écrivons

$$g = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbf{1}_{A_k},$$

avec $a_k > 0$ et $A_k \in \mathcal{E}$ pour $k = 1, \ldots, m$. Soit $\epsilon > 0$. Montons que

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq (1-\epsilon) \int g \, d\mu. \tag{2.7}$$

Observons que, grâce à la monotonie de $(f_n)_n$, la suite d'ensembles

$$E_n = \{x \in E : \, f_n(x) \geq (1-\epsilon) g\}$$

est croissante et

$$\bigcup\!\!\uparrow_{n\geq 0} E_n \supset \{x \in E : \, f_n(x) \to f(x)\} = E.$$

Alors,

$$\int f_n \, d\mu \geq \int (1-\epsilon) g \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \sum_{k=1}^{m} (1-\epsilon) a_k \mu(A_k \cap E_n)$$

Par la proposition 1.3, $\mu(A_k \cap E_n) \nearrow \mu(A_k)$ quand $n \to \infty$. Ainsi

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \sum_{k=1}^{m} (1-\epsilon) a_k \mu(A_k) = (1-\epsilon) \int g \, d\mu.$$

En prenant le supremum sur $g$ et comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on obtient (2.6) et la preuve est finie. □

**Proposition 2.14.** *Soit $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Il existe alors des fonctions étagées positives $f_1, f_2, \ldots$ telles que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \quad \textit{et} \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

**Preuve:** Soit $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Pour $n \geq 1$, posons

$$f_n(x) = \min\left\{2^{-n}\lfloor 2^n f(x)\rfloor, 2^n\right\}, \qquad \text{pour } x \in E,$$

où $\lfloor . \rfloor$ représente la partie entière. Ainsi $f_n(x)$ est le plus grand nombre de la forme $k2^{-n}$ plus petit que $f(x)$ avec $k \leq 4^n$ entier.

Il est alors évident que, pour tout $x \in E$, $f_n(x) \nearrow f(x)$ quand $n \to \infty$. De plus, par sa définition, $f_n$ est une fonction étagée positive pour tout $n \geq 1$. □

**Exercice 50.**
Soit $f$ une fonction telle qu'il existe une suite de fonctions étagées convergeant ponctuellement vers $f$. Montrer que $f$ est mesurable.

**Exercice 51.**
A l'aide du théorème de convergence monotone énoncé dans le cours, démontrer la généralisation suivante. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et $f$ des fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour $\mu$-presque tout $x$, $f_n \nearrow f(x)$. Alors $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$

### 2.2.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

**Proposition 2.15.** *(i) Soient $f, g : E \to [0, +\infty]$ des fonction mesurables et $\lambda \in (0, \infty)$. Alors*

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \quad \text{et} \quad \int \lambda f\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu.$$

*(ii) Soient $f_1, f_2, \cdots : E \to [0, +\infty]$ des fonction mesurables. Alors*

$$\int \sum_{n\geq 1} f_n\, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int f_n\, d\mu.$$

**Preuve:** *(i)* On montre uniquement le point (i), le point (ii) est laissé en exercice. Soient $f, g : E \to [0, +\infty]$ des fonction mesurables et $\lambda \in (0, \infty)$. Soient $f_n, g_n : E \to [0, +\infty]$ des fonction étagées avec $f_n(x) \nearrow f(x)$ et $g_n(x) \nearrow g(x)$ pour tout $x \in E$. Alors

$$f_n(x) + g_n(x) \nearrow f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \lambda f_n(x) \nearrow \lambda f(x), \quad \text{quand } n \to \infty, \text{ pour tout } x \in E.$$

Ainsi, par le théorème de convergence monotone et la proposition 2.9

$$\int (f+g)\, d\mu = \lim_n \int (f_n + g_n)\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu + \int g_n\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \quad \text{et}$$
$$\int \lambda f\, d\mu = \lim_n \int \lambda f_n\, d\mu = \lambda \lim_n \int f_n\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu.$$

*(ii)* Les series infinies des deux cotés de l'égalité sont bien définies car leurs terms sont des nombres positifs. De plus $\sum_{n\geq 1} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n$ est la limite simple d'une

suite de fonctions mesurables, c'est donc aussi une fonction mesurable. De plus, comme les fonctions $f_n$ sont positives, cette limite est une limite croissante. Par le théorème de convergence monotone et le point *(i)*:

$$\begin{aligned}\int \sum_{n\geq 1} f_n \, d\mu &= \int \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n \, d\mu \\ &= \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} f_n \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int f_n \, d\mu.\end{aligned}$$

□

**Théorème 2.16** (inégalité de Markov)**.** *Soit $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors, pour tout $\lambda \in (0, \infty)$,*

$$\mu\big(\{x \in E : \, f(x) \geq \lambda\}\big) \leq \frac{1}{\lambda} \int f \, d\mu.$$

**Preuve:** Soient $f$ et $\lambda$ comme dans l'énoncé. Alors $f \geq \lambda \mathbf{1}_{\{x\in E:\, f(x)\geq\lambda\}}$. Ainsi

$$\int f \, d\mu \geq \lambda \int \mathbf{1}_{\{x\in E: f(x)\geq\lambda\}} \, d\mu = \lambda\mu(\{x \in E : \, f(x) \geq \lambda\}).$$

En divisant par $\lambda$, on obtient la conclusion. □

**Corollaire 2.17.** *Soit $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable.*

(i) *Alors $\int f \, d\mu = 0$ si et seulement s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) = 0$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in A^c$ (c.-à-d. si et seulement si $f$ est nulle presque partout).*

(ii) *Si $\int f \, d\mu < \infty$, alors il existe un ensemble $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) = 0$ et $f(x) < \infty$ pour tout $x \in A^c$ (c.-à-d. $f$ est finie presque partout).*

**Preuve:** (i) Supposons pour commencer que $\int f \, d\mu = 0$. En utilisant l'inégalité de Markov, on déduit que pour tout $\lambda > 0$,

$$\mu(\{x \in E : \, f(x) \geq \lambda\}) \leq \lambda^{-1} \int f \, d\mu = 0.$$

De plus, observons que

$$\big\{x \in E : \, f(x) > 0\big\} = \bigcup\!\!\uparrow_{n\geq 1} \Big\{x \in E : \, f(x) \geq \frac{1}{n}\Big\}.$$

Ainsi $\mu(\{x \in E : \, f(x) > 0\}) = 0$.

Inversement, supposons que $A = \{x \in E : \, f(x) > 0\}$ est de mesure nulle. Alors, si $g : E \to [0, \infty)$ est étagée avec $g \leq f$, $g$ est nulle presque partout. Ainsi, par la proposition 2.9 (iii), $\int g \, d\mu = 0$. En prenant le supremum sur $g$, on obtient $\int f \, d\mu = 0$.

(ii) On observe que

$$\{x \in E : f(x) = \infty\} = \bigcap\nolimits\!\downarrow_{n\geq 1} \{x \in E : f(x) \geq n\}.$$

Mais, par l'inégalité de Markov,

$$\mu\big(\{x \in E : f(x) \geq n\}\big) \leq \frac{1}{n} \int f \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi $\mu(\{x \in E : f(x) = \infty\}) = 0$. □

**Exercice 52.**
Montrer qu'il existe en général des fonctions $f : E \to [0, \infty]$ avec $\int f \, d\mu = \infty$ mais $f < \infty$ presque partout. Est-ce possible même si on suppose $\mu(E) < \infty$ ?

### 2.2.5 Lemme de Fatou

**Théorème 2.18** (lemme de Fatou)**.** *Soient $f_1, f_2, \ldots$ des fonctions mesurable positives sur $E$. Alors,*

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Pour que le terme de droite dans l'énoncé du théorème soit bien défini, il faut mentionner que, grâce aux propriétés des fonctions mesurables, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ est aussi une fonction mesurable (voir proposition 2.5)

**Preuve:** Observons que pour tout $x \in E$,

$$\inf_{k\geq n} f(x) \nearrow \liminf_{k\to\infty} f_k(x), \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Ainsi, par le théorème de convergence monotone,

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int \inf_{k\geq n} f_k \, d\mu. \tag{2.8}$$

De plus, pour tout $\ell \geq n$, $\inf_{k\geq n} f_k \leq f_\ell$, donc

$$\int \inf_{k\geq n} f_k \, d\mu \leq \int f_\ell \, d\mu.$$

Ainsi

$$\int \inf_{k\geq n} f_k \, d\mu \leq \inf_{\ell\geq n} \int f_\ell \, d\mu. \tag{2.9}$$

En prenant la limite de (2.9) quand $n \to \infty$ et l'insérant dans (2.8), on obtient la conclusion. □

**Exercice 53.**
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ définie par $f_n = \mathbf{1}_{[0,1]}$ pour $n$ pair et $f_n = \mathbf{1}_{[-1,0]}$ pour $n$ impair. Montrer dans ce cas que

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu > \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Posons $g_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$. Montrer que $g_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu > \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu.$$

### 2.2.6 Mesures à densité

Pour une fonction $f : E \to [0, \infty]$ mesurable et $A \in \mathcal{E}$, on écrit

$$\int_A f \, d\mu := \int \mathbf{1}_A f \, d\mu.$$

**Théorème 2.19.** *Pour une fonction $f : E \to [0, \infty]$ mesurable et $A \in \mathcal{E}$ posons*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int \mathbf{1}_A f \, d\mu.$$

*Alors $\nu$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ qu'on note $f d\mu$.*

**Preuve:** Il est évident que $\nu$ est bien définie, qu'elle prend des valeurs dans $[0, \infty]$ et que $\nu(\emptyset) = 0$. Soient $A_1, A_2 \cdots \in \mathcal{E}$ deux à deux disjoints. Alors, par le théorème de convergence monotone,

$$\nu\Big(\bigsqcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \int \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int \mathbf{1}_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n).$$

□

**Exercice 54.**
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : E \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables. Notons $\nu = g d\mu$ la mesure de densité $g$ par rapport à $\mu$. Montrer que $\int f \, d\nu = \int f g \, d\mu$.

## 2.3 Intégration des fonctions quelconques

Pour une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$, l'intégrale est définie en utilisant les parties positives et négatives de $f$. Ainsi, on pose

$$f_+(x) = \max\{0, f(x)\} \quad \text{et} \quad f_-(x) = -\min\{0, f(x)\} \qquad \forall x \in E.$$

Les deux fonctions $f_+$ et $f_-$ sont mesurables et positives, on peut donc définir leur intégrale par la définition 2.10. L'intégrale de $f$ est alors la différence entre l'intégrale de $f_+$ et celle de $f_-$, mais pour que cette quantité soit bien définie, il faut que les deux intégrales soit finies.

On doit ainsi se limiter aux fonctions $f$ dont les intégrales de $f_+$ et celle de $f_-$ sont finies.

**Définition 2.20.** *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que $f$ est* intégrable *si*

$$\int |f| \, d\mu < \infty. \tag{2.10}$$

*On note $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ l'ensemble des fonctions* intégrables.

*Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. L'intégrale de $f$ est alors définie par*

$$\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu.$$

Remarquons que, pour $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, grâce au lemme 2.12,

$$\int f_+ \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu < \infty \quad \text{et} \quad \int f_- \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu < \infty.$$

**Proposition 2.21.** *L'ensemble $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un espace vectoriel et l'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$.*

**Preuve:** Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int |af + bg| \, d\mu \leq \int (|a| \cdot |f| + |b| \cdot |g|) \, d\mu = |a| \int |f| d\mu + |b| \int |g| \, d\mu < \infty.$$

Ainsi $af + bg \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ donc $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un espace vectoriel.

Montrons que l'intégrale est linéaire. Pour $a \geq 0$ et $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, $(af)_\pm = af_\pm$, d'où, par la proposition 2.15,

$$\int af \, d\mu = \int af_+ \, d\mu - \int af_- \, d\mu = a\Big(\int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu\Big) = a \int f \, d\mu.$$

Pour $a < 0$, $(af)_\pm = |a| f_\mp$ et un calcul similaire mène au même résultat.

Pour $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$,

$$f + g = (f + g)_+ - (f + g)_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-.$$

Ainsi

$$(f + g)_+ + f_- + g_- = (f + g)_- + f_+ + g_+.$$

Par la proposition 2.15

$$\int (f + g)_+ d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int (f + g)_- d\mu + \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu.$$

En regroupant les termes on trouve,

$$\int (f+g)d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

□

**Corollaire 2.22.** *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. Alors*

$$\Big|\int f\,d\mu\Big| \leq \int |f|\,d\mu \quad \textit{et}$$
$$\textit{si } f \leq g \textit{ alors } \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu.$$

**Preuve:** Pour la seconde propriété, écrivons $g = f + (g - f)$ pour déduire que $\int g\,d\mu = \int f\,d\mu + \int (g-f)\,d\mu$. Comme $g - f$ est une fonction positive, $\int (g-f)\,d\mu \geq 0$, ce qui montre que $\int g\,d\mu \geq \int f\,d\mu$.

Pour montrer le premier points, il suffit d'appliquer le second à $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$. □

**Lemme 2.23.** *Soient $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Supposons que $f = g$ $\mu$-presque partout et que $f$ est intégrable. Alors $g$ est aussi intégrable et $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.*

**Preuve:** On commence par $f, g \geq 0$. Soit $A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $f = 0$ sur $A$. Posons $h = g\mathbf{1}_A$. Alors $g = f + h$ et $h$ est une fonction positive, nulle presque partout. Par le corollaire 2.17, $\int h\,d\mu = 0$. Ainsi

$$\int g\,d\mu = \int f\,d\mu + \int h\,d\mu = \int f\,d\mu < \infty.$$

Passons au cas où $f$ et $g$ sont quelconques. Alors $|f|$ et $|g|$ sont des fonctions positives, égales presque partout, donc par le cas précédent,

$$\int |g|\,d\mu = \int |f|\,d\mu < \infty.$$

Ainsi $g$ est intégrable. De plus, le cas précédent s'applique aussi à $f_+$ et $g_+$ et $f_-$ et $g_-$, respectivement. Ainsi

$$\int g_+\,d\mu = \int f_+\,d\mu \quad \text{et} \quad \int g_-\,d\mu = \int f_-\,d\mu,$$

d'où $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$. □

## 2.4 Théorème de convergence dominée

**Théorème 2.24.** *Soient $f, f_1, f_2, \dots$ des fonctions mesurables telles que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ pour $\mu$-presque tout $x \in E$. Supposons de plus qu'il existe une fonction intégrable $g : E \to [0,\infty)$ telle que $|f_n| \le g$ $\mu$-presque partout. Alors $f$ est intégrable et*

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu. \tag{2.11}$$

**Preuve:** Soient $A = \{x \in E : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$ et $A_n = \{x \in E : |f_n(x)| > g(x)\}$ pour $n \ge 1$. Alors

$$\mu\Big(A \cup \bigcup_{n\ge1} A_n\Big) \le \mu(A) + \sum_{n\ge1} \mu(A_n) = 0.$$

Notons $B = A \cup \big(\bigcup_{n\ge1} A_n\big)$. Quitte à changer $f_n$ en $f_n \mathbf{1}_{B^c}$ et $f$ en $f\mathbf{1}_{B^c}$ (ce qui ne affecte pas la valeur de $\int f_n d\mu$ ou $\int f d\mu$) on peut supposer que

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad \text{et} \quad |f_k(x)| \le g(x)\,, \qquad \text{pour tout } x \in E \text{ et } k \ge 1.$$

On déduit que $|f(x)| \le g(x)$ pour tout $x \in E$, donc $\int |f| \, d\mu < \infty$. Ainsi $f$ est intégrable. De plus, par le lemme de Fatou appliqué aux fonctions positives $2g - |f_n - f|$, $n \ge 1$,

$$\begin{aligned}\int 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu &= \liminf_{n\to\infty} \int 2g - |f_n - f| \, d\mu \\ &\ge \int \liminf_{n\to\infty} 2g - |f_n - f| \, d\mu = \int 2g \, d\mu.\end{aligned}$$

Ainsi, vu que $\int 2g \, d\mu < \infty$, on conclut que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$. Ceci implique (2.11):

$$\Big| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \Big| \le \int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

**Exercice 55.**
On se place sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\phi$ une fonction continue à valeurs dans $[0,\infty)$, à support dans $[-1,1]$ (c.-à-d. $\phi(x) = 0$ si $x \notin [-1,1]$), avec $\int \phi d\lambda = 1$. Pour $n \ge 1$, posons

$$f_n(x) = n\phi(nx), \quad g_n(x) = \tfrac{1}{n}\phi\left(\tfrac{1}{n}x\right), \quad h_n(x) = \phi(x-n), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $f_n(x), g_n(x), h_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
Calculer $\int f_n d\lambda$, $\int g_n d\lambda$, $\int h_n d\lambda$. Commenter...
Dessiner les graphes de ces fonctions.

**Exercice 56.**
Soit $(f_n)_{n\ge1}$ la suite de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour $n \ge 1$, $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,n+1)}$. Montrer que tout chaque $f_n$ est mesurable et que $\int f_n d\lambda \to 0$.
Montrer que la convergence n'est pas dominée par une fonction intégrable.

Montrer que tout sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ contient une sous-sous-suite $(f_{\tau(\sigma(n))})_{n\geq 1}$ qui est dominée par une fonction intégrable.
Montrer que plus généralement, cette dernière propriété suffit pour déduire la convergence des intégrales.

**Exercice 57.**
(Théorème d'Egorov). Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$, et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables, définies sur $E$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que $(f_n)$ converge presque partout vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.
Montrer que alors $(f_n)$ converge uniformément en-dehors d'un ensemble de mesure arbitrairement petite. Plus exactement, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable $A \subset E$ tel que $\mu(A) < \epsilon$ et tel que

$$\sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

## 2.5 Intégrales dépendant d'un paramètre

On présente cette partie sous la forme d'une série d'exercices.

**Exercice 58.**
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

(i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable,

(ii) pour $\mu$-presque tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue,

(iii) il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(x, t)| \leq g(x) \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in E.$$

Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $F(t) = \int f(x, t)d\mu(x)$ est bien définie et continue.

**Exercice 59.**
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

(i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$,

(ii) pour $\mu$-presque tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (c.-à-d. dérivable, de dérivée continue),

(iii) il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que, pour $\mu$-presque tout $x \in E$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $F(t) = \int f(x, t)d\mu(x)$ est bien définie et $\mathcal{C}^1$, de dérivée

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)d\mu(x), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 60.**
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que la fonction appelée la convolution de $f$ et $g$, donnée par

$$\begin{aligned} f * g : &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \int f(t)g(x-t)dt \end{aligned}$$

est bien définie et continue.
Montrer que si $g$ est de classe $\mathcal{C}^i$ pour $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec toutes ses dérivées bornées, alors $f * g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^i$.

## 2.6 Fonctions à valeurs complexes et vectorielles

L'intégrale peut être étendue aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans un espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$. Les tribus qu'on considère sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^d$ sont les tribus boréliennes (rappelons que toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes, donc qu'elles engendre la même topologie).

**Définition 2.25.** (i) *Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On dit que $f$ est intégrable si $\int |f| d\mu < \infty$ et on pose dans ce cas*

$$\int f \, d\mu = \int \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int \mathrm{Im}(f) \, d\mu.$$

(ii) *Soient $d \geq 1$ et $f : E \to \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable. Notons $f = (f_1, \ldots, f_n)$ les coordonnées de $f$. On dit que $f$ est intégrable si $f_1, \ldots, f_d$ le sont et on pose dans ce cas*

$$\int f \, d\mu = \Big( \int f_1 \, d\mu, \ldots, \int f_d \, d\mu \Big) \in \mathbb{R}^d.$$

La linéarité de l'intégrale (Prop. 2.21) ainsi que le théorème de convergence dominée (Thm. 2.24) s'adaptent directement aux intégrales des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$. Par le suite on va se concentrer uniquement sur les fonctions à valeurs réelles.

# Chapitre 3

# Construction des mesures

## 3.1 Mesures extérieures; théorème de Caratheodory

### 3.1.1 Théorème de Caratheodory

**Définition 3.1.** *Soit $E$ un ensemble. Une mesure extérieure sur $E$ est une fonction $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ avec les propriétés suivantes*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *si $A \subset B \subset E$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$* *(monotonie)*

(iii) *si $A_n \in \mathcal{P}(E)$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$.* *($\sigma$-sous-additivité)*

*On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est $\mu$-mesurable si pour tout $B \subset E$,*

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B). \tag{3.1}$$

*On note $\mathcal{M}(\mu)$ l'ensemble des parties $\mu$-mesurables de $E$.*

Dans (3.1), l'inégalité $\mu(B) \leq \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B)$ est assurée par la sous-additivité de $\mu$. Ainsi, demander l'égalité revient à demander l'inégalité inverse.

**Théorème 3.2.** *Soit $\mu$ une mesure extérieure sur un ensemble $E$. Alors $\mathcal{M}(\mu)$ est une tribu et $\mu$ est une mesure sur $(E, \mathcal{M}(\mu))$.*

**Preuve:** La preuve se décompose en quatre étapes.

(1) Montrons pour commencer que $\mathcal{M}(\mu)$ est une algèbre, c.-à-d. que $\mathcal{M}(\mu)$ est stable par unions finies et passage au complémentaire et qu'elle contient l'ensemble vide.

Les deux dernières propriétés suivent directement de la définition de $\mathcal{M}(\mu)$ et de $\mu$, respectivement. Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(\mu)$ et $B \subset E$ quelconque. Alors, par sous-additivité de $\mu$ et des simples manipulations d'ensembles (plus précisément par $\big(A_1 \cap B\big) \cup \big(A_1^c \cap A_2 \cap B\big) =$

$(A_1 \cup A_2) \cap B)$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\mu\big((A_1 \cup A_2) \cap B\big) + \mu\big((A_1 \cup A_2)^c \cap B\big) \\
\leq &\mu\big(A_1 \cap B\big) + \mu\big(A_1^c \cap A_2 \cap B\big) + \mu\big(A_1^c \cap A_2^c \cap B\big) && \text{sous-additivité} \\
= &\mu\big(A_1 \cap B\big) + \mu\big(A_1^c \cap B\big) && \text{car } A_2 \in \mathcal{M}(\mu) \\
= &\mu(B) && \text{car } A_1 \in \mathcal{M}(\mu)
\end{aligned}$$

L'inégalité inverse suit directement de la sous-additivité. On conclut que

$$\mu\big((A_1 \cup A_2) \cap B\big) + \mu\big((A_1 \cup A_2)^c \cap B\big) = \mu(B),$$

d'où $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}(\mu)$.

(2) Montrons maintenant que $\mu$ est additive sur $\mathcal{M}(\mu)$. Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(\mu)$ disjoints. Alors

$$\begin{aligned}
\mu(A_1 \sqcup A_2) &= \mu\big((A_1 \sqcup A_2) \cap A_1\big) + \mu\big((A_1 \sqcup A_2) \cap A_1^c\big) && \text{car } A_1 \in \mathcal{M}(\mu) \\
&= \mu(A_1) + \mu(A_2). && \text{car } A_1 \cap A_2 = \emptyset
\end{aligned}$$

Remarquons que, par le même raisonnement, on peut même montrer que pour tout $B \subset E$,

$$\begin{aligned}
\mu\big[(A_1 \sqcup A_2) \cap B\big] &= \mu\big[(A_1 \sqcup A_2) \cap B \cap A_1\big] + \mu\big[(A_1 \cup A_2) \cap B \cap A_1^c\big] \\
&= \mu(A_1 \cap B) + \mu(A_2 \cap B). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

(3) Montrons que $\mathcal{M}(\mu)$ est une $\sigma$-algèbre. Comme on a déjà montré que $\mathcal{M}(\mu)$ est une algèbre, il suffit de prouver que $\mathcal{M}(\mu)$ est stable par union dénombrable disjointe.

Soient $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}(\mu)$ deux à deux disjoints. Notre but est de montrer que $\bigsqcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}(\mu)$, donc que, pour tout $B \subset E$,

$$\mu\Big[B \cap \Big(\bigsqcup_{n\geq 1} A_n\Big)\Big] + \mu\Big[B \cap \Big(\bigsqcup_{n\geq 1} A_n\Big)^c\Big] \leq \mu(B),$$

car l'inégalité inverse est garantie par la $\sigma$-sous-additivité. Observons que, pour tout $N$ fini, par le point (1), $\bigsqcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{M}(\mu)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \mu\Big[B \cap \Big(\bigsqcup_{n=1}^N A_n\Big)\Big] + \mu\Big[B \cap \Big(\bigsqcup_{n=1}^N A_n\Big)^c\Big] \\
&\geq \sum_{n=1}^N \mu(B \cap A_n) + \mu\Big[B \cap \Big(\bigsqcup_{n\geq 1} A_n\Big)^c\Big] && \text{par (3.2) et monotonie.}
\end{aligned}$$

En prenant $N \to \infty$, on conclut par $\sigma$-sous-additivité que

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\geq \sum_{n\geq 1} \mu(B \cap A_n) + \mu\Big[B \cap \Big(\bigsqcup_{n\geq 1} A_n\Big)^c\Big] \\
&\geq \mu\Big[B \cap \Big(\bigsqcup_{n\geq 1} A_n\Big)\Big] + \mu\Big[B \cap \Big(\bigsqcup_{n\geq 1} A_n\Big)^c\Big]. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

(4) Enfin, montrons que $\mu$ est $\sigma$-additive sur $\mathcal{M}(\mu)$. Soient $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}(\mu)$ deux à deux disjoints. Par la $\sigma$-sous-additivité de $\mu$, il suffit de montrer que

$$\mu\Big(\bigsqcup_{n\geq 1} A_n\Big) \geq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

En posant $B = \bigsqcup_{n\geq 1} A_n$ dans (3.3) on obtient le résultat désiré. □

**Exercice 61.**
Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de sous-ensembles de $E$:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$;
- si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Si en plus $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable *disjointe*, montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.

### 3.1.2 Construction des mesures extérieures

Le théorème suivant montre comment construire une mesure extérieure à partir d'une algèbre $\mathcal{A} \subset E$ et $\rho$ une fonction $\sigma$-additive sur $\mathcal{A}$. Cette procédure va être utilisée pour construire différentes mesures dans le reste du chapitre.

**Théorème 3.3.** *(a) Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une collection de sous-ensembles avec $\emptyset \in \mathcal{A}$. De plus, soit $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une fonction avec $\rho(\emptyset) = 0$. Posons*

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n) : \ A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}, \qquad \textit{pour tout } A \subset E.$$

*Alors $\mu$ est une mesure extérieure sur $E$.*

*(b) Supposons de plus que $\mathcal{A}$ est une algèbre (c.-à-d. non-vide et stable par unions finies et passage au complémentaire) et que $\rho$ est $\sigma$-additive, c.à d que pour $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints avec $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$*

$$\rho\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n).$$

*Alors $\mathcal{A}$ est incluse dans la tribu des parties $\mu$-mesurables de $E$ et, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \rho(A)$.*

*(c) Enfin, si $\mu$ est $\sigma$-finie, alors $\mu$ est l'unique mesure avec la propriété $\mu(A) = \rho(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.*

**Preuve:** (*a*) **Montrons que $\mu$ est une mesure extérieure.** $\mu(\emptyset) = 0$ et la monotonie sont évidentes. Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ des ensembles. La conclusion est triviale si $\mu(A_n) = \infty$ pour au moins un $n$. Ainsi on se limite au cas $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n$.

Soient $\epsilon > 0$ et $B_{n,k} \in \mathcal{A}$ tels que, pour chaque $n$, $A_n \subset \bigcup_k B_{n,k}$ et $\mu(A_n) + \epsilon 2^{-n} \geq \sum_k \rho(B_{n,k})$. Alors, $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,k} B_{n,k}$ donc

$$\mu\big(\bigcup_n A_n\big) \leq \sum_{n,k} \rho(B_{n,k}) \leq \sum_n [\mu(A_n) + \epsilon 2^{-n}] = \epsilon + \sum_n \mu(A_n).$$

Si on retient que $\epsilon$ est arbitraire, on déduit que $\mu$ est $\sigma$-sous additive, donc que c'est une mesure extérieure.

$(b)$ Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est une algèbre et que $\rho$ est $\sigma$-additive. Mentionnons que $\mathcal{A}$ est alors stable aussi par différences et intersections finies. De plus, comme $\rho(\emptyset) = 0$, on déduit que $\rho$ est aussi additive, et donc monotone, sur $\mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. **Montrons que** $\mu(A) = \rho(A)$**.** Évidement $\mu(A) \leq \rho(A)$, on doit donc montrer l'inégalité inverse. Soient $A_n \in \mathcal{A} : n \in \mathbb{N}^*$ tels que $A \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Posons $A'_n = A \cap (A_n \setminus \bigcup_{k\leq n} A_k)$. Alors $A'_n \in \mathcal{A}$, ces ensembles sont deux à deux disjoints et $A = \bigsqcup_{n\geq 1} A'_n$. Ainsi $\rho(A) = \sum_{n\geq 1} \rho(A'_n)$. Mais $\rho$ est monotone sur $\mathcal{A}$ et par construction $A'_n \subset A_n$. On obtient donc $\rho(A) \leq \sum_{n\geq 1} \rho(A_n)$. Ainsi $\rho(A) \leq \mu(A)$.

**Montrons que** $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mu)$**.** Pour $A, B \in \mathcal{A}$, par additivité de $\rho$, on a bien

$$\mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B) = \rho(A \cap B) + \rho(A^c \cap B) = \rho(B) = \mu(B).$$

Fixons $A \in \mathcal{A}$ et prenons $B \subset E$ quelconque. On veut montrer que

$$\mu(B) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B),$$

l'inégalité inverse étant toujours satisfaite grâce à la sous-additivité de $\mu$. Soient $B_n \in \mathcal{A} : n \in \mathbb{N}$ tels que $B \subset \bigcup_n B_n$. Alors $A \cap B \subset \bigcup_n (A \cap B_n)$ et $A^c \cap B \subset \bigcup_n (A^c \cap B_n)$, donc par sous-additivité de $\mu$,

$$\begin{aligned}\mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B) &\leq \sum_n \mu(A \cap B_n) + \mu(A^c \cap B_n) \\ &= \sum_n \rho(A \cap B_n) + \rho(A^c \cap B_n) = \sum_n \rho(B_n).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu(B) = \inf\{\sum_n \rho(B_n) : B_n \in \mathcal{A},\ B \subset \bigcup_n B_n\} \geq \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B)$, ce qui est ce qu'on devait montrer.

$(c)$ Supposons qu'il existe une suite croissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ avec $E = \cup_n A_n$ et $\rho(A_n) < \infty$. Alors le lemme de classe monotone nous donne l'unicité de $\mu(. \cap A_n)$. Mais pour tout $B \in \mathcal{M}(\mu)$, $\mu(B) = \lim \mu(B \cap A_n)$. On en déduit **l'unicité de** $\mu$. □

On peut imaginer qu'on dispose d'une mesure extérieure $\mu$ (construite par exemple comme dans le Théorème 3.3 mais sans qu'on puisse simplement montrer que la fonction $\rho$ est $\sigma$-additive). Le critère suivant nous aide a montrer que les ensembles boréliens sont $\mu$ mesurable.

**Théorème 3.4** (Critère de Carathéodory)**.** *Soient $(E, d)$ un espace métrique, et $\mu$ une mesure extérieure sur $E$. Si, pour toutes parties $A, B \subset E$ avec* $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$ *on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors, $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}(\mu)$.*

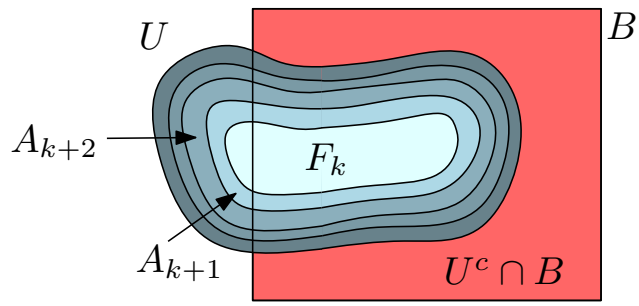



Figure 3.1: L'ouvert $U$ en bleu, décomposé comme $F_k \sqcup A_{k+1} \sqcup A_{k+2} \sqcup \dots$.

**Preuve:** Soit $U$ un ouvert de $E$ et $B \subset E$. On aimerait montrer que $U \in \mathcal{M}(\mu)$, ou en d'autres mots que $\mu(B) = \mu(B \cap U^c) + \mu(B \cap U)$. Vu que $\mu$ est sous-additive, il suffit de montrer

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap U^c) + \mu(B \cap U).$$

On peut donc se limiter au cas où $\mu(B) < \infty$. Posons $F_n = \{x \in E : \mathrm{dist}(x, U^c) \geq 1/n\}$ et $A_n = F_{n+1} \setminus F_n$. Voir l'image 3.1.

On va commencer par montrer que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n \cap B) < \infty$. Observons que, pour tout $k \geq 0$, on a $d(A_k, A_{k+2}) > 0$. Ainsi, pour tout $N \geq 1$, par la condition sur $\mu$,

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(A_{2k} \cap B) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_{2k} \cap B\Big) \leq \mu(B) < \infty \quad \text{et}$$
$$\sum_{k=0}^{N} \mu(A_{2k+1} \cap B) = \mu\Big(\bigcup_{k=0}^{N} A_{2k+1} \cap B\Big) \leq \mu(B) < \infty.$$

Ainsi $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n \cap B) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_{2n} \cap B) + \sum_{n\geq 0} \mu(A_{2n+1} \cap B) \leq 2\mu(B) < \infty$.

Maintenant montrons que $\mu(F_n \cap B) \to \mu(U \cap B)$ quand $n \to \infty$. Pour $n \geq 1$, comme $U$ est un ouvert, $U = F_n \cup \bigcup_{k>n} A_k$. Ainsi

$$\mu(U \cap B) = \mu\Big[\big(F_n \cup \bigcup_{k>n} A_n\big) \cap B\Big] \leq \mu(F_n \cap B) + \mu\big[\bigcup_{k>n} (A_k \cap B)\big].$$

Mais $\mu(\bigcup_{k>n} A_k \cap B) \leq \sum_{k>n} \mu(A_k \cap B) \to 0$, quand $n \to \infty$. On arrive donc à la conclusion que $\mu(F_n \cap B) \to \mu(U \cap B)$ (on utilise implicitement que $\mu(F_n \cap B) \leq \mu(U \cap B)$ pour tout $n$).

Enfin, observons que, due à la condition imposé sur $\mu$,

$$\mu(F_n \cap B) + \mu(U^c \cap B) = \mu((F_n \cup U^c) \cap B) \leq \mu(B).$$

En faisant $n$ tendre vers l'infini dans cette inégalité, on obtient

$$\mu(U \cap B) + \mu(U^c \cap B) \leq \mu(B),$$

et la preuve est finie. □

**Exercice 62.**
Soient $E$ un espace métrique et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une collection de sous-ensembles avec $\emptyset \in \mathcal{A}$. De plus, soit $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une fonction avec $\rho(\emptyset) = 0$. Pour $\delta > 0$ et $A \subset E$, posons

$$\mu_\delta(A) = \inf \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n) : \ A_0, A_1, \cdots \in \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } \operatorname{diam}(A_n) < \delta,\ \forall n \geq 0 \Big\}.$$

On rappelle que, par convention, $\inf \emptyset = \infty$. De plus, posons $\mu_0(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \mu_\delta(A)$.

Montrer que $\mu_0$ est une mesure extérieure sur $E$ et que $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}(\mu_0)$.

**Exercice 63.**
Soient $E$ un espace métrique compact et $A, B \subset E$. Montrer que $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ si et seulement si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Donner un exemple ou $E$ n'est pas compact et ou $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, mais $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

### 3.1.3 Tribu complétée

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

**Définition 3.5.** *On dit que $A \subset E$ est une partie $\mu$-négligeable s'il existe $B \in \mathcal{E}$ avec $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$. On écrit $\mathcal{N}(\mu)$ pour l'ensemble des parties $\mu$-négligeables.*

**Proposition 3.6.** *Soit $\overline{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}(\mu))$ (on appelle $\overline{\mathcal{E}}$ la tribu complétée de $\mathcal{E}$ par rapport à $\mu$). Alors $\mu$ s'étend de façon unique en une mesure $\overline{\mu}$ sur $\overline{\mathcal{E}}$ avec*

$$\mu(A) = \overline{\mu}(A), \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

**Preuve:** Pour commencer, observons que $\{A \cup N : \ A \in \mathcal{E}, N \in \mathcal{N}(\mu)\}$ est une tribu. Elle contient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{N}(\mu)$, et c'est évidement la plus petite telle tribu. Ainsi

$$\overline{\mathcal{E}} = \{A \cup N : \ A \in \mathcal{E}, N \in \mathcal{N}(\mu)\}.$$

Pour $A \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{N}(\mu)$, posons $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$. Cette définition est ambiguë car généralement la décomposition de $A \cup N$ n'est pas unique. En effet, on peut avoir $A' \in \mathcal{E}$ et $N' \in \mathcal{N}(\mu)$ tels que $A' \cup N' = A \cup N$. Pourtant, si $B, B' \in \mathcal{E}$ sont tels que $N \subset B$, $N' \subset B'$ et $\mu(B) = \mu(B')$, alors $A \subset A \cup N = A' \cup N' \subset A' \cup B'$, donc

$$\mu(A) \leq \mu(A' \cup B') \leq \mu(A') + \mu(B') = \mu(A').$$

De la même façon, $\mu(A) \geq \mu(A')$, donc $\mu(A) = \mu(A')$, ce qui monter que $\overline{\mu}$ est bien définie. On vérifie facilement que $\overline{\mu}$ est bien une mesure sur $\overline{\mathcal{E}}$.

Il est aussi immédiat que $\overline{\mu}$ est l'unique mesure qui prolonge $\mu$ à $\overline{\mathcal{E}}$. □

*Remarque* 3.7. Si $\mu$ est une mesure extérieure, alors $\mathcal{M}(\mu)$ est une tribu complète pour la mesure $\mu$.

## 3.2 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

### 3.2.1 Construction de la mesure de Lebesgue

Le but de cette partie est de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, à savoir une mesure $\lambda$ telle que, pour $a < b$, $\lambda([a,b]) = b - a$. Comme la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles fermés, une telle mesure va porter au moins sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, voir même une tribu plus grande.

**Théorème 3.8.** *Il existe une unique mesure $\lambda$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que, pour tout $a \leq b$, $\lambda([a,b]) = b - a$. On appelle cette mesure la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

La mesure de Lebesgue ainsi construite est évidement $\sigma$-finie.

**Preuve:** L'unicité de la mesure de Lebesgue a déjà été établie dans la Proposition 1.11, on se concentre donc sur son existence. Pour $A \subset \mathbb{R}$, posons

$$\lambda(A) = \inf\Big\{\sum_{n\geq 0} b_n - a_n : \ A \subset \bigcup_{n\geq 0} ]a_n, b_n[\Big\} \quad \text{et}$$
$$\lambda_\epsilon(A) = \inf\Big\{\sum_{n\geq 0} b_n - a_n : \ A \subset \bigcup_{n\geq 0} ]a_n, b_n[ \text{ et } b_n - a_n < \epsilon \, \forall n\Big\} \quad \text{pour } \epsilon > 0.$$

Par la première partie du Théorème 3.3, $\lambda$ et $\lambda_\epsilon$ sont des mesures extérieures sur $\mathbb{R}$. On commence par montrer que $\lambda = \lambda_\epsilon$.

L'inégalité $\lambda \leq \lambda_\epsilon$ est triviale. Pour montrer l'inégalité inverse, on commence par montrer que $\lambda_\epsilon(]a,b[) \leq b - a$ pour un $\epsilon > 0$ fixé. Soit $\delta > 0$ et $N$ assez grand pour que $(b - a + \delta)/N < \epsilon$. Pour $i = 1, \ldots, N$, posons

$$a_i = a + \tfrac{i-1}{N}(b-a) - \tfrac{1}{2N}\delta \quad \text{et} \quad b_i = a + \tfrac{i}{N}(b-a) + \tfrac{1}{2N}\delta.$$

Alors $b_i - a_i = \frac{1}{N}(b - a + \delta) < \epsilon$ et $]a,b[\subset ]a_1, b_1[\cup \cdots \cup ]a_N, b_N[$. Par la définition de $\lambda_\epsilon$, on conclut que

$$\lambda_\epsilon(]a,b[) \leq \sum_{i=1}^{N} b_i - a_i = b - a + \delta.$$

Comme $\delta > 0$ est arbitraire, cela implique que $\lambda_\epsilon(]a,b[) < b - a$, comme annoncé.

Maintenant montrons que, pour tout $A \subset \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, $\lambda_\epsilon(A) \leq \lambda(A)$. On peut se limiter au cas ou $\lambda(A) < \infty$. Fixons un recouvrement $\bigcup_{n\geq 0} ]a_n, b_n[$ de $A$ avec $\sum_{n\geq 0} b_n - a_n < \infty$. Alors il existe $N$ tel que $b_n - a_n < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Fixons $\delta > 0$ et pour chaque $n < N$, soit $a_{n,i} \leq b_{n,i}$, $i \geq 0$ tels que

$$]a_n, b_n[\subset \bigcup_{i\geq 0} ]a_{n,i}, b_{n,i}[, \quad b_{n,i} - a_{n,i} \leq \epsilon \, \forall i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i\geq 0} b_{n,i} - a_{n,i} \leq b_n - a_n + \tfrac{1}{N}\delta.$$

Cela est possible car $\lambda_\epsilon(]a_n, b_n[) \leq b_n - a_n$ Alors,

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{N-1} \bigcup_{i\geq 0} ]a_{n,i}, b_{n,i}[ \ \cup \bigcup_{n\geq N} ]a_n, b_n[.$$

Tous les éléments de ce recouvrement ont longueur plus petite que $\epsilon$, donc

$$\lambda_\epsilon(A) \leq \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i\geq 0} b_{n,i} - a_{n,i} + \sum_{n\geq N} b_n - a_n \leq \delta + \sum_{n\geq 0} b_n - a_n.$$

De nouveau, $\delta > 0$ étant arbitraire, on trouve $\lambda_\epsilon(A) \leq \sum_{n\geq 0} b_n - a_n$. En fin, par la définition de $\lambda(A)$, cette dernière inégalité implique que $\lambda_\epsilon(A) \leq \lambda(A)$. On conclut donc que $\lambda_\epsilon = \lambda$.

Montrons maintenant que les boréliens sont mesurable pour la mesure extérieure $\lambda$. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{dist}(A, B) = \epsilon > 0$; montrons que $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$. Il suffit de montrer l'inégalité $\geq$, l'opposée est vraie par sous-additivité. De plus, on peut remplacer $\lambda$ par $\lambda_\epsilon$, vu que ces deux mesures exterieures sont égales.

Soit $\bigcup_{n\geq 0} ]a_n, b_n[$ un recouvrement de $A \cup B$ qui apparait dans la définition de $\lambda_\epsilon$. Alors chaque intervalle $]a_n, b_n[$ intersecte au plus un des ensembles $A$ et $B$. On conclut que la famille des intervalles $\{]a_n, b_n[ : n \geq 0\}$ peux être partagée en un recouvrement de $A$ et un de $B$. Ainsi $\sum_{n\geq 0} b_n - a_n \geq \lambda_\epsilon(A) + \lambda_\epsilon(B)$. Par la définition de $\lambda_\epsilon$, cela implique bien que $\lambda_\epsilon(A \cup B) \geq \lambda_\epsilon(A) + \lambda_\epsilon(B)$. Ainsi $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$. Par le critère de Caratheodory (Théorème 3.4) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\lambda)$.

Ce qu'il nous reste à montrer est que la restriction de $\lambda$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la mesure recherchée, c.-à-d. que pour $a \leq b$, $\lambda([a, b]) = b - a$.

Vu que $[a, b] \subset ]a - \epsilon, b + \epsilon[$ pour tout $\epsilon > 0$, on déduit que $\lambda([a, b]) \leq b - a$. On va maintenant se concentrer sur l'inégalité inverse. Soient $a_i, b_i \in \mathbb{R} : i \geq 0$ tels que

$$[a, b] \subset \bigcup_{n\geq 0} ]a_n, b_n[.$$

Comme $[a, b]$ est un compact, il existe $N$ tel que

$$[a, b] \subset \bigcup_{n=0}^{N} ]a_n, b_n[.$$

On peut alors réarranger les couples $(a_i, b_i)$ de telle sorte que $a_0 \leq a_1 \cdots \leq a_N$ et on peut éliminer tous les intervalles $]a_i, b_i[$ entièrement couverts par les autres (c.à-d. par $\bigcup_{n\in\{0,\ldots,N\}\setminus\{i\}} ]a_n, b_n[$) ainsi que ceux qui n'intersecte pas $[a, b]$. Alors les intervalles $]a_n, b_n[$: $n = 0, \ldots, N$ se chevauchent, plus précisément on a:

$$a_0 < a < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < \cdots < a_N < b_{N-1} < b < b_N.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{N} (b_n - a_n) \geq b_0 - a + \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_{n-1}) = b_N - a > b - a.$$

Cela montre bien que $\lambda([a,b]) \geq b-a$. $\square$

**Proposition 3.9.** *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\lambda(\alpha A + \beta) = \lambda(\{\alpha a + \beta : a \in A\}) = |\alpha|\lambda(A), \tag{3.4}$$

*(avec la convention $0 \cdot \infty = 0$). De plus, si $\mu$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translations et telle que $\mu([0,1]) < \infty$, alors $\mu$ est un multiple de la mesure de Lebesgue.*

**Preuve:** Commençons par montrer (3.4). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On peut supposer $\alpha \neq 0$, sinon la conclusion est évidente. Notons, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(A) := \frac{1}{|\alpha|}\lambda(\alpha A + \beta)$. Alors $\mu$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec

$$\mu([a,b]) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda\big([\alpha a - \beta, \alpha b - \beta]\big) = b - a.$$

(Si $\alpha < 0$, l'intervalle $[\alpha a - \beta, \alpha b - \beta]$ est à remplacer par $[\alpha b - \beta, \alpha a - \beta]$.) Par l'unicité de la mesure de Lebesgue, $\mu = \lambda$, donc $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Passons au second point. Soit $\mu$ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation, avec $\mu([0,1[) = \alpha < \infty$. Alors $\mu([0, \frac{1}{n}[) = \mu([\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[) = \cdots = \mu([\frac{n-1}{n}, 1)$. Ainsi $\mu([0, \frac{1}{n}[) = \frac{1}{n}\alpha$. En utilisant à nouveau l'invariance par translation, on trouve, pour $k \leq \ell$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mu\Big(\Big[\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n}\Big[\Big) = \sum_{j=k}^{\ell-1} \mu\Big(\Big[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\Big[\Big) = \alpha\frac{\ell - k}{n}. \tag{3.5}$$

En d'autres mots $\mu([a,b[) = \alpha(b-a)$ pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$. Cela implique facilement que $\mu([a,b]) = \alpha(b-a)$ pour tous $a < b$ réels. Enfin, l'unicité de la mesure de Lebesgue implique alors que $\mu = \alpha\lambda$. $\square$

Tout comme pour $\lambda$, on peut construire l'unique mesure $\lambda_d$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ avec la propriété que $\lambda_d([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ pour toute famille $\{a_i \leq b_i : i = 1, \ldots, d\}$. Cette mesure est la mesure de Lebesgue $d$-dimensionnelle. On va néanmoins attendre la construction des mesures produit générales pour en parler; $\lambda_d$ en étant un cas particulier.

**Exercice 64 (☠).**
Le but de cet exercice est de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ à l'aide du théorème d'extension de Caratheodory (3.3 dans le cours).

(a) Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par les intervalles. Il s'agit de l'ensemble des unions finies disjointes d'intervalles.

(b) Pour $a \leq b$ posons

$$\rho((a,b)) = \rho([a,b)) = \rho((a,b]) = \rho([a,b]) = b - a.$$

(c) Montrer que, si $I$ est un intervalle et et $I_1, I_2, \dots \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles deux à deux disjoints, tels que
$$I = \bigsqcup_{n\geq 1} I_n,$$
alors $\rho(I) \geq \sum_{n\geq 1} \rho(I_n)$.
*Indication:* Commencer par montrer que $\rho(I) \geq \sum_{n=1}^{N} \rho(I_n)$ pour tout $N \geq 1$.

(d) Avec les mêmes notations qu'au point précédent, montrer que $\rho(I) \leq \sum_{n\geq 1} \rho(I_n)$.
*Indication:* Commencer par montrer que si $J$ est un intervalle fermé et $J_1, J_2 \dots$ sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ avec $J \subset \bigcup_{n\geq 1} J_n$, alors $\rho(I) \leq \sum_{n\geq 1} \rho(I_n)$.

(e) Conclure que pour $A = \bigsqcup_{n\geq 1} I_n \in \mathcal{A}$, la définition de $\rho(A) := \sum_n \rho(I_n)$ est bien posée. De plus, $\rho$ est $\sigma$-additive sur $\mathcal{A}$.

(f) Conclure en utilisant le théorème d'extension de Caratheodory.

**Exercice 65.**
Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ invariant par toute translation rationnelle (c.-à-d. $A = A + q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$). Montrer que $A$ ou $A^c$ est $\lambda$-négligeable.

### 3.2.2 Les ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue

**Lemme 3.10.** *Soit $\lambda$ la mesure extérieure définie dans la preuve du Théorème 3.8. Alors $\mathcal{M}(\lambda) = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, où la complétion est par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$.*

**Preuve:** Vu que $\mathcal{M}(\lambda)$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et est une tribu complétée, il est évident que $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \subset \mathcal{M}(\lambda)$.

Montrons l'inverse. Soit $A \in \mathcal{M}(\lambda)$ et supposons pour commencer que $\lambda(A) = 0$. Alors, par la définition de $\lambda$, il existe une suite décroissante d'ouverts $U_n \subset \mathbb{R}$ avec $A \subset U_n$ pour tout $n$ et
$$\lim_{n\to\infty} \lambda(U_n) = \lambda(A) = 0.$$
Posons $V = \bigcap_n U_n$. Alors $V \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A \subset V$ et $\lambda(V) = 0$. Ainsi $A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

On considère maintenant $A \in \mathcal{M}(\lambda)$ de mesure finie. Comme avant, on peut construire une suite décroissante d'ouverts $U_n \subset \mathbb{R}$ avec $A \subset U_n$ pour tout $n$ et
$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(U_n).$$
Posons a nouveau $V = \bigcap_n U_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et observons que $\lambda(V \setminus A) = 0$. Ainsi $V \setminus A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ et donc $A = V \setminus (V \setminus A) \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

Enfin, si $A \in \mathcal{M}(\lambda)$ n'est pas de mesure finie, on considère $A_n = A \cap [-n, n]$ pour $n \in \mathbb{N}$. Chaque ensemble $A_n$ est de mesure finie, donc appartient à $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ par le point précédent. Il s'en suit que $A = \bigcup_n A_n \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$. □

### 3.2.3 Fonctions de répartition

**Proposition 3.11.** *Soit $\mu$ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors la fonction $F_\mu : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ définie par $F_\mu(t) = \mu((-\infty, t])$ est*

- *croissante,*
- *continue à droite et admettant des limites à gauche en tout point,*
- *telle que $F_\mu(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ et $F_\mu(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mu(\mathbb{R}) < \infty$.*

*Cette fonction est appelée la fonction de répartition de $\mu$.*

**Preuve:** Soit $x \leq y$. Alors $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$ et on déduit que $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F_\mu(y)$.

Le fait que $F_\mu$ admet des limites à droites et à gauche en tout point suit du fait qu'elle est croissante. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lim_{y\searrow x} F_\mu(y) &= \lim_{n\to\infty} F_\mu\big(x + \tfrac{1}{n}\big) = \lim_{n\to\infty} \mu\big((-\infty, x + \tfrac{1}{n}]\big) \\ &= \mu\Big(\bigcap\nolimits_{n\geq 1}\!\!\downarrow (-\infty, x + \tfrac{1}{n}]\Big) = \mu((-\infty, x]) = F_\mu(x). \end{aligned} \tag{3.6}$$

On a utilisé ici de manière importante que $\mu((-\infty, x+1]) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$ pour passer de la première ligne à la deuxième.

Enfin, on trouve

$$\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu\big((-\infty, -n]\big) = \mu\Big(\bigcap\nolimits_{n\geq 1}\!\!\downarrow (-\infty, -n]\Big) = \mu(\emptyset) = 0.$$

De plus

$$\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(n) = \lim_{n\to\infty} \mu\big((-\infty, n]\big) = \mu\Big(\bigcup\nolimits_{n\geq 1}\!\!\uparrow (-\infty, n]\Big) = \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

□

*Remarque* 3.12. Observons qu'on peut faire un calcul similaire a (3.6) pour déduire que

$$\lim_{y\nearrow x} F_\mu(y) = \mu\Big(\bigcup\nolimits_{n\geq 1}\!\!\uparrow (-\infty, x - \tfrac{1}{n}]\Big) = \mu((-\infty, x)).$$

Ainsi, les sauts de $F_\mu$ (c.-à-d. les points $x$ avec $\lim_{y\nearrow x} F_\mu(y) < F_\mu(x)$) correspondent à des atomes de $\mu$ avec

$$\mu(\{x\}) = F_\mu(x) - \lim_{y\nearrow x} F_\mu(y).$$

En particulier, si $F_\mu$ est continue, $\mu$ n'a pas d'atomes.

**Proposition 3.13.** *Soit $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ une fonction*

- *croissante,*
- *continue à droite et admettant des limites à gauche en tout point,*

- *avec* $\lim_{t\to-\infty} F_\mu(t) = 0$ *et* $\lim_{t\to\infty} F(t)$ *finie.*

*Alors il existe une unique mesure* $\mu$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *de fonction de répartition* $F$.

**Preuve: Unicité:** Supposons que $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec $F_\mu = F_\nu$. Alors,

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = \lim_{x\to\infty} F_\nu(x) = \nu(\mathbb{R}) < \infty.$$

De plus, pour tout $a < b$,

$$\mu((a,b]) = \mu((-\infty,b]) - \mu((-\infty,a]) = F_\mu(b) - F_\mu(a) = \nu((a,b]).$$

Par le lemme de classe monotone (plus précisément sa conséquence proposition 1.12) on conclut que $\mu = \nu$.

**Existence:** on donne deux façons de procéder dans les exercices 67 et 68. □

**Exercice 66.**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) < \infty$.

(a) Montrer que $F$ admet un nombre au plus dénombrable de sauts, c.-à-d. de points $x$ ou $\lim_{t\nearrow x} F(x) \neq \lim_{t\searrow x} F(x)$. Notons $S$ l'ensemble des sauts de $F$.

(b) Montrer qu'on peut modifier $F$ pour la rendre continue à droite, sans changer ses limites à gauche/droite, en posant $\tilde{F}(x) = \lim_{y\searrow x} F(y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Désormais on va considérer que $F$ est continue à droite.

(c) Soit $m(x) = F(x) - \lim_{y\nearrow x} F(y)$ le saut au point $x$. Posons $G(x) = \sum_{y\le x} m(y)$. Montrer que $G(x) \le F(x)$ pour tout $x$.

(d) Montrer que $F - G$ est une fonction continue croissante.

(e) Supposons que $\mu$ et $\tilde{\mu}$ sont des mesures de fonctions de répartition $F$ et $F - G$, respectivement. Notons

$$\mathrm{m} = \sum_{x\in S} m(x)\delta_x,$$

où $\delta_x$ est la mesure de Dirac en $x$. Montrer que $\mu = \tilde{\mu} + \mathrm{m}$.

**Exercice 67** (Construction de la mesure associée à une fonction de répartition I)**.**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à droite et admettant des limites à gauche en tout point, avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) < \infty$. Le but de cet exercice est de construire la mesure de fonction de répartition $F$ en passant par les mesures extérieures.

(a) Supposons que $F$ est continue. En utilisant la même stratégie que pour la mesure de Lebesgue, montrer l'existence d'une mesure $\mu$ de fonction de répartition $F$.
*Indication:* poser $\mu(A) = \inf\{\sum_{n\ge0} F(b_n) - F(a_n) : \ A \subset \bigcup_{n\ge0} ]a_n, b_n[\}$ et montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\mu(A) = \inf\{\sum_{n\ge0} F(b_n) - F(a_n) : \ A \subset \bigcup_{n\ge0} ]a_n, b_n[ \text{ et } b_n - a_n < \epsilon \ \forall n\}$.

(b) Pour $F$ pas nécessairement continue, considerer la décomposition $F = \tilde{F} + G$, ou $\tilde{F}$ est continue et $G$ corresponde uniquement au sauts de $F$. Observer qu'il existe des mesures $\tilde{\mu}$ et m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ de fonctions de répartition $\tilde{F}$ et $G$, respectivement.

(c) Conclure qu'il existe une mesure de fonction de répartition $F$.

**Exercice 68** (Construction de la mesure associée à une fonction de répartition II)**.**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à droite et admettant des limites à gauche en tout point, avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) < \infty$. Le but de cet exercice est de construire la mesure de fonction de répartition $F$ à partir de la mesure de Lebesgue $\lambda$.

(a) Montrer qu'il existe au plus un nombre dénombrable de $x \in \mathbb{R}$ avec $|F^{-1}(\{x\})| > 1$.

(b) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, posons $F(A) = \{F(x) : x \in A\}$. Montrer que $F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
*Indication:* considerer $\mathcal{C} := \{A \subset \mathbb{R} : F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$; utiliser le point (a).

(c) Supposons que $F$ est continue. Montrer que $\mu(A) = \lambda(F(A))$ définit une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que sa fonction de répartition est $F$.

(d) Si $F$ est une fonction quelconque avec les propriétés de l'énoncé (mais pas forcement continue), poser $\overline{F(A)} = \bigcup_{x\in A}[\lim_{t\nearrow x} F(t), F(x)]$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\overline{F(A)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et que $\mu(A) = \lambda(\overline{F(A)})$ définit une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que sa fonction de répartition est $F$.

(e) Que obtient-t-on si on pose $\nu(A) = \lambda(F(A))$ quand $F$ est une fonction de répartition avec des discontinués?

**Exercice 69.**
Soit $\mu$ une mesure finie de fonction de répartition $F_\mu$. Supposons que $F_\mu \in \mathcal{C}^1$. Montrer que $\mu$ admet la densité $F'_\mu$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$.

**Exercice 70.**
L'ensemble de Cantor $C_\infty \subset [0, 1]$ est défini comme suit. Soit $C_0 = [0, 1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\big)$. Enfin, on pose $C_\infty = \bigcap_{n\geq 0} C_n$.

(a) Calculer $\lambda(C_n)$ et déduire que $\lambda(C_\infty) = 0$.

(b) Soit $F_n$ la fonction de répartition de $\big(\frac{3}{2}\big)^n \lambda(.\cap C_n)$ où $\lambda(.\cap C_n)$ est la mesure de Lebesgue restreinte à $C_n$ (c.-à-d. la mesure donnée par $A \mapsto \lambda(A \cap C_n)$). Dessiner sur un même graph, $F_0, F_1, \ldots$.

(c) Montrer que $(F_n)_{n\geq 0}$ converge quand $n \to \infty$ vers une fonction croissante $F$ (est-ce que la convergence est simple/en norme infinie $\|.\|_\infty$ ?)

(d) Montrer que $F$ est croissante et continue.

(e) Soit $\mu$ la mesure de fonction de répartition $F$. Montrer que $\mu(C_\infty) = [0, 1] = 1$ mais que $\mu$ n'as pas d'atomes (c.-à-d. que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$) .

(f) Est-ce qu'il existe une fonction $f$ mesurable positive telle que $\mu = f d\lambda$ ?

La mesure $\mu$ est concentrée sur un ensemble de mesure de Lebesgue 0, mais n'a pas d'atomes. Cet exemple nous montre qu'une mesure ne se décompose pas uniquement dans une partie absolument continue et une partie atomique.

**Exercice 71.**
Soit $\mu$ une mesure infinie sur $\mathbb{R}$, telle que $\mu([a,b]) < \infty$ pour tout $a < b$.

(a) Construire une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad \text{pour tout } a < b.$$

(b) Est-ce que $F$ est unique ? Et si on impose que $F(0) = 0$ ?

(c) Quelles des propriétés des fonctions de répartition s'appliquent aussi à $F$ ?

(d) Si on se donne $F$ avec les propriétés du point précédent, peut-on déduire l'existence/l'unicité d'une mesure $\mu$ avec $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ pour tout $a < b$ ?

### 3.2.4 Exemple d'ensemble non-mesurable

On peut se demander si par hasard $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ ne sont pas égales à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ce serait une grande simplification de ne pas devoir vérifier si les ensembles qu'on veut mesurer sont en effet mesurables.

Malheureusement ce fait est au mieux indécidable. En effet, si on accepte l'axiome du choix (la version indénombrable), alors on peut construire un ensemble $E \in \mathbb{R}$ qui n'est pas $\lambda$-mesurable. Par contre, sans l'axiome du choix, l'existence d'un tel ensemble ne peut pas se montrer.

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Par l'axiome du choix, il existe un ensemble $E \subset [0,1]$ de représentants de chaque classe d'équivalence de $\sim$. Soit $E$ un tel ensemble. Alors

- si $x, y \in E$ sont tels que $x \sim y$, alors $x = y$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $y \in E$ tel que $x \sim y$.

**Lemme 3.14.** $E \notin \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

**Preuve:** Supposons par l'absurde que $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par la première propriété de $E$, pour $a, b \in \mathbb{Q}$ distinctes $(a+E) \cap (b+E) = \emptyset$. Ainsi

$$\bigsqcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} a + E \subset [0,2].$$

On conclut que $\lambda(\bigsqcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} a + E) = \sum_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \lambda(a+E) = \sum_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \lambda(E) \leq 2$. Cela n'est possible que si $\lambda(E) = 0$.

Enfin on observe que, par la seconde propriété de $E$,

$$\bigsqcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} a + E \supset [0,1].$$

Ce qui est contradictoire car $\lambda(\bigsqcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} a + E) = \sum_{a \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(a+E) = 0$. $\square$

**Exercice 72.**
Soit $E \subset [0,1]$ avec $E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et soit $F$ la fonction de répartition de la mesure de Cantor, définie dans l'exercice 70. Montrer que $\{x \in \mathcal{C}_\infty : F(x) \in E\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue mais n'appartient pas à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Conclure que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

### 3.2.5 Lien avec l'intégrale de Riemann

**Proposition 3.15.** *Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable est mesurable et son intégrale au sens de Riemann est égale à son intégrale au sens de Lebesgue contre la mesure de Lebesgue $\lambda$.*

**Preuve:** Pour simplicité, on va se limiter aux fonctions à valeurs positives. Observons que la proposition est évidente quand $f$ est une fonction en escalier.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction Riemann-intégrable. Écrivons dans cette preuve $\mathcal{R}(f)$ pour l'intégrale de Riemann de $f$, pour la distinguer de l'intégrale de Lebesgue qu'on note $\int f d\lambda$ (si $f$ est mesurable).

Supposons pour commencer que $f$ est à support compact. Il existe alors des fonctions $(g_n, h_n; n \geq 1)$ étagées telles que $0 \leq g_n \leq f \leq h_n$ pour tout $n$ et $\mathcal{R}(h_n - g_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Quitte à poser $\tilde{g}_n = \max\{g_1, \ldots, g_n\}$ et $\tilde{h}_n = \min\{h_1, \ldots, h_n\}$, on peut supposer que les suites de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ et $(h_n)_{n\geq 1}$ sont croissantes et décroissantes, respectivement. De plus, vu que ce sont des fonctions en escalier, elles sont mesurables et leurs intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident.

Notons $\ell(x) = \lim\downarrow_{n\to\infty} h_n(x) - g_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors $\ell$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$, car c'est la limite simple de fonctions mesurables. De plus, par le lemme de Fatou

$$\int \ell \, d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int (h_n - g_n) \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(h_n - g_n) = 0.$$

Vu que $\ell$ est une fonction positive, on conclut que $\ell = 0$ $\lambda$-presque partout.

Ainsi $g_n \to f$ quand $n \to \infty$, $\lambda$-presque partout, donc $f$ est mesurable. De plus, comme la convergence est croissante, le théorème de convergence monotone implique

$$\int f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(g_n) = \mathcal{R}(f).$$

Enfin, passons au cas où $f$ n'est pas à support compact. Posons $f_M = f\mathbf{1}_{[-M,M]}$ pour $M \in \mathbb{N}$. Alors $f_M$ est Riemann-intégrable et à support compact; on peut appliquer le point précèdent pour conclure que $f_M$ est mesurable. De plus $f_M$ converge $\lambda$-presque partout vers $f$ (en croissant, quand $M \to \infty$), donc $f$ est mesurable et

$$\mathcal{R}(f) = \lim_{M\to\infty} \mathcal{R}(f_M) = \lim_{M\to\infty} \int f_M \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

□

**Exercice 73.**
Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. Montrer que $f$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est Lebesgue-négligeable.

## 3.3 Mesures produits

### 3.3.1 Construction

**Théorème 3.16.** *Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés avec $\mu$ et $\nu$ étant $\sigma$-finies. Alors il existe une unique mesure notée $\mu \otimes \nu$ sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$ [1],*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

*La mesure $\mu \otimes \nu$ est aussi $\sigma$-finie.*

**Preuve:** **Existence:** On utilisera les mesures extérieures, plus précisément le second point du Théorème 3.3.

Posons $\mathcal{A} = \{A \times B : \ A \in \mathcal{E} \text{ et } B \in \mathcal{F}\}$ et $\tilde{\mathcal{A}} = \{\bigsqcup_{k=1}^n C_n : C_1, \dots, C_n \in \mathcal{A}\}$. On voit directement que $\tilde{\mathcal{A}}$ est une algèbre. Pour $\bigsqcup_{k=1}^n A_k \times B_k \in \tilde{\mathcal{A}}$ (avec $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ et $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$), posons[2]

$$\rho\Big(\bigsqcup_{k=1}^n A_k \times B_k\Big) := \sum_{k=1}^n \mu(A_k)\nu(B_k).$$

Alors $\rho$ satisfait $\rho(\emptyset) = 0$ et est additive et monotone. Si on montre de plus que $\rho$ est $\sigma$-additive sur $\tilde{\mathcal{A}}$, on peut appliquer le Théorème 3.3 pour conclure que $\rho$ se prolonge en une mesure sur $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$.

Soient $A, A_1, \dots \in \mathcal{E}$ et $B, B_1, \dots \in \mathcal{F}$ tels que

$$A \times B = \bigsqcup_{n \geq 1} A_n \times B_n.$$

Montrons alors que

$$\rho(A \times B) = \sum_{n \geq 1} \rho(A_n \times B_n). \tag{3.7}$$

Cette condition implique directement la $\sigma$-additive sur $\tilde{\mathcal{A}}$, on en laisse la vérification au lecteur.

Posons $f_n : E \to [0, +\infty)$ définie par $f_n = \nu(B_n)\mathbf{1}_{A_n}$. Alors $\rho(A_n \times B_n) = \int_E f_n d\mu$. De plus, vu que les ensembles $A_1 \times B_1, \dots, A_N \times B_N$ sont deux à deux disjoints, pour tout

[1] Dans cette formule, comme dans toute cette partie, on utilise la convention $0 \cdot \infty = 0$.

[2] Pour que la définition suivante soit bien fondée, il faut s'assurer que si $\bigsqcup_{k=1}^n A_k \times B_k$ s'écrit de deux manières différentes, alors on obtient la même valeur pour $\rho$. Cela se montre facilement en utilisant (3.7).

$x \in B$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n)\mathbf{1}_{A_n}(x) = \nu\Big(\bigcup_{n:\ x\in A_n} B_n\Big) = \nu(B).$$

Par le théorème de convergence monotone

$$\sum_{n=1}^{N} \rho(A_n \times B_n) = \int \sum_{n=1}^{N} \nu(B_n)\mathbf{1}_{A_n} d\mu \xrightarrow[N\to\infty]{} \int \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n)\mathbf{1}_{A} d\mu = \rho(A \times B).$$

Cela montre l'égalité désirée, donc que $\rho$ est $\sigma$-additive sur $\tilde{\mathcal{A}}$.

Ainsi, par le Théorème 3.3 (second point), la mesure extérieure $\pi$ définie à partir de $\rho$ induit une mesure sur $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ et satisfait

$$\pi(C) = \rho(C) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{pour tout } C = A \times B \in \mathcal{A}.$$

Ainsi, la restriction de $\pi$ à $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ satisfait les propriétés de la mesure produit.

**Unicité:** On peut supposer dans un premier temps que $\mu$ et $\nu$ sont finies. Alors l'ensemble $\mathcal{M} = \{A \times B :\ A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F}\}$ est une classe monotone de $E \times F$ qui engendre $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$. L'unicité de $\mu \otimes \nu$ suit du lemme de classe monotone (plus précisément de sa conséquence proposition 1.12).

Si $\mu$ et $\nu$ sont infinies, on peut se ramener au cas précédent grâce à la $\sigma$-finitude. □

**Lemme 3.17.** *Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$, $(F, \mathcal{F}, \nu)$, $(G, \mathcal{G}, \pi)$ trois espaces mesurés $\sigma$-finis. Alors*

$$\mu \otimes (\nu \otimes \pi) = (\mu \otimes \nu) \otimes \pi.$$

**Preuve:** Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{F}$ et $C \in \mathcal{G}$,

$$[\mu \otimes (\nu \otimes \pi)](A \times B \times C) = \mu(A)\nu(B)\pi(C) = [(\mu \otimes \nu) \otimes \pi](A \times B \times C).$$

De plus l'ensemble $\mathcal{M} = \{A \times B \times C :\ A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F},\ C \in \mathcal{G}\}$ est stable par intersections finies. Par la proposition 1.12 et la $\sigma$-finitude de $\mu, \nu$ et $\pi$, on déduit que $\mu \otimes (\nu \otimes \pi) = (\mu \otimes \nu) \otimes \pi$. □

### 3.3.2 Intégration des mesures produits

Le but de cette partie est le théorème de Fubini. Ce théorème affirme essentiellement que l'intégrale sur un espace produit peut se faire coordonnée par coordonnée. On va en voir deux versions, une pour les fonctions positives (sans conditions supplémentaires) et une pour les fonctions quelconques (avec l'hypothèse supplémentaire d'intégrabilité).

On commence par un lemme qui représente le théorème de Fubini pour les fonctions indicatrices.

**Lemme 3.18.** *Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés $\sigma$-finis et $C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$. Alors,*

(i) *pour tout* $x \in E$ *et* $y \in F$

$$C_x = \{y \in F : (x,y) \in C\} \in \mathcal{F}; \quad C'_y = \{x \in E : (x,y) \in C\} \in \mathcal{E};$$

(ii) *les fonctions* $x \mapsto \nu(C_x)$ *et* $y \mapsto \mu(C'_y)$ *sont mesurables;*

(iii) $\mu \otimes \nu(C) = \int \nu(C_x) d\mu(x) = \int \mu(C'_y) d\nu(y)$.

**Preuve:** (i) Soit $x \in E$. Posons $\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} : C_x \in \mathcal{F}\}$. On montre facilement que $\mathcal{C}$ est une tribu et qu'elle contient $\{A \times B : A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\}$.

(ii) Montrons que la fonction $\phi_C = x \mapsto \nu(C_x)$ est mesurable pour tout $C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ (la preuve pour $y \mapsto \mu(C'_y)$ est identique). On commence par $\nu$ finie. Posons

$$\mathcal{G} = \{C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} : \phi_C = x \mapsto \nu(C_x) \text{ est mesurable}\}.$$

Montrons que $\mathcal{G}$ est une classe monotone qui contient $\{A \times B : A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\}$.

Dans un premier temps, on observe que, pour $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$ on a $\phi_{A\times B} = \mathbf{1}_{x\in A}\nu(B)$. Ainsi $\phi_{A\times B}$ est mesurable, donc $A \times B \in \mathcal{G}$.

En particulier, $E \times F \in \mathcal{G}$. De plus, si $C, C' \in \mathcal{G}$ avec $C \subset C'$, alors $\phi_{C'\setminus C}(x) = \nu(C'_x \setminus C_x) = \nu(C'_x) - \nu(C_x) = \phi_{C'}(x) - \phi_C(x)$, est une fonction mesurable de $x$ car c'est une différence de deux fonctions mesurables [3]. Ainsi $C' \setminus C \in \mathcal{G}$. Enfin, si $(C_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante avec $C = \bigcup_{n\geq 1} C_n$, alors $\phi_C = \lim_n \uparrow \phi_{C_n}$ est mesurable, donc $C \in \mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{G}$ est une classe monotone qui contient les pavés de $E \times F$.

Par le lemme de classe monotone, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\}) \subset \mathcal{G}$, donc $\mathcal{G} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$.

Passons au cas où $\nu$ n'est pas finie. Par $\sigma$-finitude, on peut écrire $F = \cup_n K_n$ avec $\nu(K_n) < \infty$. Alors $\phi_C = \lim \phi_{C\cap(E\times K_n)}$, qui sont mesurables, donc $\phi_C$ est aussi mesurable.

(iii) Définissons $\eta : \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \to [0,\infty]$ par $\eta(C) = \int \nu(C_x) d\mu(x)$ et montrons que $\eta$ est une mesure sur $E \times F$.

Soient $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ deux à deux disjoints. Alors, pour chaque $x \in E$, les ensembles $C^{(1)}_x, C^{(2)}_x, \dots$ sont aussi deux à deux disjoints et

$$\Big(\bigsqcup_{n\geq 1} C^{(n)}\Big)_x = \bigsqcup_{n\geq 1} C^{(n)}_x.$$

Ainsi, par le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \eta(C^{(n)}) &= \sum_{n\geq 1} \int \nu(C^{(n)}_x) d\mu(x) = \int \sum_{n\geq 1} \nu(C^{(n)}_x) d\mu(x) \\ &= \int \nu\Big[\big(\bigsqcup_{n\geq 1} C^{(n)}\big)_x\Big] d\mu(x) = \eta\Big(\bigsqcup_{n\geq 1} C^{(n)}\Big).\end{aligned}$$

Ainsi $\eta$ est une mesure. De plus, on voit directement que

$$\eta(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = (\mu \otimes \nu)(A \times B) \qquad \forall A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F}.$$

[3] On utilise ici le fait que $\nu(C_x) < \infty$.

Par l'unicité de la mesure produit, on obtient $\mu \otimes \nu = \eta$. $\square$

**Théorème 3.19** (Fubini pour fonctions positives)**.** *Soit $f : E \times F \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (pour la tribu $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$). Alors*

(i) *pour tout $x \in E$ la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est mesurable et pour tout $y \in F$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est mesurable;*

(ii) *les fonctions*

$$y \mapsto \int f(x,y)d\mu(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$$

*sont mesurables;*

(iii) *de plus*

$$\int f(z)d(\mu \otimes \nu)(z) = \int \left( \int f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left( \int f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

**Preuve:** Commençons par le cas où $f = \mathbf{1}_C$ pour $C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$. Alors, pour tout $x \in E$, $y \mapsto f(x,y)$ peut aussi s'écrire $y \mapsto \mathbf{1}_{y \in C_x}$. Par le lemme précèdent, cette fonction est mesurable. De plus, $\int f(x,y)d\nu(y) = \nu(\mathcal{C}_x)$, donc $y \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$ est aussi mesurable. Enfin

$$\begin{aligned}\int \mathbf{1}_{z \in C} d(\mu \otimes \nu)(z) = (\mu \otimes \nu)(C) &= \int \nu(C_x)d\mu(x) \\ &= \int (\mathbf{1}_{(x,y) \in C} d\nu(y))d\mu(x) = \int (\int f(x,y)d\nu(y))d\mu(x).\end{aligned}$$

Ainsi le théorème est vrai pour les fonctions indicatrices.

Par linéarité, il est aussi vrai pour les combinaisons linéaires de fonctions indicatrices (qu'on a appelées fonctions étagées).

Enfin, si $f$ est une fonction mesurable positive quelconque, on pose pour $n \geq 0$

$$f_n(z) = \sum_{k \geq 0} k2^{-n} \mathbf{1}_{f(x,y) \in [k2^{-n},(k+1)2^{-n}[} = \sum_{k \geq 0} k2^{-n} \mathbf{1}_{(x,y) \in f^{-1}([k2^{-n},(k+1)2^{-n}[)}.$$

Alors, par le point précédent le théorème est vrai pour chaque $f_n$. De plus $f_n(z) \nearrow f(z)$ pour tout $z \in E \times F$. Alors la mesurabilité se déduit par limites de fonctions mesurables. Par le théorème de convergence monotone, on a

$$\begin{aligned}\int f(z)d(\mu \otimes \nu)(z) &= \lim_n \int f_n(z)d(\mu \otimes \nu)(z) \\ &= \lim_n \int \left[ \int f_n(x,y)d\mu(x) \right] d\nu(y) \\ &= \int \left[ \lim_n \int f_n(x,y)d\mu(x) \right] d\nu(y) \\ &= \int \left[ \int f(x,y)d\mu(x) \right] d\nu(y).\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.20** (Fubini pour fonctions quelconques)**.** *Soit $f : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $\mu \otimes \nu$ intégrable. Alors*

(a) *les fonctions $x \mapsto f(x,y)$ (et $y \mapsto f(x,y)$) sont intégrables pour $\nu$-presque tout $y$ (et $\mu$-presque tout $x$ respectivement);*

(b) *les fonctions $y \mapsto \int f(x,y)d\mu(x)$ et $x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$ sont bien définies à un ensemble de mesure nulle près, et sont intégrables;*

(c) *on a*

$$\int f(z)d(\mu \otimes \nu)(z) = \int \left( \int f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left( \int f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

*Remarque* 3.21. Pour vérifier que $f$ est $\mu \otimes \nu$ intégrable, on peut appliquer le théorème précédent à $|f|$.
Il ne suffit pas que $y \mapsto \int f(x,y)d\mu(x)$ soit bien définie et intégrable. Par exemple, si on pose $f(x,y) = \frac{\text{sign}(xy)}{x^2}\mathbf{1}_{|y|\leq e^{|x|}}$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y)$ est intégrable pour $\lambda$ et $\int f(x,y)dx = 0$. et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,.)$ est intégrable pour $\lambda$ et $\int f(x,y)dy = 0$. Ainsi $\int(\int f(x,y)dx)dy = \int(\int f(x,y)dy)dx = 0$. Pourtant $f$ n'est pas intégrable sur $(\mathbb{R}^2, \lambda_2)$.

**Preuve:** Comme $f$ est intégrable, on a, par le théorème précédent,

$$\int |f(z)|d(\mu \otimes \nu)(z) = \int \Big( \int |f(x,y)|d\mu(x) \Big) d\nu(y) < \infty.$$

Ainsi, pour $\nu$-presque tout $y$, $\int |f(x,y)|d\mu(x) < \infty$, et on obtient le point $(i)$.

Notons $H = \{y \in \mathbb{R} : \int |f(x,y)|d\mu(x) = \infty\}$. Alors, pour $y \notin H$, $\int f(x,y)d\mu(x)$ est bien défini. On pose par convention $\int f(x,y)d\mu(x) = 0$ pour $y \in H$. Comme $H$ est négligeable, cette définition n'a pas d'influence sur l'intégralité et la valeur de l'intégrale de $y \mapsto \int f(x,y)d\mu(x)$.

Enfin, on a

$$\int \Big| \int f(x,y)d\mu(x) \Big| d\nu(y) \leq \int \int |f(x,y)|d\mu(x)d\nu(y) < \infty,$$

donc $y \mapsto \int f(x,y)d\mu(x)$ est bien $\nu$-intégrable. Ainsi on obtient $(ii)$.

Écrivons $f(z) = f_+(z) - f_-(z)$ avec $f_+ = \max(f,0)$ et $f_- = -\min(f,0)$. Alors $f_+$ et

$f_-$ sont des fonctions positives d'intégrale finie donc,

$$\begin{aligned}\int f_+(z)d(\mu\otimes\nu)(z) &= \int f_+(z)d(\mu\otimes\nu)(z) - \int f_+(z)d(\mu\otimes\nu)(z)\\ &= \int \big(\int f_+(x,y)d\mu(x)\big)d\nu(y) - \int \big(\int f_-(x,y)d\mu(x)\big)d\nu(y)\\ &= \int \big(\int f_+(x,y) - f_-(x,y)d\mu(x)\big)d\nu(y)\\ &= \int \big(\int f(x,y)d\mu(x)\big)d\nu(y).\end{aligned}$$

□

### 3.3.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

**Définition 3.22.** *Soit $d \geq 1$. On définit sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ la mesure*

$$\lambda_d = \underbrace{\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda}_{d \text{ fois}},$$

*où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On appelle $\lambda_d$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

*Remarque* 3.23. En pratique, on va toujours considérer la mesure de Lebesgue sur la tribu complétée $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$.

**Proposition 3.24.**

(i) *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda_d(\alpha A) = |\alpha|^d \lambda_d(A)$.*

(ii) *$\lambda_d$ est invariante par les isométries de $\mathbb{R}^d$.*

(iii) *Les seules mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ finies sur les compacts et invariantes par translations sont les multiples de $\lambda_d$.*

**Preuve:**

(i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (pour $\alpha = 0$ le résultat est trivial). Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ posons $\mu(A) = |\alpha|^d \lambda_d(\frac{1}{\alpha}A)$. Alors $\mu$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et pour $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = |\alpha|^d \lambda(\tfrac{1}{\alpha}A_1)\ldots\lambda(\tfrac{1}{\alpha}A_d) = \lambda(A_1)\ldots\lambda(A_n) = \lambda_d(A_1 \times \cdots \times A_n).$$

Par unicité de la mesure produit $\mu = \lambda_d$, ce qui donne le résultat.

(iii) Soit $\mu$ une mesure invariante par translations. Alors, on montre facilement que

$$\mu\Big(\big[0, \tfrac{1}{n}\big]^d\Big) = \frac{1}{n^d} \cdot \mu\big([0,1]^d\big).$$

Ainsi, pour tout $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Q}_+$,

$$\mu([0, a_1] \times \cdots \times [0, a_d]) = a_1 \dots a_d \cdot \mu([0, 1]^d).$$

Le résultat s'étend à $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}_+$ en prenant des limites croissantes.

Ainsi, si $\mu([0, 1]^d) = \infty$, alors $\mu(A) = \infty$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ d'intérieur non-vide. Cela est incompatible avec le fait que $\mu$ est $\sigma$-finie. Ainsi, pour tout $a_i \leq b_i$, on a

$$\mu([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = C(b_1 - a_1) \dots (b_d - a_d) = C\lambda_d([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d])$$

pour une certaine constante $C > 0$.

On observe enfin que $\{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \,:\, a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}\}$ est une famille stable par intersections finies qui engendre la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Le lemme de classe monotone montre que $\mu = C\lambda_d$.

(ii) L'invariance par translation de $\lambda_d$ est une conséquence évidente de l'invariance par translation de $\lambda$. Soit $\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une isométrie avec $\tau(0) = 0$.

Alors la mesure image de $\lambda_d$ par $\tau$, donnée par

$$\tau(\lambda_d)(A) = \lambda_d(\tau^{-1}(A)),$$

est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ qui est invariante par translation.

De plus, comme $\tau(\mathcal{B}(0, 1)) = \mathcal{B}(0, 1)$, $\tau(\lambda_d)(B(0, 1)) = \lambda_d(B(0, 1))$. Par le point $(iv)$, $\tau(\lambda_d) = \lambda_d$.

□

**Volume de la sphère** Soit $\mathbb{B}_d = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\}$. On aimerai calculer $\lambda_d(\mathbb{B}_d)$ où $\lambda_d$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

Calculons par récurrence $v_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d)$. Pour $n \geq 2$ on a, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} v_d &= \int \cdots \int \mathbf{1}_{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{B}_d} dx_1 \dots dx_d \\ &= \int \lambda_{d-1}(\{(x_1, \dots x_{d-1}) : x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2 \leq 1 - x_d^2\}) dx_d \\ &= v_{d-1} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Une intégration par partie montre

$$\begin{aligned} I_{d-1} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx &= [x(1 - x^2)^{\frac{d-1}{2}}]_{-1}^{1} + \frac{d-1}{2} \int_{-1}^{1} 2x^2 (1 - x^2)^{\frac{d-3}{2}} dx \\ &= (d-1) \int_{-1}^{1} x^2 (1 - x^2)^{\frac{d-3}{2}} dx \\ &= (d-1)(I_{d-3} - I_{d-1}) \end{aligned}$$

Ainsi $I_{d-1} = \frac{d-1}{d} I_{d-3}$. De plus, on peut calculer directement $I_0 = 2$ et $I_1 = \pi/2$. En

appliquant la formule au-dessus, on trouve $I_2 = \frac{2}{3}I_0 = \frac{4}{3}$. Ainsi on trouve

$$I_{d-1}I_{d-2} = \frac{d-2}{d}I_{d-3}I_{d-4} = \cdots = \frac{2\pi}{d}, \qquad \text{donc} \qquad v_d = I_{d-1}v_{d-1} = I_{d-1}I_{d-2}v_{d-2} = \frac{2\pi}{d}v_{d-2}.$$

En gardant en tête que $v_1 = 2$ et $v_2 = \pi$ (le second se calcule explicitement), on trouve

$$v_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_{2k+1} = \frac{\pi^k}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\dots\frac{1}{2}}.$$

### 3.3.4 Changement de variable

Soient $U, V \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts et $\phi : U \to V$ une bijection avec $\phi$ et $\phi^{-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $u \in U$ la différentielle $d\phi(u) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est inversible.

**Théorème 3.25** (Changement de variable)**.** *Pour tout $f : V \to \mathbb{R}_+$ (ou $f : V \to \mathbb{R}$ qui est $\lambda_d$-intégrable), on a*

$$\int_V f(v)dv = \int_U f(\phi(u))|J_\phi(u)|du,$$

*où $J_\phi(u) = \det(d\phi(u))$ est la Jacobienne de $\phi$ en $u$.*

On commence par un lemme.

**Lemme 3.26.** *Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\lambda_d(MA) = |\det(M)|\lambda_d(A). \tag{3.8}$$

**Preuve:** Si $M$ n'est pas inversible, alors $MA$ est contenue dans $\mathrm{Im}(M)$ qui est un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Comme $\lambda_d$ est invariante par rotations,

$$\lambda_d(MA) \leq \lambda_d(\mathrm{Im}(M)) \leq \lambda_d(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = 0.$$

De plus, $\det(M) = 0$, donc la relation est vraie (on prend la convention $0 \cdot \infty = 0$).

Si $M$ est inversible, on utilise le pivot de Gauss pour écrire $M = P_1 \cdot \cdots \cdot P_n$ où $P_1, \dots, P_n$ sont des matrices dont l'effet est de multiplier une coordonnée par un scalaire $\alpha \neq 0$, rajouter une coordonnée à une autre ou inverser deux coordonnées. Comme $\det(M) = \prod_{i=1}^n \det(P_i)$ et que la transformation linéaire $M$ est la composition des transformations $P_n, \dots, P_1$, il suffit de montrer (3.8) les matrices $P_1, \dots, P_n$. Cela se fait directement pour chaque type de matrice en commençant par $A$ qui est une pavé et en utilisant le théorème de Fubini. □

**Preuve du Théorème 3.25:** Commençons par $f = \mathbf{1}_A$ pour un certain borélien $A$ de $V$. Si on pose $B = \phi^{-1}(A) \subset U$, on veut montrer

$$\lambda(\phi(B)) = \int_B |J_\phi(u)|du$$

Soit $K \subset U$ un compact. On va montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que pour tout $C \subset K$ un cube de taille plus petite que $\delta$,

$$\left|\lambda(\phi(C)) - \int_C |J_\phi(u)|du\right| \leq \epsilon\lambda(\phi(C)). \tag{3.9}$$

Fixons $\epsilon > 0$. Pour chaque $x \in K$, on a

$$|\phi(x) - \phi(y) - d\phi(x) \cdot (y - x)| \leq \epsilon|x - y|,$$

pour tout $y$ dans un voisinage de $x$. Par compacité de $K$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\phi(x) - \phi(y) - d\phi(x) \cdot (y - x)| \leq \epsilon|x - y|, \quad \forall x, y \in K, |x - y| \leq \delta.$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $R \geq 0$, posons $C(x, R) = [x_1 - R, x_1 + R[\times[x_d - R, x_d + R[$. Alors on vient de montrer que pour $x \in K$ avec $C(x, \delta) \subset K$ on a

$$\phi(x) + (1 - \epsilon)d\phi(x) \cdot C(0, \delta) \subset \phi(C(x, \delta)) \subset \phi(x) + (1 + \epsilon)d\phi(x) \cdot C(0, \delta).$$

Mais on a vu l'effet d'une transformation matricielle sur la mesure de Lebesgue. Ainsi

$$\left|\lambda_d\big[\phi(C(x, \delta))\big] - |J_\phi(u)|\lambda_d(C(0, \delta))\right| \leq \epsilon|J_\phi(u)|\lambda_d(C(0, x)).$$

Quitte à diminuer $\delta$, on peut supposer (par uniforme continuité de $d\phi$ sur $K$) que

$$|J_\phi(u) - J_\phi(x)| \leq \epsilon \sup_{y \in K} |J_\phi(y)|.$$

A retenir aussi que $\lambda_d(C(0, \delta)) = \int_C (u, \delta)dx$ Ainsi

$$\left|\lambda_d\big[\phi(C(x, \delta))\big] - \int_{C(u,\delta)} |J_\phi(u)|du\right| \leq 2\epsilon \sup_{y \in K} |J_\phi(y)|\lambda_d(C(0, \delta)).$$

Quitte à changer $\epsilon$ on obtient (3.9).

Soit $C = \times_i[a_i, a_i + \Delta[\subset K$ pour un certain $\Delta > 0$ et $\epsilon > 0$. Alors en écrivant

$$C = \bigsqcup_{j_1, \ldots j_d \in [0, n-1]} \bigtimes_i \big[a_i + \tfrac{j_i}{n}\Delta, a_i + \tfrac{j_i+1}{n}\Delta\big[,$$

pour un $n$ assez grand, on trouve

$$\left|\lambda_d\big(\phi(C)\big) - \int_C |J_\phi(u)|du\right| \leq \epsilon\lambda_d(C).$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, cela implique,

$$\lambda_d\big(\phi(C)\big) = \int_C |J_\phi(u)|du.$$

pour tout cube $C \subset K$.

Par $\sigma$-additivité, on étend l'égalité à tout pavé $C$ de la forme $\times_i[a_i, b_i[\subset K$ avec $a_i \leq b_i$. Enfin, par le lemme des classe monotone, on déduit que

$$\lambda_d\big(\phi(B)\big) = \int_B |J_\phi(u)|du$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$. Enfin, il existe une suite croissante de compacts $K_n \subset U$ avec $\cup_n K_n = U$. Alors, pour $B \in \mathcal{B}(U)$, on a $B = \cup K_n \cap B$ et $\phi(B) = \cup_n \phi(K_n \cap B)$ (les deux unions étant croissantes). Par le théorème de convergence monotone,

$$\lambda_d\big(\phi(B)\big) = \lim_n \lambda_d\big(\phi(B \cap K_n)\big) = \lim_n \int_{B\cap K_n} |J_\phi(u)|du = \int_B |J_\phi(u)|du.$$

□

## 3.4 Mesures et topologie

Très souvent on muni des espaces avec une structure topologique d'une mesure. Alors, la structure mesurable est généralement reliée à celle topologique, comme par exemple par le fait que la tribu considérée est la tribu borélienne. Dans cette partie, on étudie ces liens plus en détail.

Un espace topologique $E$ avec une topologie de Hausdorff (T2) est dit *localement compact* si pour tout $x \in E$ il existe un ouvert $U \subset E$ et un compact $K \subset E$ tels que $x \in U \subset K$. De plus $E$ est dit *$\sigma$-compact* s'il existe une suite croissante de compacts $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset E$ avec

$$E = \bigcup_{n\geq 1} K_n.$$

Pour simplifier le cadre, on va se limiter en grande partie aux espaces métriques propres. Il s'agit des espaces métriques $(E, d)$ tels que, pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $\overline{B}(x, r) := \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ est compact.

Quand on travaille sur un espace topologique $E$, on utilise par défaut la tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$. Une mesure sur $(E, \mathcal{B}(E))$ est appelée mesure borélienne.

### 3.4.1 Régularité des mesures boréliennes

**Définition 3.27.** *Soient $E$ un espace topologique. Une mesure $\mu$ sur $(E, \mathcal{B}(E))$ est dite*

régulière *si pour tout* $A \subset \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \textit{ compact}\} \\ &= \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \textit{ ouvert}\} \qquad \forall A \in \mathcal{B}(E). \end{aligned} \tag{3.10}$$

*La première égalité est définie la propriété de régularité interne; la seconde celle de régularité externe.*

Ainsi, une mesure $\mu$ est régulière si on peut approximer tout ensemble par des ouverts ou des compacts, au sens de $\mu$. Dans le supremum on prend $K$ compact car généralement, quand on parle de mesure régulière, on demande à ce que la mesure de tout compact soit finie.

**Théorème 3.28** (Régularité sur les espaces métriques propres)**.** *Soit* $(E, d)$ *un espace métrique propre muni d'une mesure borélienne* $\mu$ *finie sur les compacts. Alors* $\mu$ *est régulière.*

**Preuve:** 1. On peut commencer par supposer que $E$ est compact et que $\mu$ est finie. On pose

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}(E) : A \text{ peut être approximé par des ouverts \& compacts comme dans (3.10)}\}.$$

Montrons que $\mathcal{C}$ est une classe monotone qui contient tous les ouverts. On voit facilement que $E \in \mathcal{C}$.

Soient $A, B \in \mathcal{C}$, avec $A \subset B$. Montrons la première égalité de (3.10) pour $B \setminus A$. Fixons $\epsilon > 0$ et soient $U$ un ouvert et $F$ un compact avec $A \subset U$ et $F \subset B$ et tels que $\mu(U) \leq \mu(A) + \epsilon$ et $\mu(F) \geq \mu(B) - \epsilon$. Alors $F \setminus U$ est un fermé (donc compact), il est contenu dans $B \setminus A$ et est tel que

$$\mu(F \setminus U) = \mu(F) - \mu(U \cap F) \geq \mu(F) - \mu(U) \geq \mu(B) - \mu(A) - 2\epsilon = \mu(B \setminus A) - 2\epsilon.$$

Voir Figure 3.2 pour une illustration. Vu que $\epsilon > 0$ est arbitraire, on vient de montrer que

$$\mu(B \setminus A) = \sup\{\mu(K) : K \subset B \setminus A,\ K \text{ compact}\}.$$

Une procédure similaire montre que $\mu(B \setminus A) = \inf\{\mu(U) : B \setminus A \subset U,\ U \text{ ouvert}\}$.

En fin, montrons la stabilité de $\mathcal{C}$ par union croissante. Soient $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ dans $\mathcal{C}$ et posons $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Alors $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$. Soit $\epsilon > 0$ et $K_n \subset A_n \subset U_n$ des compacts, respectivement ouverts, tels que

$$\mu(K_n) + \epsilon \geq \mu(A_n) \geq \mu(U_n) - 2^{-n}\epsilon.$$

On peut trouver de tels ensembles car $\mu$ est une mesure finie. De plus, il existe $n$ tel que $\mu(A) - \mu(A_n) \leq \epsilon$, donc $\mu(A) - \mu(K_n) \leq 2\epsilon$, et $K_n \subset A_n \subset A$.

D'autre part, si on pose $U = \bigcup_{n\geq 1} U_n$, $U$ est un ouvert et $A \subset U$. De plus

$$\mu(U) = \mu\Big(A \cup \Big[\bigcup_{n\geq 1}(U_n \setminus A_n)\Big]\Big) \leq \mu(A) + \sum_n 2^{-n}\epsilon \leq \mu(A) + 2\epsilon.$$

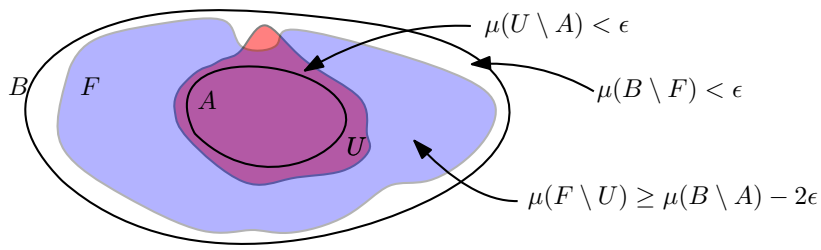



Figure 3.2: L'ouvert $U$ couvre $A$, mais a une mesure au plus $\mu(A)+\epsilon$. Le fermé $F$ est contenu dans $B$, mais sa mesure est au moins $\mu(B)-\epsilon$. Alors $F \setminus U$ est un fermé contenu dans $B \setminus A$ de masse au moins $\mu(B \setminus A) - 2\epsilon$.

Comme $\epsilon$ est arbitraire, $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ satisfait (3.10), donc $\mathcal{C}$ est une classe monotone.

Montrons que si $A$ est un ouvert, alors $A \in \mathcal{C}$. Le fait que $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ ouvert}\}$ est évident (il suffit de prendre $U = A$). Montrons qu'on peut trouver $F_n \subset A$ une suite de fermés (donc compacts car $E$ est compact) avec $\mu(F_n) \to \mu(A)$. On pose simplement $F_n = \{x \in U : d(x, A^c) \geq 1/n\}$. Alors $F_n$ est fermé et, vu que $A$ est ouvert, $A = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ (l'union étant croissante). Ce-ci implique que $\mu(F_n) \to \mu(A)$.

On conclut que $\mathcal{C}$ est une classe monotone qui contient les ouverts de $E$. L'ensemble des ouverts étant stable par intersections finies, le lemme de classe monotone (Thm. 1.10) implique que $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{C}$, donc que la mesure est régulière.

2. Passons au cas général. Soit $A \subset \mathcal{B}(E)$ et fixons un point $O \in E$.

Commençons par la régularité interne. En appliquant le point précédent à la restriction $\mu(. \cap \overline{B}(O,n))$ de $\mu$ au compact $\overline{B}(O,n)$, on déduit l'existence d'un compact $K_n$ avec $K_n \subset A \cap \overline{B}(O,n) \subset A$ et $\mu(K_n) \geq \mu(A \cap \overline{B}(O,n)) - 2^{-n}$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap \overline{B}(O,n)) = \mu(A)$.

Pour la régularité externe, on peut supposer que $\mu(A) < \infty$. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant le point précédent pour $\mu(. \cap \overline{B}(O,n))$, il existe des ouverts $U_n$ avec $A \cap \overline{B}(O,n) \subset U_n$ et $\mu[U_n \cap \overline{B}(O,n)] \leq \mu[A \cap \overline{B}(O,n)] + \epsilon 2^{-n}$. Posons $V_n = U_n \cap B(O,n)$, il s'agit d'un ouvert de $E$ avec $\mu(V_n \setminus A) \leq \epsilon 2^{-n}$.

En fin $\bigcup_{n\geq 1} V_n$ est un ouvert qui contient $A$ et on a

$$\mu(V) - \mu(A) = \mu(V \setminus A) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(V_n \setminus A) \leq \epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, la régularité externe est montrée. □

**Corollaire 3.29.** *Le mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est régulière.*

**Preuve:** Le Théorème 3.28 s'applique directement car $\mathbb{R}$ est un espace propre et $\lambda$ est finie sur les compacts. □

Deux autres résultats de ce type sont donnés plus bas. Ils **ne sont pas essentiels** pour ce cours.

### Autres résultats de régularité: probabilités dans les espaces polonais*

**Théorème 3.30** (Régularité des mesures finies sur les espaces Polonais)**.** *Soit $(E, d)$ un espace polonais muni d'une mesure borélienne finie $\mu$. Alors $\mu$ est régulière.*

Ce théorème est surtout utile en probabilités, quand $\mu(E) = 1$.

**Preuve:** Commençons par montrer la régularité interne pour l'ensemble $E$. Soit $\epsilon > 0$ on va construire un compact $K \subset E$ avec $\mu(K) \geq \mu(E) - \epsilon$. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $E$. Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, 1/n).$$

Ainsi il existe $I_n \geq 0$ tel que

$$\mu\Big(\bigcup_{i}^{I_n} B(x_i, 1/n)\Big) \geq \mu(E) - \epsilon.$$

Par le suite, on va considérer l'ensemble

$$F = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i=1}^{I_n} B(x_i, 1/n).$$

On observe que $F$ est précompact: Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in F$. Alors il existe une suite $i_1, i_2, \ldots$ et une extraction $\sigma$ telle que $y_{\sigma(k)} \in \bigcap_{1\leq j\leq k} B(x_{i_j}, 1/j)$ pour tout $k$. Cela implique que $y_{\sigma(k)}$ est de Cauchy, donc convergente.

On conclut que $K = \overline{F}$ est compact. De plus

$$\mu(K^c) \leq \mu(F^c) \leq \sum_n \mu\Big[\big(\bigcup_{i=1}^{I_n} B(x_i, 1/n)\big)^c\Big] \leq \epsilon \sum_{n\geq 1} 2^{-n} = \epsilon.$$

Maintenant montrons la régularité de $\mu$ pour tout ensemble. Soit $A \in \mathcal{B}(E)$ et $\epsilon > 0$. Fixons $K$ un compact tel que $\mu(E \setminus K) < \epsilon$. Par le Théorème 3.28, la mesure $\mu$ restreinte à $K$ est régulière. Il existe donc $F \subset A \cap K \subset U$ avec $F$ compact et $U$ ouvert tels que $\mu(F) + \epsilon \geq \mu(A \cap K) \geq \mu(U) - \epsilon$. Alors on a aussi $F \subset A \subset (U \cup K^c)$. De plus $U \cup K^c$ est ouvert et comme $\mu(K^c) < \epsilon$,

$$\mu(F) + 2\epsilon \geq \mu(A) \geq \mu(U \cup K^c) - 2\epsilon.$$

Vu que $\epsilon > 0$ est arbitraire, la régularité de $\mu$ est montrée. □

### Autres résultats de régularité: espaces localement compacts*

**Théorème 3.31** (Régularité sur les espaces localement compacts)**.** *Soit $E$ un espace topologique Hausdorff et localement compact dans lequel tout ouvert est $\sigma$-compact. Supposons que $\mu$ est une mesure borélienne sur $E$ telle que le mesure de tout compact soit finie. Alors $\mu$ est régulière.*

**Preuve:** Le preuve est très similaire à celle du Théorème 3.28. On commence par supposer que $E$ est compact (et par conséquent que $\mu(E) < \infty$). Alors

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}(E) : A \text{ peut être approximé par des ouverts \& compacts comme dans (3.10)}\},$$

est une classe monotone, comme pour les espaces propres.

De plus $\mathcal{C}$ contient les ouverts de $E$ car tout ouvert $U \subset E$ est $\sigma$-compact. Ainsi $\mathcal{B}(E) = \sigma(\{U : \text{ouvert de } E\}) \subset \mathcal{C}$, ce qui veut dire que (3.10) est satisfait pour tout borélien.

Pour passer au cas général on utilise la $\sigma$-compacité de $E$. □

**Exercice 74.**
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace topologique mesuré (avec $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{E}$). Montrer que pour tout $A \in \mathcal{E}$,

$$\inf\{\mu(K) : A \subset K,\ K \text{ fermé}\} = \mu(\overline{A}) \text{ et}$$
$$\sup\{\mu(U) : U \subset A,\ U \text{ ouvert}\} = \mu(\mathring{A}).$$

**Exercice 75.**
Le but de cet exercice est de montrer directement que les mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$ qui sont finies sur les compacts sont régulières.

(a) Montrer que tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts.

(b) Déduire que, par sa construction (Thm. 3.8), la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est extérieurement régulière.

(c) Si $A \in \mathcal{B}$ est contenu dans $(-M, M)$, montrer la régularité intérieure pour $A$ en utilisant celle extérieure pour $(-M, M) \setminus A$.

(d) Conclure que la mesure de Lebesgue est régulière.

(e) En utilisant la construction des mesures à partir de leur fonctions de répartitions, répliquer les points (a)-(d) pour montrer que toute mesure qui admet une fonction de répartition est régulière. Conclure que toutes les mesures finies sur les compacts sont régulières.

**Exercice 76.**
Soient $E$ un espace localement compact et $K \subset E$ un compact. Montrer qu'il existe un ouvert précompact $U$ avec $K \subset U$.

Si $E$ est métrique, montrer qu'on peut choisir $U = \{x \in E : \text{dist}(x, K) < \epsilon\}$ pour un $\epsilon > 0$ assez petit.

**Exercice 77.**
Le but de cet exercice est de s'habituer avec les différentes propriétés des espaces métriques. Ce qu'il faut retenir est qu'un espace métrique localement séparable est également complet et $\sigma$-compact. De plus, c'est essentiellement un espace propre (quitte à modifier la distance sans modifier la topologie).

(a) Montrer qu'un espace métrique localement compact est complet.

(b) Montrer qu'un espace métrique propre est localement compact, $\sigma$-compact, complet et séparable.

(c) Donner un exemple d'espace métrique qui est polonais (complet et separable) mais pas localement ou $\sigma$-compact.

(d) Donner un exemple d'espace métrique qui est localement compact mais pas $\sigma$-compact.

(e) Montrer qu'un espace métrique localement compact est $\sigma$-compact si et seulement si il est séparable.

(f) Soit $(E, d)$ un espace métrique localement compact qui est $\sigma$-compact. Montrer qu'il existe un distance $d'$ sur $E$ qui génère la même topologie que $d$ et telle que $(E, d')$ est propre.

(g) Donner un exemple d'espace métrique qui est localement est $\sigma$-compact mais pas propre (*Indication:* modifier la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$ pour que $B(0,1) = \mathbb{R}$ mais sans modifier la topologie).

**Exercice 78.**
Dans le Théorème 3.30, on ne peut pas espérer remplacer la mesure finie $\mu$ par une mesure $\sigma$-finie. Pour montrer cela, considérer l'exemple de $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ où la mesure $\mu$ est la mesure de comptage des rationnels:

$$\mu(A) = |A \cap \mathbb{Q}|, \qquad \forall A \in \mathcal{B}.$$

(a) Montrer que $\mu$ est $\sigma$-finie.

(b) Montrer que $\mu(U) = \infty$ pour tout ouvert non-vide $U$.

(c) Conclure que $\mu$ n'est pas régulière.

(d) Montrer toutefois que toute mesure borélienne $\sigma$-finie sur un espace polonais satisfait la régularité interne.

### 3.4.2 Théorème de représentation de Riesz

À travers l'intégrale, une mesure associe à une fonction (positive) $f$ une valeur dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on peut voir une mesure comme une forme linéaire sur un espace de fonctions. Il s'avère que le bon cadre est de considérer l'espace de fonctions continues à support compact. Notons cet espace

$$\mathcal{C}_c(E) = \big\{ f : E \to \mathbb{R} : \ f \text{ continue et } \exists K \text{ compact avec } f(x) = 0 \ \ \forall x \notin K \big\}.$$

Pour $f \in \mathcal{C}_c$ on définie par $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in E \ : \ f(x) \neq 0\}}$ le support compact de $f$.

Let résultat suivant permet d'approximer les indicatrices des compacts par des fonctions de $\mathcal{C}_c$. Pour simplifier notre tache, on travaillera ici avec $E$ un espace métrique propre; la tribu est toujours tribu borélienne.

**Théorème 3.32** (Lemme d'Urysohn)**.** *Soient $E$ un espace métrique propre et $K \subset E$ un compact. Alors*

(i) *pour tout ouvert $U$ avec $K \subset U$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(E)$ avec $0 \leq f \leq 1$, et*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin U; \end{cases}$$

(ii) *il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c(E)$ telles que*

$$\|f_n\|_\infty = 1, \forall n \quad \text{et} \quad f_n \searrow \mathbf{1}_K, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

**Preuve du Théorème 3.32:** Soit $K \subset E$ un compact. Montrons pour commencer qu'il existe un ouvert précompact $V$ contentant $K$. En effet, pour tout $x \in K$, comme $E$ est localement compact, il existe $\epsilon_x > 0$ tel que $B(x, \epsilon_x)$ est précompact. Alors $(B(x, \epsilon_x))_{x \in E}$ est un recouvrement de $E$ par des ouverts. On peut donc en extraire un recouvrement fini $B(x_1, \epsilon_{x_1}), \ldots, B(x_n, \epsilon_{x_n})$. Alors $V = \cup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon_{x_i})$ est un ouvert précompact (car c'est une union finie d'ouverts précompacts) qui contient $K$.

On commence par prouver (i). Soit $U \subset E$ un ouvert contenant $K$. Posons $\tilde{U} = U \cap V$, il s'agit d'un ouvert précompact contenant $K$ et contenu dans $U$. La fonction $x \mapsto \text{dist}(x, \tilde{U}^c)$ est continue (même 1-lipschitzienne). Ainsi elle atteint son minimum sur $K$, et celui-ci est strictement positif car $\tilde{U}$ est ouvert.

Il s'en suit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\text{dist}(x, \tilde{U}^c) \geq \delta$ pour tout $x \in K$; ce qu'on peut réécrire comme $\text{dist}(y, K) \geq \delta$ pour tout $y \in \tilde{U}^c$. Alors la fonction $f : E \to [0, 1]$ définie par $f(y) = \max\{1 - \delta^{-1}\text{dist}(y, K), 0\}$ satisfait les propriétés demandées. En effet elle est continue, vaut 1 sur $K$ et son support est $K + B(0, \delta) \subset \tilde{U} \subset U$.

Passons au point (ii). La construction des fonctions $f_n$ est similaire à celle de $f$. Il suffit de poser $f_n(y) = \max\{1 - \delta^{-n}\text{dist}(y, K), 0\}$ pour obtenir la famille demandée. □

Le lemme d'Urysohn est vrai même si $E$ n'est pas supposé métrique, mais uniquement topologique, Hausdorff et localement compact. La prevue générale de ce résultat se trouve dans [4, page 198] ou [2, Thm. 7.1.7].

**Théorème 3.33.** *Soit $E$ un espace métrique propre; posons $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Alors pour toute forme linéaire positive $\Lambda$ sur $\mathcal{C}_c(E)$, (c.-à-d. $\Lambda$ forme linéaire telle que si $f \in \mathcal{C}_c(E)$ est positive, alors $\Lambda(f) \geq 0$) il existe une unique mesure $\mu$, telle que*

$$\Lambda(f) = \int f(x)\, d\mu(x), \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(E). \tag{3.11}$$

*Inversement, si $\mu$ est une mesure finie sur les compacts, alors (3.11) définie une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(E)$.*

**Preuve:** Commençons par la **deuxième partie du théorème**. Soient $\mu$ une mesure finie sur les compacts. Alors, toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(E)$ est bornée (car $f$ est continue et définie

essentiellement sur un compact). Notons

$$M = \sup\{|f(x)| : x \in \mathrm{Supp}(f)\} = \sup\{|f(x)| : x \in E\}.$$

Alors

$$\int |f|\, d\mu \leq M \cdot \mu(\mathrm{Supp}(f)) < \infty.$$

Ainsi $f$ est intégrable et $\Lambda$ est bien définie. Le fait que $\Lambda$ est linéaire et positive est évident.

On passe à la **première partie du théorème**. Soit $\Lambda$ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(E)$. Montrons pour commencer **l'unicité de** $\mu$. Supposons que $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures, telles que

$$\Lambda(f) = \int f\, d\mu = \int f\, d\nu \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(E).$$

Par le Théorème 3.32 et le théorème de convergence dominée, on déduit que $\mu(K) = \nu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset E$. De plus, comme $\mu$ et $\nu$ sont régulières (toute mesure sur $E$ finie sur les compacts est régulière),

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\, K \text{ compact}\} = \sup\{\nu(K) : K \subset A,\, K \text{ compact}\} = \nu(A),$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$. Ainsi $\mu = \nu$.

Enfin, montrons **l'existence de la mesure** $\mu$. Cette preuve a plusieurs étapes: on commence par construire une mesure extérieure $\mu$, on montre qu'elle induit une mesure $\mu$ sur les boréliens, finie sur les compacts et enfin que $\mu$ satisfait (3.11).

**Construction de $\mu$:** Pour $U \subset E$ ouvert, posons

$$\mu(U) := \sup\big\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c \text{ avec } 0 \leq f \leq \mathbf{1}_U\big\}. \tag{3.12}$$

La fonction $\mu$ ainsi définie est monotone sur les ouverts de $E$, on peut donc l'étendre à tout ensemble $A \in \mathcal{B}(E)$ par

$$\mu(A) := \inf\big\{\mu(U) : U \text{ ouvert avec } A \subset U\big\}. \tag{3.13}$$

Montrons que la fonction $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0, +\infty]$ ainsi définie est une mesure extérieure. La monotonie de $\mu$ ainsi que le fait que $\mu(\emptyset) = 0$ suivent directement de la définition. Ce qui reste à montrer est la $\sigma$-sous-additivité.

Commençons par montrer que $\mu$ est sous-additive pour les ouverts. Soient $U, V$ deux ouverts de $E$ et montrons que $\mu(U) + \mu(V) \geq \mu(U \cup V)$. Pour cela, il suffit de montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(E)$ avec $0 \leq f \leq \mathbf{1}_{U\cup V}$, on a $\Lambda(f) \leq \mu(U) + \mu(V)$. Fixons une telle fonction $f$.

Par le Théorème 3.32, on peut choisir une fonction $g \in \mathcal{C}_c$ avec $\mathbf{1}_{\mathrm{Supp}(f)} \leq g \leq \mathbf{1}_{U\cup V}$. Posons $K_U = \mathrm{Supp}(f) \cap (U \setminus V)$. Alors $K_U$ est également compact, on peut donc fixer $h \in \mathcal{C}_c$ avec $\mathbf{1}_{K_U} \leq h \leq \mathbf{1}_{U\cap \mathrm{Supp}(f)}$. Les fonctions $g \cdot h$ et $g \cdot (1-h)$ sont continues à supports compacts contenus dans $U$ et $V$, respectivement, et telles que $\mathbf{1}_{\mathrm{Supp}(f)} \leq g \cdot h + g \cdot (1-h)$. Posons $f_U = f \cdot g \cdot h$ et $f_V = f \cdot g \cdot (1-h)$. Ces fonctions sont continues à support compact

avec $0 \leq f_U \leq \mathbf{1}_U$ et $0 \leq f_V \leq \mathbf{1}_V$. Ainsi

$$\mu(U) + \mu(V) \geq \Lambda(f_U) + \Lambda(f_V) = \Lambda(f_U + f_V) = \Lambda(f).$$

En fin, montrons la $\sigma$-sous-additivité de $\mu$. Soient $A_1, A_2 \cdots \subset E$ et $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Notre but est de montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \geq \mu(A),$$

on peut donc se limiter au cas où la somme à gauche est finie. Soit $\epsilon > 0$ et pour chaque $n$ soit $U_n$ un ouvert contenant $A_n$ avec $\mu(U_n) \leq \mu(A_n) + \epsilon 2^{-n}$. Alors $U := \bigcup_{n\geq 1} U_n$ est un ouvert contenant $A$; évaluons sa mesure.

Soit $f \in \mathcal{C}_c(E)$ avec $0 \leq f \leq \mathbf{1}_U$. Vu que $\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{n\geq 0} U_n$ est compact, on déduit l'existence de $N$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^N U_n$. Ainsi, en utilisant la sous-additivité pour des unions finies d'ouverts, on trouve

$$\Lambda(f) \leq \mu\Big(\bigcup_{n=1}^N U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^N \mu(U_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n) + \epsilon 2^{-n} \leq \epsilon + \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

Comme cette inégalité s'applique à tout $f$ participant au supremum qui définit $\mu(U)$, on trouve $\mu(U) \leq \epsilon + \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$. Du fait que $U$ est un ouvert couvrant $A$, on déduit que $\mu(A) \leq \epsilon + \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$. En fin, comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

**Mesure borélienne:** Montrons maintenant que $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}(\mu)$ en utilisant le critère de Carathéodory (Théorème 3.4).

Commençons par montrer l'additivité de $\mu$ pour une union finie d'ouverts disjoints. Soient $U, V$ deux ouverts disjoints de $E$ et $f_U, f_V \in \mathcal{C}_c$ avec $0 \leq f_U \leq \mathbf{1}_U$ et $0 \leq f_V \leq \mathbf{1}_V$. Alors $f_U + f_V \in \mathcal{C}_c$ est telle que $0 \leq f_U + f_V \leq \mathbf{1}_{U\cup V}$. On conclut que $\mu(U \cup V) \geq \mu(U) + \mu(V)$.

Passons au critère de Carathéodory. Soient $A, B \subset E$ avec $\delta := \mathrm{dist}(A, B) > 0$. Posons $V_A = \{x \in E : \mathrm{dist}(x, A) < \delta/2\}$ et $V_B = \{x \in E : \mathrm{dist}(x, B) < \delta/2\}$; ce sont deux ouverts disjoints contenant $A$ et $B$, respectivement. Par la monotonie et l'additivité de $\mu$ pour les ouverts disjoints on trouve

$$\begin{aligned}
\mu(A \cup B) &= \inf\big\{\mu(U) : U \text{ ouvert avec } A \cup B \subset U\big\} \\
&= \inf\big\{\mu(U \cap (V_A \cup V_B)) : U \text{ ouvert avec } A \cup B \subset U\big\} \\
&= \inf\big\{\mu(U \cap V_A) + \mu(U \cap V_B) : U \text{ ouvert avec } A \cup B \subset U\big\} \\
&= \inf\big\{\mu(U_A) + \mu(U_B) : U_A, U_B \text{ ouverts avec } A \subset U_A \text{ et } B \subset U_B\big\} \\
&= \mu(A) + \mu(B).
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le critère de Carathéodory (Thm. 3.4); on déduit $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}(\mu)$.

**Mesure finie sur les compacts:** On commence par le résultat intermédiaire suivant:

$$\text{Si } A \in \mathcal{B}(E) \text{ et } \phi \in \mathcal{C}_c(E) \text{ sont tels que } \phi \geq \mathbf{1}_A, \text{ alors } \mu(A) \leq \Lambda(\phi). \tag{3.14}$$

Montrons (3.14). Soit $\delta > 0$ et posons $W = \{x \in E : \phi(x) > 1 - \delta\}$. Alors $W$ est

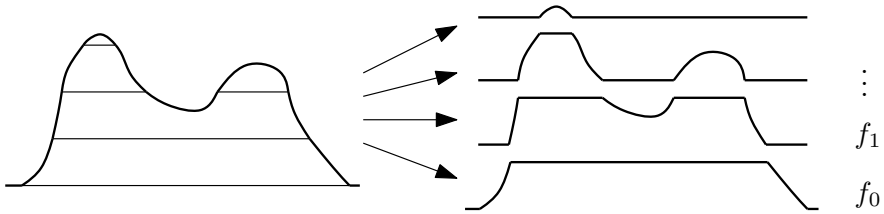



Figure 3.3: La fonction $f$ et les fonctions $f_n$. Les plateaux représentent les ouverts $U_n$.

ouvert et $A \subset W$. Ainsi $\mu(A) \leq \mu(W)$. Rappelons que $\mu(W)$ est défini par (3.12). Si $\chi \in \mathcal{C}_c$ est telle que $0 \leq \chi \leq \mathbf{1}_W$, alors

$$\phi \geq \tfrac{1}{1-\delta}\mathbf{1}_W \geq \tfrac{1}{1-\delta}\chi,$$

d'où $(1-\delta)\Lambda(\phi) \geq \Lambda(\chi)$. En prenant le supremum sur $\chi$, on obtient $(1-\delta)\Lambda(\phi) \geq \mu(W) \geq \mu(A)$. Mais $\delta > 0$ est arbitraire, donc (3.14) est démontré.

Revenons au fait que $\mu$ est finie sur les compacts. Soit $K \subset E$ un compact. Alors, par le Théorème 3.32, il existe $g \in \mathcal{C}_c$ avec $\mathbf{1}_K \leq g$. Par (3.14) on conclut que $\mu(K) \leq \Lambda(g) < \infty$.

**Intégrale des fonctions $\mathcal{C}_c$:** Montrons que

$$\Lambda(f) = \int f(x)\, d\mu(x), \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(E).$$

Fixons $f \in \mathcal{C}_c(E)$. Quitte à écrire $f = f_+ - f_-$, on peut se limiter à $f$ positive. Soit $M = \sup\{f(x) \,:\, x \in E\}$.

Fixons $\epsilon > 0$ et notons $U_n = \{x \in E :\, f(x) > n\epsilon\}$ pour $n \geq 1$. Alors $U_n$ est un ouvert pour chaque $n \geq 1$. Notons également $f_n = \min\big\{\max\{f - n\epsilon, 0\}, \epsilon\big\}$ pour $n \geq 0$. Alors $f_n \in \mathcal{C}_c(E)$ et $0 \leq \frac{1}{\epsilon} f_n \leq \mathbf{1}_{U_n}$ pour tout $n \geq 0$. D'autre part, si $x \in U_{n+1}$, alors $f_n(x) = \epsilon$, donc $\frac{1}{\epsilon} f_n \geq \mathbf{1}_{U_{n+1}}$ Ainsi $\frac{1}{\epsilon} f_n \leq \mathbf{1}_{U_n}$. Par (3.14) et par la définition (3.12) de $\mu$ pour les ouverts, on trouve

$$\epsilon\mu(U_{n+1}) \leq \Lambda(f_n) \leq \epsilon\mu(U_n).$$

En utilisant que $f = \sum_{n=1}^{M/\epsilon} f_n$ et la linéarité de $\Lambda$, on conclut que

$$\int \big(\sum_{n=1}^{M/\epsilon} \epsilon\mathbf{1}_{U_n}\big) d\mu = \sum_{n=1}^{M/\epsilon} \epsilon\mu(U_n) \leq \Lambda(f) \leq \sum_{n=0}^{M/\epsilon} \epsilon\mu(U_n) = \int \big(\sum_{n=0}^{M/\epsilon} \epsilon\mathbf{1}_{U_n}\big) d\mu$$

En fin, observons que $\sum_{n=1}^{M/\epsilon} \epsilon\mathbf{1}_{U_n} \leq f \leq \sum_{n=0}^{M/\epsilon} \epsilon\mathbf{1}_{U_n}$ et que $\int \epsilon\mathbf{1}_{U_0} d\mu \leq \epsilon\mu(\mathrm{Supp}(f))$. Ainsi on obtient

$$\Big|\Lambda(f) - \int f\, d\mu\Big| \leq \epsilon\mu(\mathrm{Supp}(f)).$$

Vu que $\epsilon > 0$ est arbitraire et que $\mu(\mathrm{Supp}(f)) < \infty$, cela implique que $\Lambda(f) = \int f\, d\mu$. $\square$

Ce théorème est généralement valable pour les espace topologique localement compacts. Alors la mesure $\mu$ qui induit une forme linéaire positive $\Lambda$ donnée peut être choisie régulière

et est unique uniquement dans l'ensemble des mesures régulières.

## 3.5 Paradoxe de Banach-Tarski: limites de la théorie de la mesure *

On a déjà vu un exemple d'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui ne peut pas être mesuré par la mesure de Lebesgue.

$$\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (E + q) = \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

On insiste sur le fait que cela implique que pour toute mesure $\mu$, $\sigma$-finie et invariante par translations sur $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ (où $\mathcal{E}$ est une tribu invariante par translations contenant les boréliens) $\mu(E)$ n'est pas définie, c.à.d. $E \notin \mathcal{E}$. On ne peut donc pas espérer mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$ de façon non-triviale et invariante par translation.

On peut alors se demander si on peut faire moins: peut-on construire une "mesure" non-triviale $\mu$ qui soit seulement additive, pas $\sigma$-additive, sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$, qui soit invariante par isométries et qui accorde une masse finie aux ensembles bornés.

Une réponse partielle à cette question a était donnée par Stephan Banach et Alfred Tarski en 1924 au travers de leur décomposition paradoxale de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Ce résultat surprenant est connu sous le nom de paradoxe de Banach-Tarski.

Notons $\mathbb{S}^2 = \{z \in \mathbb{R}^3 : |z| = 1\}$ la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$.

**Théorème 3.34.** *On peut partitionner $\mathbb{S}^2$ en 10 sous-ensembles $A_1, \dots, A_{10}$ tels qu'il existe des rotations $\rho_1, \dots, \rho_{10}$ avec*

$$\mathbb{S}^2 = \rho_1(A_1) \cup \rho_2(A_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^2 = \rho_3(A_3) \cup \dots \cup \rho_{10}(A_{10}).$$

*On dit que $\mathbb{S}^2$ est un ensemble* paradoxal *de $\mathbb{R}^3$ et que la décomposition $A_1, \dots, A_{10}$ est une décomposition paradoxale.*

On donne ici un preuve courte de ce théorème. Avec un peu plus de travail, on peut réduire le nombre de parties nécessaire à 5 et on peut faire en sorte que les recollements pour créer les deux sphères se fassent entre des parties disjointes.

Le même résultat est valable en toute dimension plus grande que 3. On peut évidement remplacer $\mathbb{S}^2$ par $B(0,1) \setminus \{0\}$ dans le théorème. Ainsi, **la réponse à la première question est négative pour $d \geq 3$:**

**Corollaire 3.35.** *Pour $d \geq 3$, il n'existe pas de fonction $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ qui soit*

- *additive: si $A, B \subset \mathbb{R}^d$ sont disjoints, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,*
- *invariante par isométries affines: $\mu(A) = \mu(\rho A + z)$, $\forall A \subset \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}^d$ et $\rho \in SO(d)$,*
- *finie sur les compacts $\mu(A) < \infty$ is $A$ est compact,*

- *non-zero sur les ouverts non-vides* $\mu(A) > 0$ *si* $A$ *ouvert,* $A \neq \emptyset$.

Par contre, en dimensions 1 et 2, la situation est très différente

**Théorème 3.36.** *Pour* $d = 1, 2$*, il existe une fonction* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ *qui est*

- *additive: si* $A, B \subset \mathbb{R}^d$ *sont disjoints, alors* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
- *invariante par isométries affines:* $\mu(A) = \mu(\rho A + z)$, $\forall A \subset \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}^d$ *et* $\rho \in SO(d)$,
- *finie sur les compacts* $\mu(A) < \infty$ *si* $A$ *est compact,*
- *non-zero sur les ouverts non-vides* $\mu(A) > 0$ *si* $A$ *ouvert,* $A \neq \emptyset$.

La raison pour cette différence entre les dimensions 1 et 2 et celles supérieures à 3 est que les groupes d'isométries vectorielles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont beaucoup plus petits que ceux pour $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 3$. En particulier, on ne peut pas trouver une copie de $F_{(a,b)}$ dans $SO(2)$. On ne va pas prouver ce théorème.

Pour comprendre les structures qui admette une décomposition paradoxale, Von Neumann introduit en 1929 les notion de groupe moyennable. L'étude des groupes moyennables et non-moyennables est un sujet très actif de la recherche mathématique actuelle.

Mentionnons enfin que, dans l'exemple de partie non-mesurable de $\mathbb{R}$ donné par (3.15), ainsi que dans la démonstration du paradoxe de Banach-Tarski, l'axiome du choix est crucial. En effet, l'axiome du choix (la version indénombrable) est équivalent à l'existence d'une partie non-mesurable de $\mathbb{R}$ ainsi qu'au paradoxe de Banach-Tarski.

**Le groupe libre** Dans la preuve du Théorème 3.34, le groupe libre à deux générateurs va jouer un rôle essentiel.

Le groupe libre à deux générateurs $a, b$ est l'ensemble $F_{(a,b)}$ des mots finis formé des lettres $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ avec la contrainte qu'il n'y à pas de succession de lettres $a$ et $a^{-1}$, ni $b$ et $b^{-1}$. L'opération de groupe sur $F_{(a,b)}$ est la concaténation, où on élimine tous les couples successifs $aa^{-1}$, $a^{-1}a$, $bb^{-1}$ et $b^{-1}b$. L'élément neutre de $F_{(a,b)}$ est le mot vide qu'on note $e$. Ainsi

$$(abba^{-1}baab^{-1}b^{-1})(bba^{-1}baa) = abba^{-1}ba\cancel{ab^{-1}b^{-1}bba^{-1}}baa = abba^{-1}babaa.$$

**Lemme 3.37.** *On peut partitionner* $F_{(a,b)}$ *en quatre parties* $A_a, A_b, A_{a^{-1}}, A_{b^{-1}}$ *telles que*

$$F_{(a,b)} = A_a \cup aA_{a^{-1}} \quad \text{et} \quad F_{(a,b)} = A_b \cup bA_{b^{-1}}$$

**Preuve:** Il suffit de définir

$$A_* = \{ \text{ mots commençant par } * \}.$$

De plus, on va placer par convention l'élément neutre $e$ dans $A_b$.

Alors $aA_{a^{-1}}$ est l'ensemble de tous les mots qui ne commencent pas par $a$. Ainsi $F_{(a,b)} = A_a \sqcup aA_{a^{-1}}$. De même $F_{(a,b)} = A_b \cup bA_{b^{-1}}$ (ici l'union n'est pas disjointe car $A_b \cap bA_{b^{-1}} = \{e\}$). □

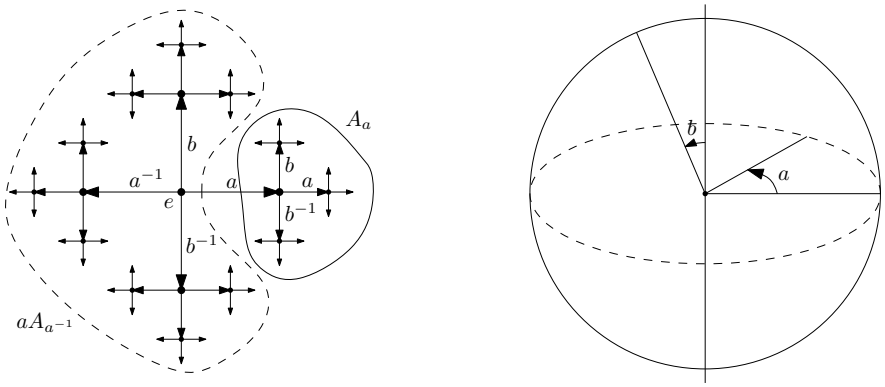



Figure 3.4: Le graphe de Cayley de $F_{(a,b)}$; Deux rotations $a, b$ qui engendrent un sous-groupe de $SO(3)$ isomorphe à $F_{(a,b)}$

**Preuve du paradoxe de Banach-Tarski.** Le groupe de rotations dans $\mathbb{R}^3$ est noté $SO(3)$ et peut être représenté par les matrices orthogonales $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\det(M) = 1$.

**Lemme 3.38.** *Il existe deux rotations $\alpha, \beta \in SO(3)$ telles que, pour tout $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}^*$ (où $n \geq 1$),*

$$\alpha^{k_1}\beta^{k_2}\alpha^{k_3}\beta^{k_4}\cdots \neq \mathrm{id}.$$

*En d'autres mots, le sous-groupe de $SO(3)$ engendré par $\alpha, \beta$ est isomorphe au groupe libre à deux éléments $F_{(a,b)}$.*

**Preuve:** Soit $\alpha$ la rotation d'angle $\arccos(1/3)$ autour de l'axe vertical $(0,0,1)\mathbb{R}$ et $\beta$ la rotation d'angle $\arccos(1/3)$ autour de l'axe horizontal $(1,0,0)\mathbb{R}$. Soit $e1, e_2, e_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors les matrices correspondant à $\alpha$ et $\beta$ dans la base $(\sqrt{2}e_1, e_2, \sqrt{2}e_3)$ sont

$$M_\alpha = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_\beta = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_\beta^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On va désormais noter $M_\alpha$ et $M_\beta$ simplement par $\alpha$ et $\beta$. On aimerait montrer qu'il n'existe pas de mot non-trivial formé de $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}$ qui vaut l'identité.

Supposons qu'il existe une suite non-vide $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \{\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}$, qui ne contient pas de succession d'un élément et son inverse, telle que $\phi_n \ldots \phi_1 = I_3$. Alors

$$3\phi_n \times \cdots \times 3\phi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod 3. \tag{3.16}$$

Observons que $3\phi_k \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, et qu'on peut donc étudier l'effet de chaque $\phi_k$ mod 3. Quitte à multiplier la suite à gauche par $\alpha^{-1}$ et à droite par $\alpha$, on peut supposer que $\phi_1 = \alpha$. Alors l'effet de l'application successive des $3\phi_k$ mod 3 est décrite par le graphe dans la figure 3.5. On observe qu'on n'arrive jamais sur le vecteur nul, donc qu'il n'existe pas de suite $\phi_1, \ldots, \phi_n$ telle que $\phi_n \ldots \phi_1 = I_3$.

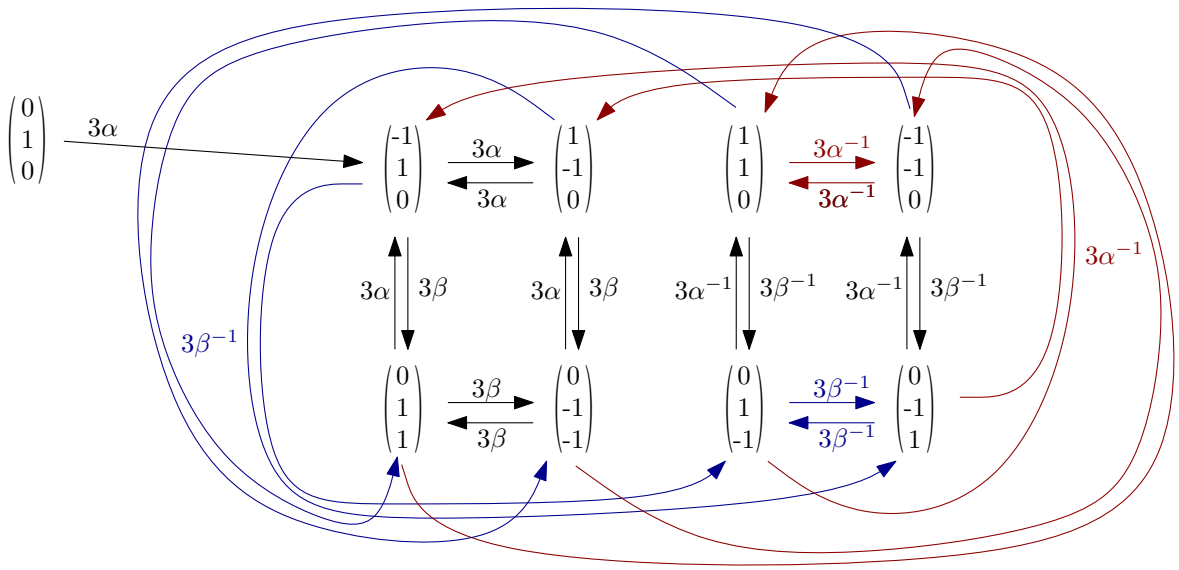



Figure 3.5: L'effet mod 3 des matrices $(3\alpha, 3\alpha^{-1}, 3\beta, 3\beta^{-1})$ sur le vecteur $(0, 1, 0)$. Si on n'applique jamais une matrice suivie de son inverse, alors on n'arrive jamais au vecteur nul.

□

**Preuve du Théorème 3.34:** Soit $\alpha, \beta$ comme dans le lemme et notons $G$ le sous-groupe de $SO(3)$ qu'ils engendrent. Alors, pour $x, y \in \mathbb{S}^2$, on écrit $x \sim y$ s'il existe $u \in G$ tel que $x = uy$. Vu que $G$ est un groupe, $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{S}^2$.

Même si $G$ est isomorphe au groupe libre, il n'est pas vrai que $ux \neq vx$ pour tout $u \neq v \in G$ et $x \in \mathbb{S}^2$ (l'action de $G$ sur $\mathbb{S}^2$ n'étant pas libre). Pourtant, si $x \in \mathbb{S}^2$ est tel qu'il existe $u, v \in G$, $u \neq v$ avec $ux = vx$, alors $x$ est point fixe de la rotation $uv^{-1}$. Posons donc

$$S = \{x \in \mathbb{S}^2 : \exists u \in G \setminus \{e\} \text{ tel que } ux = x\}.$$

Pour chaque $u \in G \setminus \{e\}$, il existe exactement 2 tels points. De plus, $G$ est évidement dénombrable, donc $S$ est au plus dénombrable.

On va maintenant utiliser l'axiome du choix, pour choisir un représentant dans chaque classe d'équivalence de $\sim$. Soit $E \subset \mathbb{S}^2$ un ensemble avec les propriétés:

(i) pour chaque $x \in \mathbb{S}^2 \setminus S$, il existe $y \in E$ et $u \in G$ tels que $ux = y$;

(ii) si $x, y \in E$ sont tels que $x \sim y$, alors $x = y$.

Le fait qu'on se limite aux $x \notin S$, entraîne que dans le premier point, $u \in G$ est unique.

On rappelle la partition de $F_{(a,b)}$ donnée par le lemme 3.37. Elle est aussi valable pour $G$, vu l'isomorphisme (et on ne va plus faire la différence entre $G$ et $F_{(a,b)}$). Posons, pour

$i \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$,

$$M_i = \{x \in \mathbb{S}^2 \setminus S : \exists u \in A_i \text{ et } y \in E \text{ tels que } x = uy\}.$$

Alors

$$\mathbb{S}^2 = S \sqcup M_a \sqcup M_{a^{-1}} \sqcup M_b \sqcup M_{b^{-1}}.$$

De plus

$$\mathbb{S}^2 = S \sqcup M_a \sqcup \alpha(M_{a^{-1}}) \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^2 \setminus S = M_b \cup \beta(M_{b^{-1}}).$$

On est très proche de notre but: on a réussi à découper $\mathbb{S}^2$ en quatre parties ($A_1 = S \sqcup M_a, A_2 = M_{a^{-1}}, B_1 = M_b, B_2 = M_{b^{-1}}$) qu'on peut recoller après rotations pour créer une sphère et une deuxième sphère privée d'un ensemble dénombrable.

Pour régler ce dernier problème on peut procéder comme suit. On peut partitionner, comme avant, $B_1 \cup \beta(B_2)$ en quatre $C_1, \ldots, C_4$ telles qu'on peut recoller après rotations pour créer deux sphères privée chacune d'un ensemble au plus dénombrable. Précisément, il y a des ensemble dénombrables $S', S'' \subset \mathbb{S}^2$, tels que

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^2 \setminus S' &= C_1 \sqcup \alpha(C_2) = [(B_1 \cap C_1) \cup (\beta(B_2) \cap C_1)] \cup \alpha[(B_1 \cap C_2) \cup (\beta(B_2) \cap C_2)] \\
&= (B_1 \cap C_1) \cup \beta(B_2 \cap \beta^{-1} C_1) \cup \alpha(B_1 \cap C_2) \cup \alpha\beta(B_2 \cap \beta^{-1} C_2) \quad \text{et} \\
\mathbb{S}^2 \setminus S'' &= C_3 \sqcup \beta(C_2) = [(B_1 \cap C_3) \cup (\beta(B_2) \cap C_3)] \cup \beta[(B_1 \cap C_4) \cup (\beta(B_2) \cap C_4)] \\
&= (B_1 \cap C_3) \cup \beta(B_2 \cap \beta^{-1} C_3) \cup \beta(B_1 \cap C_4) \cup \beta^2(B_2 \cap \beta^{-1} C_4).
\end{aligned}$$

De plus on observe que

$$\begin{aligned}
A_1 \sqcup A_2 \sqcup B_1 \sqcup B_2 = A_1 \sqcup A_2 \sqcup &(B_1 \cap C_1) \sqcup (B_2 \cap \beta^{-1} C_1) \sqcup (B_1 \cap C_2) \sqcup (B_2 \cap \beta^{-1} C_2) \sqcup \\
&(B_1 \cap C_3) \sqcup (B_2 \cap \beta^{-1} C_3) \sqcup (B_1 \cap C_4) \sqcup (B_2 \cap \beta^{-1} C_4).
\end{aligned}$$

Enfin, observons que, vu que $S'$ et $S''$ sont dénombrables, il existe une rotation $\gamma \in SO(3)$ telle que $\gamma(S'')$ n'intersecte pas $S'$. Alors $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \setminus S' \cup \gamma(\mathbb{S}^2 \setminus S'')$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^2 = &(B_1 \cap C_1) \cup \beta(B_2 \cap \beta^{-1} C_1) \cup \alpha(B_1 \cap C_2) \cup \alpha\beta(B_2 \cap \beta^{-1} C_2) \cup \\
&\gamma(B_1 \cap C_3) \cup \gamma\beta(B_2 \cap \beta^{-1} C_3) \cup \gamma\beta(B_1 \cap C_4) \cup \gamma\beta^2(B_2 \cap \beta^{-1} C_4).
\end{aligned}$$

On a donc réussi à construire une deuxième sphère en utilisant une partition en 8 morceaux de $B_1 \sqcup B_2$. $\square$

# Chapitre 4

# Dimension et mesure de Hausdorff *

## 4.1 Mesures de Hausdorff

Soit $n \geq 1$. La mesure $n$-dimensionnelle de Lebesgue $\lambda_n$ s'est imposée comme mesure naturelle sur $\mathbb{R}^n$ grâce à son invariance par isométries affines. On peut néanmoins se poser la question de calculer la longueur d'une courbe ou l'aire d'une surface plongées dans $\mathbb{R}^n$. La mesure de Lebesgue n'est pas adapté à cela: si $n \geq 2$, alors $\lambda_2(\gamma) = 0$ pour toute courbe lipschitzienne $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Les mesures de Hausdorff qu'on va définir par la suite sont destinées à mesurer des objets de dimension inférieure à $n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ce chapitre on va essentiellement parler de meures sur $\mathbb{R}^n$ ou sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Toutefois, il est interessant de définir la mesure de Hausdorff pour des espaces métriques généraux. Si $(E, \mathrm{d})$ est un espace métrique, pour $x \in E$ et $r \geq 0$ on définit la boule ouverte de rayon $r$ autour de $x$ par

$$B(x,r) = \{y \in E : \mathrm{d}(x,y) < r\}.$$

De plus, pour $A \subset E$, on pose

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x, y \in A\}.$$

A remarquer que si $F \subset E$ est non-vide, alors $(F, \mathrm{d})$ est également un espace métrique.

Quand $E = \mathbb{R}^n$ ou $E \subset \mathbb{R}^n$, on utilise par défaut la distance euclidienne $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$. Rappelons que pour $n \geq 1$ entier,

$$\alpha(n) = \lambda_n(B(0,1)) = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} & \text{si } n = 2k \text{ est pair,} \\ \frac{\pi^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} & \text{si } n = 2k+1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

De plus, la fonction $\alpha$ se prolonge de façon naturelle aux nombres réels positifs par

$$\alpha(d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} = \frac{\pi^{d/2}}{\int_0^\infty x^{d/2} e^{-x} dx}, \quad d \geq 0.$$

**Définition 4.1.** *Soit* $(E, \mathrm{d})$ *un espace métrique et* $d \in [0, +\infty)$*. Pour* $A \subset E$*, la mesure (extérieure) de Hausdorff* $d$*-dimensionnelle de* $A$ *est donnée par*

$$\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \left\{ \frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_k)^d : A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \text{ et } \mathrm{diam}(B_k) \leq \epsilon \right\} \in [0, +\infty]. \quad (4.1)$$

*Quand* $d = 0$*, on remplace* $\mathrm{diam}(B_k)^d$ *par* $\mathbf{1}_{B_k \neq \emptyset}$*.*

*Remarque* 4.2.

(i) Pourquoi la limite existe-elle ?
L'ensemble dont on considère l'infimum est croissant en $\epsilon$. Ainsi, quand $\epsilon$ décroît, l'infimum croit. Ce-ci montre que la limite existe car il s'agit d'une limite croissante.

(ii) Pourquoi imposer que les ensembles $B_k$ aient des diamètres plus petits que $\epsilon$ ?
Si on définissait $\mathcal{H}^d$ en prenant tout simplement l'infimum de $\frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_k)^d$ pour tout recouvrement $(B_k)_k$, alors, pour la boule $B(0,1)$ de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$ et $d < n$, on aurait

$$\mathcal{H}^d(B(0,1)) \leq \frac{\alpha(d)}{2^d} \mathrm{diam}(B(0,1))^d = \alpha(d) < \infty.$$

Mais $B(0,1)$ étant un objet de "dimension" $n$, la mesure de Hausdorff de dimension $d < n$ de cet ensemble devrait être infinie.

(iii) Pourquoi ne pas prendre pour les $B_k$ des boules ou des carrés de taille *exactement* $\epsilon$ ?
Dans se cas on obtiendrait la définition de contenu de Minkowski, dont on va discuter à la fin de ce chapitre. On peut facilement voir qu'une telle définition ne donne pas une mesure.

(iv) Pourquoi ne pas prendre pour les $B_k$ des boules ou des cubes ?
Pour des espaces métrique généraux, la notion de cube n'est pas définie. De plus, la notion de diamètre est mieux adaptée que celle de rayon (correspondant au recouvrement par des boules) – voir exercice 79. L'utilisation des ensembles $B_k$ arbitraires garantit que la mesure de Hausdorff d'un ensemble est indépendante de l'espace ambient. Une illustration de ce fait est donnée dans le Lemme 4.4.

(v) Pourquoi mettre $\alpha(d)2^{-d}$ devant ?
Il s'agit tout simplement d'une constante de normalisation; elle est choisie pour que $\alpha(d)2^{-d}\mathrm{diam}(B_j)$ soit la mesure de Lebesgue $\lambda_d$ d'une boule de diamètre $\mathrm{diam}(B_j)$ de $\mathbb{R}^d$ (quand $d$ est entier). Comme on va voir par la suite, c'est la constante qui rend la mesure de Hausdorff de dimension $n$ égale à la mesure de Lebesgue $\lambda_n$.

**Théorème 4.3.** *La mesure de Hausdorff de dimension* $d$ *est une mesure extérieure sur* $\mathbb{R}^n$*. De plus, la tribu des parties* $\mathcal{H}^d$*-mesurables contient la tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. Ainsi* $\mathcal{H}^d$ *est une mesure sur* $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$*.*

**Preuve:** Commençons par montrer que $\mathcal{H}^d$ est une mesure extérieure.

On a évidement $\mathcal{H}^d(\emptyset) = 0$. Pour $A \subset A' \subset \mathbb{R}^n$, si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $A'$, alors c'est aussi un recouvrement de $A$. Ainsi $\mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(A')$.

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de $\mathbb{R}^n$. On aimerait montrer $\mathcal{H}^d(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mathcal{H}^d(A_i)$. Soient $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ il existe un recouvrement $(B_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $A_i$ avec

$$\frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_k^{(i)})^d \leq \mathcal{H}^d(A_i) + \delta 2^{-i} \quad \text{et} \quad \operatorname{diam}(B_k^{(i)}) \leq \epsilon, \forall k.$$

Alors la famille $(B_k^{(i)})_{i,k\in\mathbb{N}}$ forme un recouvrement de $\bigcup_i A_i$ avec $\operatorname{diam}(B_k^{(i)}) \leq \epsilon$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_k^{(i)})^d \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \left[\mathcal{H}^d(A_i) + \delta 2^{-i}\right] = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^d(A_i) + \delta.$$

Comme cela est valable pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $\mathcal{H}^d(\cup_i A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^d(A_i) + \delta$. Comme $\delta > 0$ est arbitraire, on obtient l'inégalité désirée.

Montrons maintenant que $\mathcal{M}(\mathcal{H}^d)$ contient la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Le critère de Caratheodory (Théorème 3.4) garantit ce fait, dès que pour deux ensembles $A, A'$ à distance positive $\mathcal{H}^d(A \cup A') = \mathcal{H}^d(A) + \mathcal{H}^d(A')$.

Soit $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ avec $\operatorname{dist}(A, A') > 0$. Soit $\epsilon > 0$ avec $\epsilon < \operatorname{dist}(A, A')$ et considérons un recouvrement $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $A \cup A'$ avec $\operatorname{diam}(B_k) \leq \epsilon$ pour tout $k$. Alors chaque ensemble $B_k$ intersecte au plus un des ensembles $A$ et $A'$. On peut donc en extraire un recouvrement $(B_k)_{k\in I}$ de $A$ et un recouvrement $(B_k)_{k\in J}$ de $A'$ disjoints (c.-à-d. avec $I \cap J = \emptyset$). Ainsi $\mathcal{H}^d(A) + \mathcal{H}^d(A') \leq \mathcal{H}^d(A \cup A')$. L'inégalité inverse est assurée par la sous-additivité de $\mathcal{H}^d$. On a donc $\mathcal{H}^d(A) + \mathcal{H}^d(A') = \mathcal{H}^d(A \cup A')$, ce qui implique $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}^d)$. □

On voit bien qu'on peut remplacer dans la définition $\mathbb{R}^n$ par un espace métrique quelconque. Ainsi, pour tout espace métrique, on peut définir les mesures de Hausdorff de dimensions $d \geq 0$.

**Lemme 4.4.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors $E$ muni de la distance $d(x, y) = \|x - y\|$ est un espace métrique. De plus, pour tout $d \geq 0$, la mesures de Hausdorff de dimensions $d$ sur $E$ est identique à la restriction à $E$ de la mesure de Hausdorff de dimensions $d$ sur $\mathbb{R}^n$.*

**Preuve:** Le fait que $(E, d)$ est un espace métrique est évident.

Pour cette preuve, notons $\mathcal{H}^d_{\mathbb{R}^n}$ et $\mathcal{H}^d_E$ les mesures de Hausdorff de dimension $d$ dans $\mathbb{R}^n$ et $E$, respectivement. Soient $A \subset E$, $\epsilon > 0$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ un recouvrement de $A$ avec $\operatorname{diam}(B_k) \leq \epsilon$ pour tout $k$. Posons $\tilde{B}_k = B_k \cap E$. Alors $\operatorname{diam}(\tilde{B}_k) \leq \operatorname{diam}(B_k)$ et $(\tilde{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est toujours un recouvrement (dans $E$) de $A$. Ainsi $\mathcal{H}^d_E(A) \leq \mathcal{H}^d_{\mathbb{R}^n}(A)$.

Inversement, si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ un recouvrement de $A$ (dans $E$), c'est aussi un recouvrement de $A$ dans $\mathbb{R}^n$. De plus, le diamètre de $B_k$ ne dépend pas de si on regarde $B_k$ comme sous-ensemble de $E$ ou $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\mathcal{H}^d_{\mathbb{R}^n}(A) \leq \mathcal{H}^d_E(A)$. □

**Proposition 4.5** (Invariance par translation et effet multiplicatif)**.** *Soit $\tau$ une isométrie de $\mathbb{R}^n$ et $\beta > 0$. Alors pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ et $d \geq 0$,*

$$\mathcal{H}^d(\tau(A)) = \mathcal{H}^d(A) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^d(\beta \cdot A) = \beta^d \mathcal{H}^d(A)$$

**Preuve:** Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\tau$ une isométrie. Alors, si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ un recouvrement de $A$, $(\tau(B_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\tau(A)$. De plus $\mathrm{diam}(\tau(B_k)) = \mathrm{diam}(B_k)$ pour tout $k$. Ainsi $\mathcal{H}^d(\tau(A)) \leq \mathcal{H}^d(A)$. L'inégalité inverse suit en appliquant celle ci avec $\tau^{-1}$ à $\tau(A)$.

Soit $\beta > 0$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ un recouvrement de $A$. Alors $(\beta \cdot B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ un recouvrement de $\beta \cdot A$. De plus $\mathrm{diam}(\beta \cdot B_k) = \beta \mathrm{diam}(B_k)$ pour tout $k$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^d(\beta \cdot A) &\leq \liminf_{\epsilon\to 0} \Big\{ \frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k\in\mathbb{N}} \big[\beta \mathrm{diam}(B_k)\big]^d : A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \text{ et } \beta\mathrm{diam}(B_k) \leq \epsilon \Big\} \\
&= \beta^d \liminf_{\epsilon\to 0} \Big\{ \frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_k)^d : A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \text{ et } \mathrm{diam}(B_k) \leq \epsilon \Big\} \\
&= \beta^d \mathcal{H}^d(\beta \cdot A)
\end{aligned}$$

L'inégalité inverse suit en appliquant celle ci avec $\beta^{-1}$ à $\beta \cdot A$. □

**Proposition 4.6.** *Soit $n \geq 1$ et $d \geq 0$.*
*Si $d < n$, alors $\mathcal{H}^d(U) = \infty$ pour tout $U$ ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$;*
*Si $d > n$, alors $\mathcal{H}^d$ est la mesure nulle sur $\mathbb{R}^n$.*

**Preuve:** Soient $d \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Commençons par supposer que $d < n$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ un recouvrement de $U$, alors il en est de même de $(\overline{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (où $\overline{B}_k$ est la fermeture de $B_k$ dans $\mathbb{R}^n$). De plus $\mathrm{diam}(\overline{B}_k) = \mathrm{diam}(B_k)$ pour tout $k$. Ainsi on peut se limiter aux recouvrement par des ensembles fermés (donc boréliens) dans (4.1).

Pour un recouvrement $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ de $U$ par des ensembles fermés, $\sum_k \lambda_n(B_k) \geq \lambda_n(U) > 0$ (car $U$ est ouvert). Mais chaque ensemble $B_k$ est contenu dans une boule de rayon $\mathrm{diam}(B_k)$, donc $\lambda_n(B_k) \leq \alpha(n)\mathrm{diam}(B_k)^n$.

Soit $\epsilon > 0$. Si on impose que $\mathrm{diam}(B_k) \leq \epsilon$ pour tout $k$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_k)^d &= \frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_k)^n \epsilon^{d-n} \\
&\geq \frac{\alpha(d)}{2^d\alpha(n)} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(B_k)\epsilon^{d-n} \geq \epsilon^{d-n} \frac{\alpha(d)}{2^d\alpha(n)} \lambda_n(U) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}^d(U) = \infty$.

Supposons maintenant que $d > n$ et montrons que $\mathcal{H}^d(\mathbb{R}^n) = 0$. Par $\sigma$-additivité, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^d([0,1]^n) = 0$. Pour $m > 0$, considérons le recouvrement de $[0,1]^n$ par les cubes $C(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{j=1}^n \big[(k_j - 1)2^{-m}; k_j 2^{-m}\big]$, pour $k_1, \ldots, k_n \in \{1, \ldots, 2^m\}$.

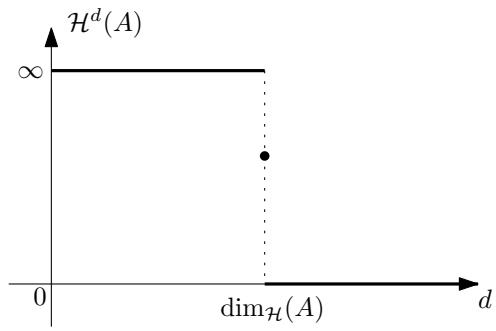



Figure 4.1: La mesure de Hausdorff d'un ensemble $A$ pour différents $d$.

Un tel recouvrement contient $2^{mn}$ ensembles, chacun de diamètre $2^{-m}\sqrt{n}$. Ainsi

$$\mathcal{H}^d([0,1]^n) \leq \frac{\alpha(d)}{2^d} 2^{nm-dm} n^{d/2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

□

**Exercice 79.**
Soit $(E, d)$ un espace métrique.

(a) Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$,

$$\operatorname{diam}(B(x,r)) \leq 2r.$$

Trouver des exemples ou l'inégalité est stricte.

(b) Montrer que tout ensemble $A$ est contenu dans une boule fermée de rayon $\operatorname{diam}(A)$. Donner un exemple ou $A$ n'est pass contenu dans une boule fermée de rayon $\frac{1}{2}\operatorname{diam}(A)$.

**Exercice 80.**
Montrer que la mesure $\mathcal{H}^0$ sur $\mathbb{R}^d$ est la mesure de comptage, quelque soit $d$.

**Exercice 81.**
Que vaut $\mathcal{H}^1$ dans $\mathbb{R}^1$ ?
Pour un borélien $A \subset \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, que vaut $\mathcal{H}^1(A)$ ?

## 4.2 Dimension de Hausdorff

**Proposition 4.7.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $0 \leq d < d'$. Alors:*

- *si $\mathcal{H}^d(A) < \infty$, alors $\mathcal{H}^{d'}(A) = 0$*
- *si $\mathcal{H}^{d'}(A) > 0$, alors $\mathcal{H}^d(A) = \infty$*

**Preuve:** La seconde affirmation est tout simplement la contraposée de la première; il suffit donc de démontrer la première.

Soient $0 \leq d < d'$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{H}^d(A) < \infty$. Alors pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un recouvrement $(B_k^{(\epsilon)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $A$ avec $\operatorname{diam}(B_k^{(\epsilon)}) \leq \epsilon$ pour tout $k$ et

$$\frac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_k^{(\epsilon)})^d \leq \mathcal{H}^d(A) + 1 < \infty.$$

Mais cela implique

$$\frac{\alpha(d')}{2^{d'}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_k^{(\epsilon)})^{d'} \leq \frac{\alpha(d')}{\alpha(d)} \Big(\frac{\epsilon}{2}\Big)^{d'-d} \big(\mathcal{H}^d(A) + 1\big) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0.$$

Ainsi $\mathcal{H}^{d'}(A) = 0$. □

**Définition 4.8.** *Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit la dimension de Hausdorff de $A$ comme*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(A) = 0\}.$$

*Remarque* 4.9. (i) Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ non-vide, $\dim_{\mathcal{H}}(A) \in [0, n]$. En effet, comme $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage $\mathcal{H}^0(A) > 0$ donc $\dim_{\mathcal{H}}(A) \geq 0$. D'autre part, pour tout $d > n$, $\mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(\mathbb{R}^n) = 0$, donc $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$.

(ii) On a vu dans le lemme 4.4 qu'un ensemble non-vide $A \subset \mathbb{R}^n$ peut être vu comme un espace métrique et que la mesure de Hausdorff de dimension $d$ sur $\mathbb{R}^n$ restreinte à $A$ est simplement la mesure de Hausdorff de dimension $d$ sur $A$. Ainsi, la dimension de Hausdorff de $A$ ne dépend pas de l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, la dimension de Hausdorff peut être définie pour tout espace métrique.

Exemples:

- La dimension d'un point est 0. La dimension d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est $n$.
- Une courbe rectifiable a une dimension 1 (voir la partie suivante).
- L'image d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lipschitzienne a une dimension au plus $n$. Si elle est est bi-lipschitzienne, alors elle a dimension exactement $n$.
- Le graphe d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}^m$ a une dimension plus grande que celle de $A$. Même si $f$ est continue, on peut avoir des dimension strictement plus grandes: courbe de Peano, mouvement Brownien.
- Soient $d \in \mathbb{N}$. Si $M$ est une variété différentielle de dimension $d$ plongée dans $\mathbb{R}^n$, alors $\dim_{\mathcal{H}}(M) = d$. De plus, $\mathcal{H}^d$ est une mesure non-triviale et $\sigma$-finie sur $M$.

**Proposition 4.10.** *Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\dim_{\mathcal{H}}\Big(\bigcup_k A_k\Big) = \sup\{\dim_{\mathcal{H}}(A_k) : k \in \mathbb{N}\}.$$

**Preuve:** Soit $d > \sup\{\dim_{\mathcal{H}}(A_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Alors $\mathcal{H}^d(\cup_k A_k) \leq \sum_k \mathcal{H}^d(A_k) = 0$, donc $\dim_{\mathcal{H}}(\cup_k A_k) \leq d$. Comme $d$ est arbitraire, il s'en suit que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\cup_k A_k) \leq \sup\{\dim_{\mathcal{H}}(A_k) : k \in \mathbb{N}\}.$$

L'inégalité inverse est non-triviale seulement quand $\sup\{\dim_{\mathcal{H}}(A_k) : k \in \mathbb{N}\} > 0$. Supposons ce fait et soit $0 \leq d < \sup\{\dim_{\mathcal{H}}(A_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Alors il existe $k$ tel que $\dim_{\mathcal{H}}(A_k) > d$, donc $\mathcal{H}^d(A_k) = \infty$. On en déduit que $\mathcal{H}^d(\cup_k A_k) = \infty$, donc $\dim_{\mathcal{H}}(\cup_k A_k) \geq d$. Ainsi

$$\dim_{\mathcal{H}}(\cup_k A_k) \geq \sup\{\dim_{\mathcal{H}}(A_k) : k \in \mathbb{N}\}.$$

□

*Remarque* 4.11. En général, le calcul de la dimension de Hausdorff d'un ensemble $A$ peut être un tache difficile. On peut borner supérieurement la dimension de Hausdorff de $A$ en exhibant des recouvrement explicites (comme dans l'exercice 82). Prouver des bornes inférieures peut s'avère plus délicat car il faut démontrer des bornes pour tout recouvrement.

**Exercice 82.**
Le but de cet exercice est de calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor $C_\infty = \cap_{n\geq 0} C_n$.
Rappel (exercice 70): L'ensemble de Cantor est défini comme suit. Soit $C_0 = [0,1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\big)$. Enfin, on pose $C_\infty = \bigcap_n C_n$.

(a) En utilisant le auto-similarité de $C_\infty$, donner un argument heuristique pour montrer que $\dim_{\mathcal{H}}(C_\infty) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

(b) Par un recouvrement explicite, montrer que $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C_\infty) \leq 1$.

(c) Soit $F$ la fonction de répartition associée à $C_\infty$. Monter que $\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|^{\frac{\log 2}{\log 3}}$ pour tout $x, y \in [0,1]$.
*Indication:* montrer l'inégalité pour $F_n$ (la fonction de répartition associée à $C_n$) par récurrence sur $n$, ensuite passer à la limite.

(d) En déduire que $\dim_{\mathcal{H}}(C_\infty) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$.

(e) ☠ Montrer que $A \mapsto \mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(A \cap C_\infty)$ est une mesure de fonction de répartition $cF$ pour une certaine constante $c > 0$.

Pour plus d'exemples intéressants, voir [9] ou [3].

## 4.3 Hausdorff vs. Lebesgue

**Théorème 4.12.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la mesure $\mathcal{H}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ est la mesure de Lebesgue. Soit $d \in \mathbb{N}$, $d < n$ et soit $F$ un espace affine de dimension $d$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors la mesure $\mathcal{H}^d$ restreinte à $F$ est la mesure de Lebesgue sur $F$. Ainsi, si $A \subset F$ est un borélien,*

$$\mathcal{H}^d(A) = \lambda_d(A).$$

**Preuve:** Soit $n \in \mathbb{N}$. On va commencer par prouver que $\mathcal{H}^n$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue $\lambda_n$. Rappelons que dans la définition de $\mathcal{H}^n$ on peut se limiter aux recouvrements par des ensembles fermés. Calculons $\mathcal{H}^n(B(0,1))$.

Pour un recouvrement $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ de $B(0,1)$ par des ensembles fermés, $\sum_k \lambda_n(B_k) \geq \lambda_n(B(0,1)) = \alpha(n)$. Mais $\lambda_n(B_k) \leq \alpha(n)\mathrm{diam}(B_k)^n$, donc

$$\alpha(n)2^{-n}\sum_k \mathrm{diam}(B_k)^n \geq 2^{-n}\sum_k \lambda_n(B_k) \geq 2^{-n}\lambda_n(B(0,1)). \tag{4.2}$$

Ainsi $\mathcal{H}^n(B(0,1)) \geq 2^{-n}\lambda_n$, donc $\mathcal{H}^n$ est une mesure non-nulle sur $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, $m > 0$ on peut recouvrir $B(0,1)$ par les cubes $C(k_1,\dots,k_n) = \prod_{j=1}^n \big[(k_j-1)2^{-m}; k_j 2^{-m}\big]$, pour $k_1,\dots,k_n \in \{-2^m+1,\dots,2^m\}$, chacun ayant un diamètre $\sqrt{n}2^{-m}$ Ainsi

$$\mathcal{H}^n(B(0,1)) \leq \alpha(n)2^{-n} \sum_{k_1,\dots,k_n\in\{-2^m+1,\dots,2^m\}} \sqrt{n}2^{-nm} = \alpha(n)\sqrt{n}.$$

En conclusion $\mathcal{H}^n$ est une mesure $\sigma$-finie sur $\mathbb{R}^n$. De plus $\mathcal{H}^n$ est invariante par isoméries (voir Proposition 4.5). Il s'en suit que $\mathcal{H}^n$ est un multiple non nul de la mesure de Lebesgue $\lambda_n$. Les arguments donnés ici montre que $2^{-n}\lambda_n \leq \mathcal{H}^n \leq \sqrt{n}\lambda_n$.

Pour prouver que le facteur de multiplicité est exactement 1, c.-à-d. que $\mathcal{H}^n = \lambda_n$, il faut travailler plus précisément dans les inégalités obtenues au-dessus. On donne par la suite une ébauche de cet argument.

Acceptons le fait (loin d'être trivial) que l'ensemble de diamètre 2 de mesure de Lebesgue maximale est la boule unité $B(0,1)$. Alors, l'inégalité (4.2) devient

$$\alpha(n)2^{-n}\sum_k \mathrm{diam}(B_k)^n \geq \sum_k \lambda_n(B_k) \geq \lambda_n(B(0,1)),$$

ce qui entraîne $\mathcal{H}^n(B(0,1)) \geq \lambda_n(B(0,1))$.
Pour l'inégalité inverse supposons par l'absurde que $\mathcal{H}^n = (1+\delta)\lambda_n$ avec $\delta > 0$.

Soit $\epsilon > 0$. On va essayer construire un recouvrement du cube $[0,1]^n$ par des ensembles de diamètre au plus $\epsilon$, qui va induire une mesure de Hausdorff strictement plus petite que $1+\delta$. Soit $m \in \mathbb{N}$ pair avec $m > 2/\epsilon$. Prenons $B_1,\dots,B_{(m/2)^n}$ les boules de rayon $1/m$ (donc diamètre plus petit que $\epsilon$) centrées au points $\big\{(k_1,\dots,k_n) : k_1,\dots,k_n \in \{\frac{1}{m},\frac{3}{m},\dots,\frac{m-1}{m}\}\big\}$. On a

$$\lambda_n\Big(\bigcup_{j=1}^{(m/2)^n} B_j\Big) = \sum_{j=1}^{(m/2)^n} \lambda_n(B_j)^n = \frac{\alpha(n)}{2^n}\sum_{j=1}^{(m/2)^n} \mathrm{diam}(B_j)^n = \frac{\alpha(n)}{2^n}.$$

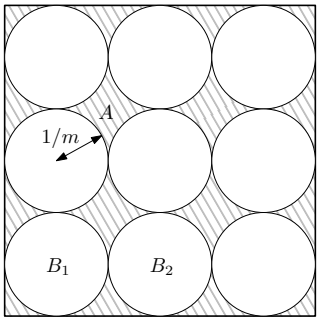



Figure 4.2: Le recouvrement utilisé pour montrer que $\mathcal{H}^n \leq \lambda_n$.

Notons $A = [0,1]^n \backslash \big(\bigcup_{j=1}^{(m/2)^n} B_j\big)$. Alors $A$ peut être couvert par des ensembles $(B_k)_{k>(m/2)^n}$ de diamètre au plus $\epsilon$ de sorte que

$$\frac{\alpha(n)}{2^n} \sum_{j>(\frac{m}{2})^n} \mathrm{diam}(B_j)^n \leq \mathcal{H}^n(A) + \frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}} = (1+\delta)\lambda_n(A) + \frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}} = (1+\delta)\Big(1 - \frac{\alpha(n)}{2^n}\Big) + \frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}}.$$

Ainsi on a obtenu un recouvrement $(B_k)_{k\geq 1}$ de $[0,1]^n$ avec $\mathrm{diam}(B_k) \leq \epsilon$ pour tout $k$ et

$$\frac{\alpha(n)}{2^n} \sum_{j\geq 1} \mathrm{diam}(B_j)^n \leq \frac{\alpha(n)}{2^n} + (1+\delta)\Big(1 - \frac{\alpha(n)}{2^n}\Big) + \frac{\delta\alpha(n)}{2^{n+1}} = 1 + \delta\Big(1 - \frac{\alpha(n)}{2^{n+1}}\Big).$$

Cela montre que $\mathcal{H}^n([0,1]^n) \leq 1 + \delta\Big(1 - \frac{\alpha(n)}{2^{n+1}}\Big)$, ce qui contredit le fait $\mathcal{H}^n = (1+\delta)\lambda_n$. Ainsi on conclut que $\mathcal{H}^n = \lambda_n$. □

*Remarque* 4.13. Les mesures $\mathcal{H}^d$ sur $\mathbb{R}^n$ avec $d < n$ sont aussi des mesures invariantes par isométries. Pourtant elles ne sont pas des multiples de $\lambda_n$, car elles ne sont ni $\sigma$-finies, ni régulières.

Ce petit lemme technique peut être utile pour estimer la dimensions de Hausdorff de certains ensembles. On peut envisager des variations pour les fonctions Hölderiennes.

**Lemme 4.14.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}^m$ une fonction.*

(i) *Si $f$ est $C$-lipschitzienne pour une constante $C > 0$ (c.-à-d. $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$, $\forall x, y \in A$), alors $\mathcal{H}^d(f(A)) \leq C^d \mathcal{H}^d(A)$. En particulier $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A)$.*

(ii) *Si $f$ est $c, C$-bilipschitzienne pour des constante $0 < c < C$ (c.-à-d. $c\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$, $\forall x, y \in A$), alors $c^d \mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(f(A)) \leq C^d \mathcal{H}^d(A)$. En particulier $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) = \dim_{\mathcal{H}}(A)$.*

**Preuve:** Soit $f : A \to \mathbb{R}^m$ $C$-lipschitzienne. À tout recouvrement $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $A$, on associe le recouvrement $\big(f(B_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ de $f(A)$. Notons que, grâce au fait que $f$ est lipschitzienne, $\mathrm{diam}(f(B_j)) \leq C\mathrm{diam}(B_j)$ pour tout $j$. Ainsi $\mathcal{H}^d(f(A)) \leq C^d \mathcal{H}^d(A)$.

Si $f$ est $c, C$-bilipschitzienne, alors $\mathcal{H}^d(f(A)) \leq C^d \mathcal{H}^d(A)$ suit du premier point. De plus, $f$ est une bijection entre $A$ et $\mathrm{Im}(A)$ avec $f^{-1}$ étant $1/c$-lipschitzienne. En appli-

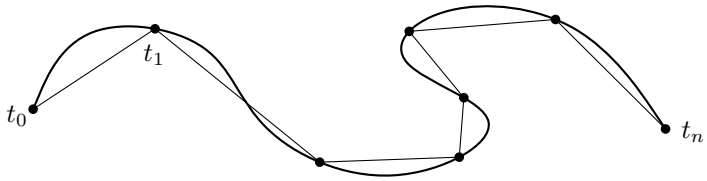



Figure 4.3: Une courbe rectifiable et une approximation de sa longueur par une subdivision.

quant le premier point à l'ensemble $f(A)$ et la fonction $f^{-1}$ on obtient $\mathcal{H}^d\big(f^{-1}(f(A))\big) = \mathcal{H}^d(A) \leq c^{-d}\mathcal{H}^d(f(A))$, ce qui donne l'inégalité désirée.

Les inégalités sur la dimension de Hausdorff de $f(A)$ suivent directement des inégalités sur la mesure de Hausdorff. □

**La mesure de Hausdorff d'une courbe rectifiable** Une courbe sur $\mathbb{R}^d$ est l'image d'une fonction continue injective $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Pour une telle fonction $f$, posons

$$L(f) = \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1\Big\}.$$

On dit que $f$ est rectifiable si $L(f) < \infty$. Dans ce cas on appelle $L(p)$ la longueur de $f$.

On peut facilement montrer que si $f, g$ sont deux fonctions injectives de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ de même image, alors $L(f) = L(g)$. Ainsi, on peut parler de courbe rectifiable et de longueur d'une courbe.

Une famille $(t_0, \ldots, t_n)$ avec $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ est appelée une subdivision de $[0,1]$ et son pas est $\max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq n\}$. Si $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_n)$ et $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_m)$ sont des subdivisions de $[0,1]$, avec $\mathbf{s}$ qui est plus fine que $\mathbf{t}$ (c.-à-d. telles que tout point $t_j$ de $\mathbf{t}$ est aussi un point $s_k$ de $\mathbf{s}$), alors

$$\sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|f(s_j) - f(s_{j-1})\|.$$

De plus, si $f$ est rectifiable, alors $L(f)$ est est obtenue comme la limite de $\sum_{j=1}^{n_k} \|f(t_j^{(k)}) - f(t_{j-1}^{(k)})\|$ pour toute suite de subdivisions $(t_1^{(k)}, \ldots, t_{n_k}^{(k)})$ de pas tendant vers 0.

Mentionnons enfin que, si $f$ est dérivable, alors $L(f) = \int_0^1 \|f'(t)\| dt$.

**Proposition 4.15.** *Soit $f$ une courbe rectifiable dans $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(f)) = L(f)$ et $\dim_{\mathcal{H}}(\mathrm{Im}(f)) = 1$.*

**Preuve:** Commençons par montrer que $\mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(f)) \leq L(f)$.

Soit $\epsilon > 0$ et $n$ tel que $m$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$ avec $|x - y| \leq \frac{1}{n}$ on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$ (un tel $m$ existe par uniforme continuité de la fonction continue $f$.)

Considérons la subdivision régulière de $[0,1]$ de pas $1/n$, à savoir $(t_j = \frac{j}{n})_{0\le j\le n}$. On y associe le recouvrement de $\mathrm{Im}(f)$ donné par $B_j = f([t_{j-1}, t_j])$, $j = 1, \dots, n$. Par compacité, le diamètre de chaque ensemble $B_j$ est réalisé par une parie de points $t_{j-1} \le s_j \le s'_j \le t_j$:

$$\mathrm{diam}(B_j) = \|f(s'_j) - f(s_j)\|.$$

Mais la suite $(0, s_1, s'_1, s_2, \dots, s_n, s'_n, 1)$ est une subdivision de $[0,1]$, donc

$$\begin{aligned}\sum_j \mathrm{diam}(B_j) &= \sum_j \|f(s'_j) - f(s_j)\| \\ &\le \|f(s_1) - f(0)\| + \|f(s'_1) - f(s_1)\| + \cdots + \|f(s'_n) - f(s_n)\| + \|f(s'_n) - f(1)\| \le L(f).\end{aligned}$$

Gardant en tête que $\alpha(1)/2 = 1$, on obtient $\mathcal{H}^d(\mathrm{Im}(f)) \le L(f)$.

Passons à l'inégalité inverse. Soit $0 \le t < s \le 1$ et soit $\pi$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur la droite $d$ qui passe par $f(t)$ et $f(s)$. Alors $\pi$ est 1-lipschitzienne et $\pi(f([s,t])$ est un intervalle sur la droite $d$, contenant $f(t)$ et $f(s)$. Ainsi

$$\mathcal{H}^1(f([t,s])) \ge \mathcal{H}^1\big[\pi(f([t,s]))\big] \ge \|f(t) - f(s)\|.$$

On en déduit que, pour toute subdivision $(t_0, \dots, t_n)$ de $[0,1]$

$$\mathcal{H}^1(f([0,1])) = \sum_{j=1}^n \mathcal{H}^1(f([t_{j-1}, t_j])) \ge \sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|.$$

Il s'en suit que $\mathcal{H}^1(f([0,1])) \ge L(f)$. □

Il existe des courbes continues (comme la courbe de Peano, le contour du flocon de Koch – voir l'exercice 83 – ou les trajectoires typiques du mouvement Brownien) avec dimensions de Hausdorff strictement plus grande que 1. Il s'agit évidement de courbes qui ne sont pas rectifiables.

### La mesure de Hausdorff d'une variété

**Proposition 4.16.** *Soit $M$ une variété différentielle de dimension $d$ plongée dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{H}^d$ est une mesure non-nulle et $\sigma$-finie sur $M$. En particulier* $\dim_{\mathcal{H}}(M) = d$.

**Preuve:** Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Pour tout point $x \in M$ il existe un rayon $r(x) > 0$ et un difféomorphisme $f_x : B(x, r_x) \to U_x \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f\big(M \cap B(x, r_x)\big) \subset \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$ et $f_x(x) = 0$. Par compacité de $K$, il existe un ensemble fini $\mathcal{X}$ de points de $M$ tels que $M \cap K \subset \cup_{x\in\mathcal{X}} B(x, r_x)$. De plus il existe des constantes $0 < c < C$ telles que $\|df_x(y)\| \le C$ et $\|df_x^{-1}(y)\| \ge c$ pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $y \in B(x, r_x)$. Cela implique que toutes les fonctions $(f_x)_{x\in\mathcal{X}}$ sont $c, C$-bilipschitziennes. Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$C^{-d}\mathcal{H}^d\big(f_x(M \cap B(x, r_x))\big) \le \mathcal{H}^d\big(M \cap B(x, r_x)\big) \le c^{-d}\mathcal{H}^d\big(f_x(M \cap B(x, r_x))\big).$$

Mais comme $f_x$ est $c, C$-bilipschitzienne,

$$B^d(0, cr_x) \times \{0\}^{n-d} \subset f_x(M \cap B^n(x, r_x)) \subset B^d(0, Cr_x) \times \{0\}^{n-d}.$$

(Dans cette équation on a écrit $B^d$ pour la boule de $\mathbb{R}^d$ et $B^n$ pour la boule de $\mathbb{R}^n$.) On conclut que

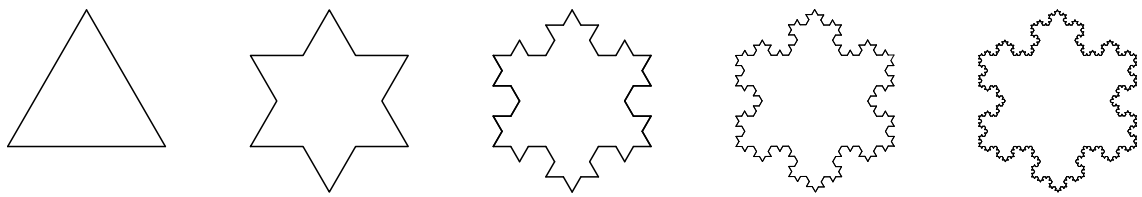
$$\mathcal{H}^d\big(M \cap B(x, r_x)\big) \in \Big[\Big(\tfrac{c}{C} r_x\Big)^d, \Big(\tfrac{C}{c} r_x\Big)^d\Big],$$

donc

$$0 < \Big(\frac{c}{C}\Big)^d \sum_{x \in \mathcal{X}} r_x^d \leq \mathcal{H}^d\big(M \cap K\big) \leq \Big(\frac{C}{c}\Big)^d \sum_{x \in \mathcal{X}} r_x^d < \infty.$$

En conclusion $\mathcal{H}^d$ est une mesure non-nulle et $\sigma$-finie sur $M$. Le fait que $\dim_{\mathcal{H}}(M) = d$ suit directement. □

**Exercice 83.**
Montrer que le contour du flocon de Koch est bien une courbe continue et qu'elle n'est pas rectifiable. Calculer sa dimension de Hausdorff.



Cinq étapes dans la construction du Flocon de Koch.

## 4.4 Utilisation pour le changement de variable sphérique

Soit $n \geq 2$ et notons $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. Alors $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{S}^{n-1}) = n-1$ et $\mathcal{H}^{n-1}$ est une mesure finie sur $\mathbb{S}^{n-1}$.

**Théorème 4.17.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ une fonction borélienne. Alors*

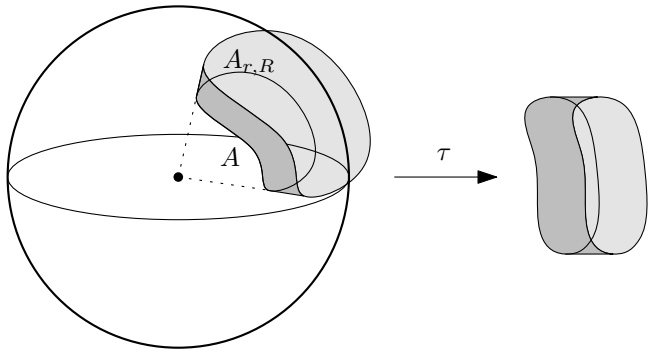
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{z \in \mathbb{S}^{n-1}} f(rz)\, r^{n-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}(z)\, dr.$$

**Preuve:** Pour $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$ borélien et $r < R$ posons $A_{r,R} = \{\rho z : z \in A \text{ et } r \leq \rho \leq R\}$. On commence par montrer que

$$\lambda_n(A_{r,R}) = \mathcal{H}^{n-1}(A) \int_r^R \rho^{n-1}\, d\rho. \tag{4.3}$$

Fixons $A$ et $r < R$ et $\delta > 0$.

On commence supposer que $r = 1$, $R < 1 + \epsilon$ et que $\operatorname{diam}(A) < \epsilon$ pour un certain $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$ (voir plus bas comment le choisir). Soit $z = (1, 0, \ldots, 0)$; quitte à tourner la sphère, on peut supposer que $z \in A$. Notons $\pi$ la projection de $\mathbb{S}^{n-1}$ sur le plan $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Spit $\tau : A_{1,R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $\tau(\rho z) = (\pi(z), \rho)$. Si on impose que $\operatorname{diam}(A) < \epsilon < \delta$ et $R < 1 + \epsilon$ pour un certain $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$, on obtient que $\tau$ est une fonction bilipschitzienne de constantes $(1+\delta)^{-1}, 1+\delta$ (voir l'image pour une explication). Ainsi




$$\mathcal{H}^{n-1}(A)\int_1^R \rho^{n-1}\,d\rho \le (1{+}\delta)^n\mathcal{H}^{n-1}(\pi(A))(R{-}1) = (1{+}\delta)^n\lambda_n(\tau(A_{1,R})) \le (1{+}\delta)^{2n}\lambda_n(A_{1,R}).$$

L'inégalité inverse fonctionne de la même façon, et on obtient

$$\mathcal{H}^{n-1}(A)\int_1^R \rho^{n-1}\,d\rho \ge \frac{1}{(1+\delta)^{2n}}\lambda_n(A_{1,R}).$$

On conclut que, si $\operatorname{diam}(A) \le \epsilon$, $r = 1$ et $R \in [1, 1+\epsilon]$, alors

$$\frac{1}{(1+\delta)^{2n}}\lambda_n(A_{1,R}) \le \mathcal{H}^{n-1}(A)\int_1^R \rho^{n-1}\,d\rho \le (1+\delta)^{2n}\lambda_n(A_{1,R}). \tag{4.4}$$

En sommant (4.4) pour différents $A$, on généralise ces inégalités à tout ensemble borélien $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$. En utilisant l'effet des dilatation sur $\lambda_n$ et un simple changement de variable, déduit (4.4) pour tous $r < R$ avec $R \le (1+\epsilon)r$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+\delta)^{2n}}\lambda_n(A_{r,R}) &= \frac{1}{(1+\delta)^{2n}}r^n\lambda_n(A_{1,R/r})\\ &\le r^n\mathcal{H}^{n-1}(A)\int_1^{R/r}\rho^{n-1}\,d\rho = \mathcal{H}^{n-1}(A)\int_r^R\rho^{n-1}\,d\rho\\ &\le (1+\delta)^{2n}r^n\lambda_n(A_{1,R/r})\\ &= (1+\delta)^{2n}\lambda_n(A_{r,R}).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Enfin, en sommant (4.5) sur des pairs $r, R$, on généralise (4.5) à tous $r < R$. Vu que $\delta > 0$ à était choisi arbitrairement, on conclut (4.3).

Posons $\mathcal{C} = \{A_{r,R} : r < R,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})\}$. Alors (4.3) montre que, pour tout $B \in \mathcal{C}$,

$$\lambda_n(B) = \int_{r=0}^{\infty}\int_{z\in\mathbb{S}^{n-1}} \mathbf{1}_B(rz)\,r^{n-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}(z)\,dr. \tag{4.6}$$

De plus, $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies et $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir Exercice 84). Par un argument de classes monotones standard, on montre que (4.6) est vraie pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. En fin, par le théorème de convergence monotone, cela implique le résultat pour les fonctions positives, ensuite, par soustraction, pour les fonctions intégrables de signe quelconque. □

**Exercice 84.**
Monter que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
*Indication:* montrer que, pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ et tout $x \in U$, il existe $\epsilon > 0$ et $A \subset \mathcal{C}$ avec $B(x, \epsilon) \subset A \subset U$.

## 4.5 Complément: dimension de Minkowski

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\epsilon > 0$, notons $N_\epsilon(A)$ le nombre minimal de boules de rayon $\epsilon$ nécessaire pour couvrir $A$. On va se limiter aux ensembles bornés $A$, de sorte que $N_\epsilon(A)$ soit fini. Dans l'esprit de la dimension de Hausdorff, on définit la dimension de Minkowski

$$\dim_{\mathcal{M}}(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N_\epsilon(A)}{-\log \epsilon}.$$

La motivation de cette définition est que, si on a besoin de $\epsilon^{-d}$ boules de rayon $\epsilon$ pour couvrir $A$, alors il est raisonnable de dire que la dimension de $A$ est $d$. C'est par exemple le cas des sous-espaces vectoriels de dimension $d$ dans $\mathbb{R}^n$.

**Lemme 4.18.** *Soit $A$ un sous-espace vectoriel de dimension $d$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors* $\dim_{\mathcal{M}}(A \cap B(0,1)) = d$.

Mentionnons que on peut remplacer la nombre de boules de rayon $\epsilon$ par le nombres de cubes de taille $\epsilon$ et on obtient le même résultat.

Une définition équivalente de la dimension de Minkowski est la suivante.

**Lemme 4.19.** *Soit $A$ un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ avec une dimension de Minkowski bien définie. Alors*

$$\dim_{\mathcal{M}}(A) = n + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \lambda_n(A + B(0,\epsilon))}{-\log \epsilon},$$

*où* $A + B(0,\epsilon) = \{x + y : x \in A, \|y\| < \epsilon\}$.

Cette notion est intuitive et plus facile a calculer que la dimension de Hausdorff, par contre elle a multiples désavantages.

- La dimension de Minkowski n'est pas toujours définie. En effet la limite n'existe pas toujours; on peut quand même toujours prendre la limite supérieure ou inférieure.
- La dimension de Minkowski de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est égale à 1, alors que celle d'un point est égale à 0. Généralement $\dim_{\mathcal{M}}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq \max_n \dim_{\mathcal{M}}(A_n)$, mais il n'y a pas toujours égalité.
- On ne peut pas définir une mesure de dimension $d$ associé aux recouvrements de Minkowski. Une telle notion existe (il s'agit du contenu de Minkowski) mais ce n'est pas une mesure borélienne.

**Lemme 4.20.** *Pour tout ensemble $A$ dont la dimension de Minkowski est bien définie,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{M}}(A).$$

**Exercice 85.** (a) Démontrer les trois lemmes sur la dimension de Minkowski.

(b) Prouver que $\dim_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$.

(c) Donner un exemple d'ensemble borné $A$ dont la dimension de Minkowski n'est pas définie.

# Partie II

# Éléments d'analyse fonctionnelle

# Chapitre 5

# Analyse fonctionnelle abstraite

Avant d'étudier des espaces de fonctions spécifiques, on va faire une courte présentation des questions qu'on se pose généralement en analyse fonctionnelle.

## 5.1 Espaces vectoriels normés

### 5.1.1 Norme

Dans les chapitres suivants on travaillera avec des espaces vectoriels de fonction (en général il s'agit de sous-espaces vectoriels de l'espace des fonctions $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$ pour un certain ensemble $X$). Étudions donc les espaces vectoriels et leur propriétés topologiques.

Par la suite, sauf mention contraire, tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

**Définition 5.1.** *Soit $E$ un espace vectoriel. Une* norme *sur $E$ est une fonction $\|.\| : E \to [0, +\infty)$ telle que, pour tout $x, y \in E$,*

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(iii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

*On dit que $(E, \|.\|)$ forment un espace vectoriel normé.*

La norme est une notion plus restrictive que celle de distance. En effet, une norme induit une distance, comme l'affirme la proposition suivante. Par contre, pas toute distance sur un espace vectoriel est issue d'une norme.

**Proposition 5.2.** *Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, alors $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur $E$.*

La proposition se montre directement à partir des définitions de norme et distance. Ainsi, un espace vectoriel normé est aussi un espace métrique et admet donc une topologie. Quand on parle d'un espace vectoriel normé, on utilise par défaut la topologie associée a cette norme.

Généralement la topologie dépend fortement de la norme dont elle proviennent. De plus, on rencontre des fois des espaces vectoriels avec des topologies qui ne correspondent pas a des normes.

### 5.1.2 Produit scalaire

La norme d'un espace vectoriel peux venir d'un produit scalaire; une notion encore plus rigide. On va voir par la suite que ce cas est très particulier et qu'il est souvent bien plus facile à étudier.

**Définition 5.3.** *Soit $E$ un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur $E$ est une fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes:*

(i) *pour tout $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,*

(ii) *pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \langle x+y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle & \qquad \langle \lambda x, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle \\ \langle x, y+z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle & \qquad \langle x, \lambda z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle, \end{aligned} \tag{5.1}$$

(iii) *pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.*

Une fonction de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant (5.1) est appelée *forme bilinéaire*. Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire symétrique (i) et définie positive (iii).

La deuxième ligne de (5.1) peut s'obtenir à partir de la première à l'aide de symétrie.

**Théorème 5.4** (Inégalité de Cauchy Schwarz)**.** *Soient $E$ un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $E$. Alors, pour tout $x, y \in E$,*

$$\langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}. \tag{5.2}$$

*De plus, on a égalité si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $ax = by$.*

**Preuve:** Écrivons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$. Alors, on peut décomposer le produit scalaire pour obtenir:

$$g(\lambda) = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Ainsi $g$ est une fonction quadratique en $\lambda \in \mathbb{R}$ qui est toujours positive. On déduit que son déterminant est négatif, à savoir

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0.$$

L'inégalité est donc prouvée.

Supposons qu'on a égalité dans (5.2); ce qui s'écrit aussi $\Delta = 0$. Si $y = 0$ on peut écrire $y = 0 \cdot x$. On peut donc supposer que $y \neq 0$; on déduit alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $g(\lambda) = 0$. Ainsi $x = \lambda \cdot y$. En écrivant explicitement (5.2) avec cette condition, on obtient:

$$\langle x, y \rangle = \lambda \langle y, y \rangle \leq |\lambda| \cdot \langle y, y \rangle = \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}.$$

On voit qu'on a égalité que si $\lambda \geq 0$.

Inversement, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ avec $a \cdot x = b \cdot y$, un calcul directe montre qu'on a égalité dans (5.2) $\square$

**Corollaire 5.5.** *Soient $E$ un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $E$. Alors la fonction $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur $E$.*

Le corollaire se montre facilement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On laisse la preuve en exercice. Désormais, pour un espace vectoriel avec un produit scalaire la norme par défaut est celle donnée par la produit scalaire.

### 5.1.3 Complétude

**Définition 5.6.** *Un espace vectoriel normé complet est appelé* **espace de Banach**.
*Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui le rend complet est appelé* **espace de Hilbert**.

On verra dans la partie 5.1.4 que les notions d'espaces de Banach et de Hilbert sont intéressantes que pour des espaces de dimension infinie.

On encourage le lecteur à revenir à la section 0.2.2 pour revoir les propriétés des espaces complets. On rappelle également deux exercices importants.

**Exercice 86** (Important !)**.**
Soient $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$ un ensemble dense dans $E$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue (c.-à-d. telle que, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in E$ avec $d(x, y) < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$).
Montrer qu'il existe une unique fonction $F : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que $F$ est uniformément continue.
Donner un contre-exemple si on suppose $f : A \to \mathbb{R}$ seulement continue, pas uniformément continue.

**Exercice 87** (Important !)**.**
Soient $E$ un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$ avec $\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$. Montrer alors que $\sum_{n=1}^{N} x_n$ converge quand $N \to \infty$ vers un élément de $E$ qu'on va noter $\sum_{n\geq 1} x_n$.

*En d'autres mots, montrer que dans un espace de Banach, les sommes absolument convergentes convergent. Ce résultat va être utilisé implicitement par la suite.*
Monter que pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n\geq 1} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n>N} x_n$$

et que $\| \sum_{n>N} x_n \| \leq \sum_{n>N} \|x_n\|$.

**Exercice 88** (Théorème de point fixe de Banach)**.**
Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $f : E \to E$ une application contractante, c.-à-d. telle qu'il existe $c \in [0, 1)$ avec $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que $f$ admet un unique point fixe (un point fixe est un $x \in E$ tel que $f(x) = x$).
*Indication:* pour l'existence, prendre un point $x_0 \in E$ et étudier la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers un point de $E$. Quelle est sa vitesse de convergence ?
*Remarque:* la preuve s'adapte facilement aux espaces métriques complets $E$.

### 5.1.4 Dimension finie vs. dimension infinie

Les espaces vectoriels normés ont des propriétés beaucoup plus diverses en dimension infinie qu'en dimension finie. On donne par la suite quelques exemples.

**Théorème 5.7.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $\|.\|$ et $|||.|||$ deux normes sur $E$. Il existe des constantes $0 < c < C$ telles que*

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|, \qquad \forall x \in E.$$

*On dit que les normes $\|.\|$ et $|||.|||$ sont équivalentes. Cela implique que les topologies induites par $\|.\|$ et $|||.|||$ sont identiques.*

En d'autres mots, toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes. Ainsi, en dimension finie, le choix de la norme a très peu d'importance; souvent il n'est même pas spécifié. Cela n'est plus vrai en dimension infinie. Pour la preuve et plus de détails, voir l'exercice 89.

**Théorème 5.8.** *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

On laisse la preuve en exercice.

Enfin, la notion de compacité est bien plus simple dans un espace vectoriel normé de dimension finie que en dimension infinie.

**Théorème 5.9.** *Soit $\mathcal{B}(0,1)$ la boule unité d'un espace vectoriel normé $E$. Alors $\mathcal{B}(0,1)$ est précompacte si et seulement si $E$ est de dimension finie.*

Une formulation équivalente de ce théorème est que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les ensembles compacts sont exactement les ensembles fermés et bornés. Toutefois, dans les espaces vectoriels normés de dimension infinie, cette équivalence n'est jamais valable. En effet, dans ce cadre, les ensembles compacts sont fermés et bornés, mais pas tous les ensembles fermés et bornés sont compacts.

**Preuve:** Si $E$ est de dimension finie, fixons une base $(e_1, \ldots, e_n)$. En utilisant l'équivalence des normes, on peut se limier au cas ou la norme est $\|.\|_\infty$ pour cette base.

Soit $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite avec $\|a_n\| < 1$ pour tout $n$. On veut montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergente. En utilisant la compacité de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ on montre qu'on peut extraire des sous-suites telles que chaque coordonnée converge. Cela suffit pour conclure.

Si $E$ est de dimension infinie, on construira une suite $(x_n) \in \overline{\mathcal{B}}(0,1)^{\mathbb{N}}$ de manière récurrente comme suit. Prendre $x_1$ de norme 1 arbitrairement. Supposons $x_i$ construit pour $i \leq n$ et définissons $x_{n+1}$. Soit $y \notin \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. La fonction $\phi : \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \|x + y\|$ est continue et tend vers $\infty$ quand $\|x\| \to \infty$. Comme

$\dim\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)<\infty$, $\phi$ atteint son min à un point $z$. Posons $x_{n+1}=\frac{y+z}{\|y+z\|}$. A noter que $y+z\neq 0$ car $y\notin \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$, donc $x_{n+1}$ est bien défini. Enfin, pour $k\leq n$,

$$\|x_{n+1}-x_k\|=\frac{1}{\|y+z\|}\|y+z+\|y+z\|\cdot x_k\|=\frac{1}{\|y+z\|}\phi(z+\|y+z\|\cdot x_x)\geq\frac{1}{\|y+z\|}\phi(z)=1.$$

La suite $(x_n)$ construite ainsi a les propriétés suivantes:

$$\|x_n\|=1 \quad \text{et} \quad \|x_n-x_m\|=1, \quad \forall n\neq m.$$

Cela implique que $(x_n)$ ne contient pas de sous-suite convergente, donc que $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$ n'est pas compacte. □

**Exercice 89.**
Soit $E$ un espace vectoriel. On dit que deux normes $\|.\|$ et $|||.|||$ sur $E$ sont équivalentes s'il existe des constantes $0<c<C$ telles que

$$c\|x\|\leq |||x|||\leq C\|x\|, \qquad \forall x\in E.$$

(a) Montrer que deux normes sont équivalentes si et seulement si elles génèrent la même topologie sur $E$.

(b) Montrer que si deux normes sont équivalentes, alors une suite de Cauchy dans une norme est aussi de Cauchy pour l'autre. Déduire que l'espace est complet dans une norme si et seulement s'il est complet dans une autre.

(c) Montrer que si $E$ est de dimension finie, alors toutes les normes sur $E$ sont équivalentes.

(d) On écrit $\ell_b(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles bornées. Donner deux normes sur $\ell_b(\mathbb{R})$ qui ne soit pas équivalentes.

**Exercice 90.**
Prouver le Théorème 5.8.
*Indication:* Fixer une base de $E$ et utiliser une norme explicite (p.ex. la norme $\|.\|_\infty$). La preuve se base sur la complétude de $\mathbb{R}$; procéder coordonnée par coordonnée.

## 5.2 Dual

### 5.2.1 Norme d'operateur

**Définition 5.10.** *Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Pour une application linéaire $u:E\to F$, on pose*

$$\|u\|=\sup\big\{\|u(x)\|_F:\ x\in E,\ \|x\|_E=1\big\}.$$

**Théorème 5.11.** *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Pour $u : E \to F$ linéaire on a $\|u\| < \infty$ si et seulement si $u$ est continue.*
*Écrivons $\mathscr{L}(E, F)$ pour l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$. Alors $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{L}(E, F)$; on l'appelle la* norme d'opérateur.

**Preuve:** Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Si $\|u\| < \infty$, alors pour tout $x, h \in E$,

$$\|u(x+h) - u(x)\|_F = \|u(h)\|_F \leq \|u\| \cdot \|h\|_E \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Ainsi $u$ est continue (même lipschitzienne donc uniformément continue).

Inversement, si $\|u\| = \infty$, alors il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ avec $\|x_n\|_E = 1$ et $\|u(x_n)\|_F \to \infty$. On a donc

$$\frac{x_n}{\|u(x_n)\|_F} \to 0, \qquad \text{mais} \qquad \Big\| u\Big(\frac{x_n}{\|u(x_n)\|}\Big)\Big\|_F = 1.$$

Ainsi $u$ n'est pas continue.

Montrons que $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{L}(E, F)$. Pour $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$, on a

$$\|u(x) + v(x)\|_F \leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \leq \|u\| + \|v\|, \qquad \forall x \in E \text{ avec } \|x\| = 1.$$

Ainsi $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda \cdot u\| = \sup\big\{|\lambda| \cdot \|u(x)\|_F : x \in E,\ \|x\|_E = 1\big\} = |\lambda| \cdot \|u\|.$$

Enfin, si $\|u\| = 0$, alors $u(x) = 0$ pour tout $x \in E$, donc $u = 0$. □

*Remarque* 5.12. Le théorème précédent nous dit qu'une application linéaire est continue si et seulement si elle est uniformément continue et même lipschitzienne.

### 5.2.2 Dual et bi-dual

**Définition 5.13.** *Une forme linéaire sur un espace vectoriel normé $E$ est une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}$.*
*On écrit $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ pour l'espace des formes linéaires continues. L'espace $E^*$ muni de la norme d'opérateur est un espace vectoriel normé qu'on appelle le* dual *de $E$.*

*Remarque* 5.14. Si $E$ est un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors il existe des formes linéaires discontinues définies sur $E$. On peut exhiber simplement des exemples avec $E$ un espace vectoriel normé non-complet (voir exercices 94 et 95). Quand $E$ est de Banach, l'existence de formes linéaires discontinues est une consequence de l'axiome du choix (voir exercices 99 et 100); en particulier, il n'existe pas d'exemples explicites.

**Théorème 5.15.** *Pour tout espace vectoriel normé $E$, $E^*$ est un espace de Banach.*

**Preuve:** Il s'agit de montrer que $E^*$ est complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $E^*$. Alors, pour tout $x \in E$, $|u_n(x) - u_m(x)| \leq \|u_n - u_m\| \cdot \|x\|$. Il s'en suit que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, elle converge donc vers une limite qu'on note $u(x) \in \mathbb{R}$.

En prenant $n \to \infty$ dans

$$u_n(ax + by) = au_n(x) + bu_n(y),$$

on déduit que $u$ est linéaire.

Pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$,

$$|u(x)| = \lim_n |u_n(x)| \leq \liminf_n \|u_n\|$$

Le fait que $(u_n)_n$ est de Cauchy, implique que $(\|u_n\|)_n$ est aussi de Cauchy, donc bornée. Ainsi $\|u\| < \infty$, donc $u$ est continue.

Enfin montrons que $(u_n)$ converge vers $u$ dans la topologie de $E^*$. Pour $\epsilon > 0$ il existe $N$ tel que pour $n, m \geq N$ et tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, $|u_n(x) - u_m(x)| \leq \|u_n - u_m\| < \epsilon$. En prenant $m \to \infty$ on obtient

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \epsilon, \qquad \forall n \geq N \text{ et } x \in E \text{ avec } \|x\| = 1.$$

On déduit que $\|u_n - u\| \leq \epsilon$, d'où $\|u_n - u\| \to 0$. □

**Théorème 5.16.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rll} \Phi : & E \to & (E^*)^* \\ & x \mapsto & \big(u \mapsto u(x)\big) \end{array}$$

*est une isométrie. On dit que $E$ est contenu de manière canonique dans $(E^*)^*$.*

L'espace $(E^*)^*$ est appelé le *bi-dual* de $E$. Le théorème nous dit donc que tout espace vectoriel normé $E$ est contenu dans son bi-dual. Si $E = (E^*)^*$ (ou plus précisément si l'injection $\Phi$ du théorème précédent est une bijection), alors on dit que $E$ est *réflexif*. Par la suite, on va voir des exemples d'espaces réflexifs et pas réflexifs.

**Preuve:** Écrivons $\Phi_x$ pour l'image d'un élément $x \in E$ par $\Phi$. Pour commencer, montrons que $\Phi_x \in (E^*)^*$. Pour $u, v \in E^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$\Phi_x(\lambda u + \mu v) = \lambda u(x) + \mu v(x) = \lambda \Phi_x(u) + \mu \Phi_x(v).$$

De plus, il faut montrer que $\Phi_x$ est continue. Pour $u \in E^*$ on a

$$|\Phi_x(u)| = |u(x)| \leq \|u\|_{E^*} \cdot \|x\|_E.$$

Ainsi $\Phi_x$ est bien une forme linéaire continue sur $E^*$ avec $\|\Phi_x\|_{(E^*)^*} \leq \|x\|_E$.

Montrons maintenant que $\Phi$ est bien linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\Phi_{\lambda x+\mu y}$ est la forme linéaire sur $E^*$ donnée par:

$$\Phi_{\lambda x+\mu y}(u) = u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda \Phi_x(u) + \mu \Phi_y(u), \quad \forall u \in E^*.$$

On a donc $\Phi_{\lambda x+\mu y} = \lambda\Phi_x + \mu\Phi_y$, donc que $\Phi$ est linéaire.

Enfin, montrons que $\Phi$ est une isométrie. Soit $x \in E$. On a déjà vu que $\|\Phi_x\|_{(E^*)^*} \leq \|x\|_E$, on va donc se concentrer sur l'inégalité inverse. Le cas $x = 0$ est trivial, on peut donc se limiter à $x \neq 0$.

Soit $F = \mathbb{R}x$ la droite engendrée par $x$ et $v$ la forme linéaire définie sur $F$ par $v(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Alors $v$ est une forme linéaire sur $F$ de norme 1. Par le théorème de Hahn-Banach (ou plus précisément par son Corollaire 5.18 à suivre), il existe un prolongement $u \in E^*$ de $v$ de même norme que $v$. Alors

$$|\Phi_x(u)| = |u(x)| = \|x\|_E = \|u\|_{E^*} \cdot \|x\|_E,$$

donc $\|\Phi_x\|_{(E^*)^*} \geq \|x\|_E$. On conclut que $\|\Phi_x\|_{(E^*)^*} = \|x\|_E$, donc que $\Phi$ est une isométrie. □

### 5.2.3 Théorème de Hahn-Banach

**Théorème 5.17** (Hahn-Banach)**.** *Soit $E$ un espace vectoriel et $p : E \to [0, +\infty)$ une fonction telle que*

$$\forall x \in E,\ \alpha \geq 0 \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in E \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y). \tag{5.3}$$

*De plus, soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $\Lambda : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue avec $\Lambda(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{\Lambda} : E \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec $\Lambda$ sur $F$ et telle que*

$$\tilde{\Lambda}(x) \leq p(x) \qquad \text{pour tout } x \in E. \tag{5.4}$$

Ce théorème est surtout utile si $\Lambda$ est une forme linéaire continue sur $F$ de norme $c = \|\Lambda\| > 0$ et qu'on pose $p(x) = c\|x\|$ (qui satisfait evidement (5.3)). Alors la propriété (5.4) appliquée a $x$ et $-x$ devient

$$\tilde{\Lambda}(x) \leq c\|x\| \quad \text{et} \quad -\tilde{\Lambda}(x) \leq c\|-x\| = c\|x\| \qquad \forall x \in E,$$

ou plus simplement $|\tilde{\Lambda}(x)| \leq c\|x\|$. Ainsi $\tilde{\Lambda}$ est un prolongement de $\Lambda$ à $E$, de même norme que $\Lambda$. Ce qu'on vient de prouver est la conséquence suivante du théorème de Hahn-Banach.

**Corollaire 5.18.** *Soient $E$ un espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $\Lambda : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une forme linéaire continue $\tilde{\Lambda} : E \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec $\Lambda$ sur $F$ et telle que $\|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$.*

**Preuve du Théorème 5.17:** Soient $p$, $F$ et $\Lambda$ comme dans l'énoncé.

Montrons pour commencer que pour un $u \notin F$ fixé, on peut prolonger $\Lambda$ à $F \oplus \mathbb{R}u$ et assurant (5.4) pour tout $x \in F \oplus \mathbb{R}u$. Notons $\tilde{\Lambda}$ un tel prolongement et posons $\tilde{\Lambda}(u) = \alpha$.

Alors $\tilde{\Lambda}$ est entièrement définie:

$$\tilde{\Lambda}(tu+v) = t\alpha + \Lambda(v), \qquad \forall v \in F \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

La valeur de $\alpha$ doit être telle que

$$\tilde{\Lambda}(tu+v) = t\alpha + \Lambda(v) \leq p(tu+v) \qquad \text{pour tous } t \in \mathbb{R} \text{ et } v \in F. \tag{5.5}$$

En divisant par $t$ et prenant en compte son signe, on conclut que $\alpha$ doit satisfaire

$$\sup_{s>0;\, w\in F} \frac{\Lambda(w) - p(w-su)}{s} \leq \alpha \leq \inf_{t>0;\, v\in F} \frac{p(tu+v) - \Lambda(v)}{t} \tag{5.6}$$

Ainsi, pour qu'un tel $\alpha$ existe, il faut et il suffit pour le sup ci-dessus d'être plus petit que le inf. Soient $v, w \in F$ et $t, s > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{p(tu+v) - \Lambda(v)}{t} - \frac{\Lambda(w) - p(w-su)}{s} &= \frac{1}{ts}\big[s\,p(tu+v) + t\,p(w-su) - \Lambda(sv+tw)\big] \\
&= \frac{1}{ts}\big[p(sv+tsu) + p(tw-tsu) - \Lambda(sv+tw)\big] \\
&\geq \frac{1}{ts}\big[p(sv+tw) - \Lambda(sv+tw)\big] \geq 0.
\end{aligned}$$

La première égalité est due à la linéarité de $\Lambda$, la seconde à la première propriété de (5.3). La première inégalité est due à la sous-additivité de $p$ (voir (5.3)) et la dernière à (5.4).

Ainsi l'inégalité entre le sup et le inf de (5.6) est établie. Il existe donc un choix de $\alpha$ qui satisfait (5.5), ce qui montre que $\Lambda$ peut être étendue à $F \oplus \mathbb{R}u$ et assurant (5.4).

Maintenant prolongeons $\Lambda$ à l'intégralité de $E$. L'étape précédente jouent le rôle d'un pas de récurrence. En effet, si l'espace $E$ est de dimension finie, on peut utiliser le pas précédent pour faire une récurrence sur la dimension de $F$. Pour une preuve générale, on va faire appel au lemme de Zorn (un énoncé équivalent à l'axiome du choix).

**Lemme 5.19** (Zorn)**.** *Soit $\Omega$ un ensemble partiellement ordonné tel que, pour tout sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\Omega$ qui est totalement ordonné, il existe une borne supérieure de $\mathcal{A}$ (c.-à-d. un $x \in \Omega$ tel que $y \leq x$ pour tout $y \in \mathcal{A}$). Alors $\Omega$ au moins un élément maximal (c.-à-d. un $x \in \Omega$ tel qu'il n'existe pas de $y \in \Omega$ avec $x \leq y$).*

Continuons la preuve du Théorème de Hahn-Banach à l'aide de ce lemme qu'on admet. Soit $\Omega$ l'ensemble des couples $(G, \tilde{\Lambda})$ où $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ contentant $F$ et $\tilde{\Lambda}$ est une forme linéaire sur $G$ qui prolonge $\Lambda$ et satisfaisant $\tilde{\Lambda}(x) \leq p(x)$, $\forall x \in G$. Un ordre partiel sur $\Omega$ est donné par $(G, \tilde{\Lambda}) \leq (G', \tilde{\Lambda}')$ si $G \subset G'$ et $\tilde{\Lambda}'$ coïncide avec $\tilde{\Lambda}$ sur $G$.

On va appliquer le lemme de Zorn à $\Omega$. Montrons pour commencer que tout sous-ensemble totalement ordonné $\mathcal{A}$ de $\Omega$ admet une borne superieure. Fixons un tel $\mathcal{A}$; on construit explicitement la borne supérieure $(H, \Psi)$ de $\mathcal{A}$ en posant

$$H = \bigcup_{(G,\tilde{\Lambda})\in\mathcal{A}} G \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \tilde{\Lambda}(x) \text{ pour un } (G, \tilde{\Lambda}) \in \mathcal{A} \text{ avec } x \in G.$$

Du fait que les sous-espaces $G$ apparaissant dans l'union sont contenu les uns dans les autres, il s'en suit que $H$ est aussi un sous-espace vectoriel de $E$. De plus, pour tout

$x \in H$, la deuxième propriété définie bien $\Psi$, car, comme $\mathcal{A}$ est totalement ordonné, la valeur de $\Psi(x)$ ne dépend pas du choix de $(G, \tilde{\Lambda}) \in \mathcal{A}$ avec $x \in G$. Finalement, les mêmes arguments montrent que $\Psi$ est linéaire et qu'elle satisfait $\Psi(x) \leq p(x)$, $\forall x \in H$, donc que $(H, \Psi) \in \Omega$. Par sa construction $(H, \Psi) \geq (G, \tilde{\Lambda})$ pour tous $(G, \tilde{\Lambda}) \in \mathcal{A}$.

On conclut que $\Omega$ contient un élément maximal $(G, \tilde{\Lambda})$. Supposons par l'absurde que $G \subsetneq E$. Alors il existe $u \in E \setminus G$ et par le premier point, on peut encore prolonger $\tilde{\Lambda}$ à $G \oplus \mathbb{R}u$, ce qui contredit le caractère maximal de $(G, \tilde{\Lambda})$. On conclut que $G = E$ et que $\tilde{\Lambda}$ est un prolongement comme celui recherché. □

**Exercice 91.**
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute forme linéaire continue est lipschitzienne.

**Exercice 92.**
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que toutes les formes linéaires sont continues.

**Exercice 93.**
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

(a) Montrer que si $F$ est de dimension finie, alors $F$ est fermé.

(b) Donner un exemple d'espaces $F \subset E$ de dimensions infinie avec $F$ qui n'est pas fermé.

(c) Que dire de $F$ si on suppose qu'il est ouvert?

**Exercice 94.**
On écrit $\ell_c(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles avec un nombre fini de termes non-nuls. Exhiber une norme sur sur $\ell_c(\mathbb{R})$ et donner une forme linéaire continue et une discontinue pour cette norme.

**Exercice 95.**
On écrit $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ pour l'ensemble des fonctions continuellement dérivables de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ définie une norme sur $\mathcal{C}^1([-1, 1])$.

(b) Montrer que $f \mapsto f'(0)$ est une forme linéaire discontinue sur $\mathcal{C}^1([-1, 1])$.
*On verra dans l'exercice 110 que $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ n'est pas de Banach pour $\|.\|_\infty$.*

(c) Posons $|||f||| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour $f \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ et que $f \mapsto f'(0)$ est continue pour cette norme.

(d) ☠ Montrer que $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ est complet pour $|||.|||$.

**Exercice 96.** (a) Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est réflexif.

(b) Montrer qu'un espace vectoriel normé réflexif est nécessairement complet.

**Exercice 97.**
Soient $E$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace de $E$. Montrer que $E^*$ est un sous-espace vectoriel de $F^*$.

Montrer que si $F$ est dense dans $E$, alors $E^* = F^*$.

**Exercice 98.**
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que la boule unité $\mathcal{B}(0,1) = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ est un ensemble convexe, c.-à-d. qu'il est tel que, pour tous $x, y \in \mathcal{B}(0,1)$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{B}(0,1)$.

(b) Montrer que pour tous $x, y \in E$ avec $\|x\| = 1$ et $y \notin \mathbb{R}x$, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la droite $x + \mathbb{R}(\lambda y + x)$ n'intersecte pas $\mathcal{B}(0,1)$.

(c) Représenter le point précédent pour $E = \mathbb{R}^2$ et la norme euclidienne (donnée par $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) puis séparément pour la norme sup (donnée par $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$).

(d) Supposons que $E$ contient une base algébrique, c.-à-d. une famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$ telle que tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire *finie* de $\mathcal{E}$. Montrer alors qu'il existe un hyperplan $H$ tel que $(x + H) \cap \mathcal{B}(0,1) = \emptyset$.

**Exercice 99.**
Soit $E$ un espace vectoriel. Une *base algébrique* (ou *base de Hamel*) est une famille $(e_i)_{i \in I}$ de $E$ telle que

- la famille $(e_i)_{i \in I}$ est libre: toute combinaison linéaire *finie* nulle des $(e_i)_{i \in I}$ est triviale;
- la famille $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice: tout vecteur de $E$ s'écrit comme combinaison linéaire *finie* des $(e_i)_{i \in I}$.

Le but de cet exercice est de montrer que $E$ admet une base algébrique.

(a) Soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$ une famille libre de $E$. Montrer que si $\mathcal{E}$ n'est pas génératrice, alors il existe $f \in E$ tel que $\mathcal{E} \cup \{f\}$ est libre.

(b) A l'aide du lemme de Zorn (lemme 5.19) déduire que toute famille libre est contenue dans une base algébrique.

**Exercice 100.**
Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension infinie et soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$ base algébrique de $E$.

(a) Montrer que $\mathcal{E}$ est infinie.

(b) Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $u : E \to \mathbb{R}$ telle que $u(e_i) = a_i$ pour tout $i \in I$.

(c) Déduire l'existence de formes linéaires discontinues sur $E$.

## 5.3 Convergence faible et faible-*

Fixons $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Son dual $E^*$ admet alors la topologie induite par la norme d'opérateur. Toutefois, une deuxième topologie apparait naturellement sur $E^*$, notamment celle de la convergence simple.

**Définition 5.20.** *La topologie faible-* est la topologie engendrée par les ouverts*

$$\{\Lambda \in E^* : \Lambda(x) \in U\} \text{ pour } x \in E \text{ et } U \subset \mathbb{R} \text{ ouverts.}$$

*En particulier, pour $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots \in E^*$ on dit que $\Lambda_n$ converge faible-* vers $\Lambda$ et on écrit $\Lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Lambda$ si $\Lambda_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda(x)$ pour tout $x \in E$.*

La topologie faible-* peut également décrite comme la plus faible topologie sur $E^*$ qui rend les applications $\Lambda \mapsto \Lambda(x)$ continues (*en* $\Lambda$) pour tout $x \in E$. En particulier, elle est plus faible que la topologie donnée par la norme d'opérateur.

**Lemme 5.21.** *Pour $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots \in E^*$, si $\|\Lambda_n - \Lambda\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors, $\Lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Lambda$.*

**Preuve:** Fixons $x \in E$. Alors

$$|\Lambda_n(x) - \Lambda(x)| \leq \|\Lambda_n - \Lambda\| \cdot \|x\| \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

□

**Théorème 5.22** (Banach-Alaoglu)**.** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée de $E^*$ pour la norme d'opérateur*

$$B = \{\Lambda \in E^* : \|\Lambda\| \leq 1\}$$

*est compacte pour la topologie faible-*.*

Observons qu'une formulation équivalente de ce résultat est que tout ensemble de $E^*$ qui est borné pour la norme d'opérateur (on dit *fortement borné*) est pré-compact pour la topologie faible-*.

Nous allons ici nous limiter au cas ou $E$ est séparable.

**Proposition 5.23.** *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé séparable et $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de $E$. Alors*

$$d(\Lambda_1, \Lambda_2) = \sum_{k\geq 1} \tfrac{1}{2^k} \min\{|\Lambda_1(a_k) - \Lambda_2(a_k)|, 1\} \qquad \forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in E^* \tag{5.7}$$

*définie une distance sur $E^*$. De plus, cette distance induit la topologie faible-* sur $B$, la boule unité fermée de $E^*$.*

**Preuve:** Le fait que $d$ est une distance se montre facilement. La seule chose à observer est que la série qui définie $d$ est toujours absolument convergente car ses termes sont bornées par la série géométrique $2^{-n}$.

Soient $(\Lambda_n)_{n\geq 1}$ et $\Lambda$ des formes linéaires de $E^*$ contenues dans $B$ (donc de norme au plus 1). Supposons pour commencer que $\Lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Lambda$ et montrons que $d(\Lambda_n, \Lambda) \to 0$. Fixons $\epsilon > 0$ et soit $K$ tel que $2^{-K} \leq \epsilon$. Alors

$$d(\Lambda_n, \Lambda) \leq \sum_{k=1}^{K} \tfrac{1}{2^k} \min\{|\Lambda_n(a_k) - \Lambda(a_k)|, 1\} + \sum_{k>K} 2^{-k}.$$

Par le choix de $K$, le deuxième terme est plus petit que $\epsilon$. De plus, par la convergence faible-* de $\Lambda_n$ vers $\Lambda$, chaque terme de la première somme tend vers 0. Enfin, comme la première somme est finie, elle tend vers 0. Ainsi

$$\limsup_n d(\Lambda_n, \Lambda) \leq \epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que $d(\Lambda_n, \Lambda) \to 0$.

Supposons maintenant que que $d(\Lambda_n, \Lambda) \to 0$. Alors, pour chaque $k$

$$\min\{|\Lambda_n(a_k) - \Lambda(a_k)|, 1\} \leq 2^k d(\Lambda_n, \Lambda) \to 0.$$

Ainsi $\Lambda_n(a) \to \Lambda_n(a)$ quand $n \to \infty$ pour chaque $a \in A$.

Montrons maintenant que $\Lambda_n(x) \to \Lambda_n(x)$ quand $n \to \infty$ pour chaque $x \in E$. Fixons $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Soit $a \in A$ avec $\|x - a\| \leq \epsilon$ (un tel point existe car $A$ est dense dans $E$). Alors,

$$\begin{aligned} |\Lambda_n(x) - \Lambda(x)| &\leq |\Lambda_n(x) - \Lambda_n(a)| + |\Lambda_n(a) - \Lambda(a)| + |\Lambda(a) - \Lambda(x)| \\ &\leq \|\Lambda_n\| \cdot \|x - a\| + |\Lambda_n(a) - \Lambda(a)| + \|\Lambda\| \cdot \|x - a\| \\ &\leq 2\epsilon + |\Lambda_n(a) - \Lambda(a)|. \end{aligned} \tag{5.8}$$

La dernière inégalité est grace au fait que $\Lambda_n, \Lambda \in B$. Le dernier terme à droite converge vers 0 par le point précédent.

Ainsi on conclut que $\limsup_n |\Lambda_n(x) - \Lambda(x)| \leq 2\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Cela implique que $|\Lambda_n(x) - \Lambda(x)| \to 0$. □

**Preuve Théorème 5.22 quand $E$ est séparable:** Comme on se limite au cas ou $E$ est séparable, la topologie faible-* sur $B$ est induite par la distance $d$ définie dans la Proposition 5.23. En particulier, la compacité de $B$ est équivalente à sa compacité séquentielle, qu'on montrera par la suite. On utilisera les mêmes notations que dans la Proposition 5.23.

Fixons une suite $(u_n)_{n\geq 1} \in B^{\mathbb{N}}$ et montrons qu'elle contient une sous-suite qui converge faiblement-* dans $B$.

En un premier temps nous montrons l'existence d'un ensemble infini $S \subset \mathbb{N}$ tel que $(u_n(a))_{n\in S}$ converge pour tout $a \in A$. Pour cela, nous construirons de manière inductive une suite décroissante $\mathbb{N} \supset Z_0 \supset Z_1 \supset \dots$ d'ensembles infinis comme suit. Posons $Z_0 = \mathbb{N}$. Supposons que $Z_{k-1}$ est construit pour un certain $k \geq 1$. Alors, pour tout $n \in Z_{k-1}$, $|u_n(a_k)| \leq \|u_n\| \cdot \|a_k\| \leq \|a_k\|$. Par la compacité des segments de $\mathbb{R}$, il existe $Z_k \subset Z_{k-1}$

infini tel que la suite

$$(u_n(a_k))_{n\in Z_k}$$

converge. Fixons un tel $Z_k$.

Observons que avec cette construction $(u_n(a_k))_{n\in Z_k}$ converge pour chaque $k$. De plus, comme $Z_k \subset Z_j$ pour $j \leq k$, nous déduisons aussi que $(u_n(a_j))_{n\in Z_k}$ converge pour chaque $j \leq k$.

Définissons $S$ alors comme contenant le $j$ème élément de $Z_j$ pour chaque $j \geq 1$. Il est immédiat que $S$ est infini et que $(u_n(a))_{n\in S}$ converge pour tout $a \in A$. Posons

$$v(a) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in S}} u_n(a) \qquad \text{pour chaque } a \in A.$$

Montrons maintenant que $v$ peut se prolonger en une forme linéaire contenue dans $B$ et que $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} v$. Observons pour commencer que, pour $a, b \in A$,

$$|v(b) - v(a)| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in S}} |u_n(b) - u_n(a)| \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in S}} \|u_n\| \cdot \|b - a\| \leq \|b - a\|.$$

Ainsi $v$ est 1-Lipschitzienne sur $A$. En particulier $v$ est uniformément continue et l'exercice 16 nous permet de prolonger $v$ par continuité en une fonction définie sur $E$. De plus, $v$ sera alors 1-Lipschitzienne sur $E$.

Par le même argument que dans (5.8) on conclut que $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty,\, n\in S]{} v(x)$ pour tout $x \in E$. On en déduit alors la linéarité de $v$. Enfin, comme $u$ est 1-Lipschitzienne, $\|v\| \leq 1$, donc $v \in B$.

Ainsi $v \in B$ est la limite au sense faible-* de la sous-suite $(u_n)_{n\in S}$. □

*Remarque* 5.24. Une consequence immediate du Théorème de Banach-Alaoglu est que les topologies forte et faible-* sur $E^*$ sont distinctes dès que $E$ est de dimension infinie. En effet, dans ce cas $E^*$ est également de dimension infinie et nous avons vu que la boule unité fermée $B$ d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte. Toutefois, elle est compacte pour la topologie faible-*.

Inversement, quand $E$ est de dimension finie, il en est de même de $E^*$ (les deux ont la même dimension) et les topologies forte et faible-* sont identiques sur $E^*$.

Pour finir, mentionnons qu'on peut également définir une topologie similaire sur $E$, qu'on appelle la topologie faible. Il s'agit de la plus faible topologie qui rend toutes les formes linéaires $\Lambda \in E^*$ continues. Similairement à la topologie faible-* sur $E^*$, cette topologie est plus faible que celle induite par la norme de $E$. Si $E$ est réflexif, alors $E$ est également le dual de $E^*$ et on peut donc définir une topologie faible-* sur $E$. Dans ce cas, les topologies faible et faible-* sont identiques.

**Exercice 101.**
Rappelons la définition de $\ell_c = \{(x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists N \text{ tel que } x_n = 0\, \forall n \geq N\}$. Considérons la norme $\|.\|_1$ sur $\ell_c$ définie par

$$\|(x_n)\|_1 = \sum_{n\geq 1} |x_n|.$$

Montrer que les applications $\Lambda_N : \ell_c \to \mathbb{R}$ pour $N \geq 1$ et $\Lambda_\infty : \ell_c \to \mathbb{R}$ définies par

$$\Lambda_N(x_n) = \sum_{n=1}^{N} x_n \quad \text{et} \quad \Lambda_\infty(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

sont des formes linéaires continues sur $(\ell_c, \|.\|_1)$. Calculer leur normes.

Montrer que $\Lambda_N \to \Lambda_\infty$ pour la convergence faible-*, mais pas pour la norme d'opérateur.

## 5.4 Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont le cadre le plus commode pour l'analyse fonctionnelle. On donne par la suite quelques raisons.

Fixons un espace de Hilbert $E$. Pour $x, y \in E$ on dit que $x, y$ sont orthogonaux (écrit $x \perp y$) si $\langle x, y\rangle = 0$. Plus généralement, un famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale si $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq j$.

Soit $A \subset E$. On définit l'orthogonal de $A$ par

$$A^\perp = \big\{y \in E : \forall x \in A,\, x \perp y\big\}.$$

**Proposition 5.25.**

(i) *Le produit scalaire est une fonction continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.*

(ii) *Pour tout ensemble $A \subset E$, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E$.*

**Preuve:**

(i) Soit $x, y, h_x, h_y \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\langle x + h_x, y + h_y\rangle - \langle x, y\rangle &= \langle x, h_y\rangle + \langle h_x, y\rangle + \langle h_x, h_y\rangle \\ &\leq \|x\| \cdot \|h_y\| + \|y\| \cdot \|h_x\| + \|h_x\| \cdot \|h_y\| \xrightarrow[(h_x,h_y)\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

Ainsi $\langle .,. \rangle$ est continue.

(ii) En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on vérifie directement que $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$. La continuité du produit scalaire implique que $A^\perp$ est fermé.

□

**Proposition 5.26.** *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de $E$. Alors*

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

**Preuve:** Par le définition de la norme et la bi-linéarité du produit scalaire, on a

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i \rangle = \sum_{i,j} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

La dernière égalité est due a l'orthogonalité de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$. □

**Théorème 5.27** (Existence de la projection)**.** *Soit $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$. Alors, pour chaque $x \in E$ il existe un unique*

(i) $\pi(x) \in F$ *tel que*

(ii) $x - \pi(x) \in F^\perp$.

*De plus on a*

(iii) $\|x - \pi(x)\| = \operatorname{dist}(x, F) := \inf\{\|x - y\| : y \in F\}$.

*La fonction $\pi : E \to F$ définie ainsi est une application linéaire continue appelée la projection orthogonale sur $F$.*

Ce théorème peut être formulé plus simplement comme suit. Dans un espace de Hilbert, si $F$ est un sous-espace vectoriel fermé, alors $F^\perp$ est un supplémentaire de $F$.

On commence par une observation géométrique appelée l'égalité du parallélogramme. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\quad + \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

**Preuve:** **Existence:** Montrons que pour tout $x \in E$, il existe un élément $\pi(x) \in F$ avec les propriétés (i) - (iii).

Soit $x \in E$ et $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$. Si $x \in F$, alors $\pi(x) = x$ satisfait (i) - (iii). On suppose par la suite que $x \notin F$. Il existe alors une suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|x - y_n\|^2 \leq \operatorname{dist}(x, F)^2 + 2^{-n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, pour $m \leq n$, en appliquant (5.9) à $x - y_m$ et $x - y_n$, on obtient,

$$4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2.$$

Ainsi

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2\left[2\operatorname{dist}(x, F)^2 + 2^{-n} + 2^{-m}\right] - 4\operatorname{dist}(x, F)^2 \leq 4 \cdot 2^{-m},$$

ce qui implique que $(y_n)_n$ est de Cauchy. Comme $E$ est complet, $(y_n)$ converge vers un élément $y \in E$, et comme $F$ est fermé, $y \in F$. On a donc trouvé $y \in F$ avec $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$.

On veut montrer que $x - y \in F^\perp$; supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors il existe $z \in F$ tel que $\langle x - y, z\rangle > 0$. Pour $\lambda > 0$ on a

$$\|x - y - \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\lambda\langle x - y, z\rangle + \|z\|^2.$$

Ainsi, pour $\lambda$ petit, $\|x-y-\lambda z\|^2 < \mathrm{dist}(x, F)$ ce qui est une contradiction car $y+\lambda z \in F$.

On pose $\pi(x) = y$. La fonction $\pi$ ainsi définie satisfait les trois conditions (i) - (iii).

**Unicité:** On va montrer que la fonction $\pi : E \to E$ qui satisfait (i) et (ii) est unique (sans utiliser la linéarité ou la condition (iii)). Soient $\pi_1$ et $\pi_2$ deux telles applications. Alors, pour tout $x \in E$, $\pi_1(x) - \pi_2(x) \in F$. De plus

$$\pi_1(x) - \pi_2(x) = (x - \pi_1(x)) - (x - \pi_2(x)) \in F^\perp.$$

Ainsi $\pi_1(x) - \pi_2(x) \perp \pi_1(x) - \pi_2(x)$ donc $\pi_1(x) - \pi_2(x) = 0$. Comme cela est valable pour tout $x \in E$, on conclut que $\pi_1 = \pi_2$.

**Linéarité et continuité:** Soit $x, y$ in $E$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $a\pi(x) + b\pi(y) \in F$ et $ax + by - (a\pi(x) + b\pi(y)) \in F^\perp$. Par unicité de $\pi$, $\pi(ax + by) = a\pi(x) + b\pi(y)$, donc $\pi$ est linéaire.

Soit $x \in E$. Alors, comme $\pi(x) \perp x - \pi(x)$, on a

$$\|x\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2 \geq \|\pi(x)\|^2.$$

Ainsi $\|\pi\| \leq 1$, donc $\pi$ est continue. □

L'existence et l'unicité de la projection sont un outil très puissant pour l'étude des espaces de Hilbert. On donne maintenant deux conséquences importantes de ce théorème pour illustrer son utilité.

### Bases hilbertiennes

**Théorème 5.28.** *Soit $E$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors il existe un famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ tels que*

(i) *$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et $\|e_i\| = 1$ pour tout $i$ (on dit que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est orthonormée);*

(ii) *l'espace $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbb{N}} := \{\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i : N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $E$.*

*On dit que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $E$.*

**Preuve:** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans $E$ qui ne contient pas le point 0. On peut en extraire une sous-suite libre $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui engendre un sous-espace dense en posant $\sigma(1) = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$\sigma(n + 1) = \inf\big\{k > \sigma(n) : x_k \notin \mathrm{Vect}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\big\}.$$

Alors, par construction $\mathrm{Vect}(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $E$.

Il suffit d'appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir la base hilbertienne: Posons $y_1 = \frac{1}{\|x_{\sigma(1)}\|}x_{\sigma(1)}$. Pour $n \geq 2$, soit $\pi_n$ la projection sur l'espace

vectoriel de dimension finie (donc fermé) $\mathrm{Vect}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)})$. Posons

$$y_n = \frac{1}{\|x_{\sigma(n)} - \pi_n(x_{\sigma(n)})\|}\big(x_{\sigma(n)} - \pi_n(x_{\sigma(n)})\big).$$

Alors on a évidement, pour $n \geq 1$,

$$\mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n) = \mathrm{Vect}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \qquad y_n \perp \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_{n-1}) \quad \text{et} \quad \|y_n\| = 1.$$

On a donc construit une base hilbertienne $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Un corollaire intéressant de ce théorème est que tous les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sont isomorphes.

**Corollaire 5.29.** *Soient $E, F$ deux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie. Alors il existe une bijection linéaire orthogonale $u : E \to F$.*

Une application linéaire $u : E \to F$ est dite orthogonale si elle préserve le produit scalaire. Plus précisément si

$$\langle x, y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle, \qquad \forall x, y \in E.$$

Ainsi une bijection linéaire orthogonale est un **isomorphisme d'espaces Hilbertiens**. On peut également dire que $u$ est un isométrie bijective.

**Preuve:** Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des bases hilbertiennes de $E$ et $F$ respectivement.

Alors on peut définir une application linéaire $u : \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \to F$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(e_n) = f_n$. Il s'agit d'une application linéaire continue de norme 1, donc uniformément continue. Par l'exercice 16, elle peut être prolongée par continuité à $\overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} = E$.

Pour $x, y \in \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il s'en suit de la définition de $u$ que $\langle x, y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle$. Cette relation s'étend à $x, y \in E$ par continuité du produit scalaire. En particulier $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. L'injectivité de $u$ suit directement.

Pour montrer que $u$ est surjective considérons $y \in F$. Alors, il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{Vect}(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $u(x_n) = y_n$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc de Cauchy. Par le fait que $u$ préserve la norme, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in E$. La continuité de $u$ implique Enfin que $u(x) = y$, donc que $u$ est surjective. □

Le théorème précédent nous dit que tous les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sont isomorphes. Donnons un exemple d'un tel espace de Hilbert. Posons

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 0} x_n^2 < \infty\big\}.$$

Sur $\ell^2$ on définie un produit scalaire par

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n y_n, \qquad \text{pour } \mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2 \text{ et } \mathbf{y} = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2.$$

Le fait que $\langle .,. \rangle$ est bien un produit scalaire peut être vérifier simplement à l'aide de l'inégalité de Cauchy Swartz dans $\mathbb{R}^n$. Une base orthonormée pour $\ell^2$ est donné par les suites $\{\mathbf{x}^{(k)} : k \geq 0\}$ définies par

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\geq 0} \in \ell^2 \text{ où } x_n^{(k)} = \mathbf{1}_{n=k},\ \forall k, n \geq 0.$$

Observons toutefois que l'isomorphisme donné par le corollaire 5.29 n'est pas canonique: il dépend fortement du choix des des bases hilbertiennes $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ et $F$ choisies au début de la preuve.

En fin, mentionnons la formule intuitive qui permet de decomposer un vecteur dans une base hilbertienne.

**Proposition 5.30.** *Soit $E$ un espace de Hilbert de dimension infinie et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $E$. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

*où la convergence est pour la topologie de $E$ comme espace de Hilbert.*

**Preuve:** Soit $x \in E$. Pour $n \geq 1$, posons $x_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Un calcul directe nous montre que $(x - x_n) \perp e_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier $(x - x_n) \perp x_n$, donc $\|x - x_n\|^2 + \|x_n\|^2 = \|x\|^2$. Cela implique

$$\|x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $\sum_{i\geq 1} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2 < \infty$.

Montrons maintenant que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En effet, pour $n \leq m$,

$$\|x_n - x_m\|^2 = \| \sum_{i=n+1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i \|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \sum_{i>n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

Du fait que la suite $\langle x, e_i \rangle^2$ est sommable, on trouve que le dernier terme peut être rendu arbitrairement petit en prenant $n$ assez grand. On conclut que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc qu'elle converge vers un point $y \in E$.

Il nous reste à montrer que $x = y$. On a $(x - x_n) \perp e_i$ pour tout $i \leq n$. En prenant $n \to \infty$ on obtient $(x - y) \perp e_i$ pour tout $i$. Ainsi $(x - y) \perp \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donc $(x - y) \perp \overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbb{N}}} = E$. En particulier $(x - y) \perp (x - y)$, donc $x - y = 0$. □

**Exercice 102.**
Vérifier que $\ell^2$ est un espace de Hilbert et que $\mathbf{x}^{(k)} : k \geq 0$ est une base orthonormée. Écrire la décomposition d'une suite $\mathbf{u} \in \ell^2$ dans la base $\mathbf{x}^{(k)} : k \geq 0$.

**Exercice 103.**
Est-ce que deux espaces de Hilbert $E$ et $F$ avec $E$ de dimension infinie et $F$ de dimension

finie sont isomorphes?
A quelle condition sont deux espaces de Hilbert $E$ et $F$ de dimension finie isomorphes?

**Auto-dualité**

**Théorème 5.31.** *Soit $E$ un espace de Hilbert. Alors l'application $U : E \to E^*$, écrite $x \mapsto U_x$ et définie par*

$$U_x(y) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in E$$

*est un isomorphisme d'espaces hilbertiens.*

En vertu de ce théorème, on dit que $E$ est auto-dual, c.-à-d. que $E^* = E$. Par la, on veut dire que $E$ est isomorphe à $E^*$ par l'isomorphisme canonique $U$.

**Preuve:** Soit $x \in E$. Il est immédiat que $U_x$ est une forme linéaire sur $E$. L'inégalité de Cauchy Schwartz montre que $\|U_x(y)\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ donc que la norme d'opérateur de $U_x$ est plus petite que $\|x\|$; en particulier $U_x \in E^*$. De plus, pour $x \neq 0$, $U_x(\frac{1}{\|x\|}x) = \|x\|$. Vu que $\frac{1}{\|x\|}x$ est un vecteur de $E$ de norme 1, on a $\|U_x\| = \|x\|$.

C'est également évident que $x \mapsto U_x$ est une application linéaire. Ainsi $U$ est une isométrie linéaire de $E$ dans $E^*$; en particulier elle est injective.

Il reste à montrer que $U$ est surjective. Soit $f \in E^*$; on va montrer que $f \in \mathrm{Im}(U)$. Évidement $U_0 = 0 \in \mathrm{Im}(U)$, on peut donc se limiter au cas où $f \neq 0$.

Comme $f$ est continue, $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E$. Ainsi on peut définir la projection orthogonale $\pi$ sur $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $f$ est supposé non-nulle, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = 1$. Alors $f(x - \pi(x)) = 1$.

En particulier, pour tout $z \in E$, on a $z - f(z)(x - \pi(x)) \in \mathrm{Ker}(f)$. Mais par définition de $\pi$, $x - \pi(x) \in \mathrm{Ker}(f)^\perp$, d'où

$$0 = \langle z - f(z)(x - \pi(x)), x - \pi(x) \rangle = \langle z, x - \pi(x) \rangle - f(z)\|x - \pi(x)\|^2.$$

Ainsi, on a

$$f(z) = \frac{1}{\|x - \pi(x)\|^2} \cdot \langle z, x - \pi(x) \rangle = \langle z, \frac{x - \pi(x)}{\|x - \pi(x)\|^2} \rangle, \qquad \forall z \in E.$$

On conclut que $\frac{x-\pi(x)}{\|x-\pi(x)\|^2} \in E$ est envoyé par $U$ sur $f$, donc que $U$ est surjective. □

**Exercice 104.**
Soit $E$ un espace de Hilbert et $A \in E$. Que vaut $(A^\perp)^\perp$ ?

## 5.5 Espaces de Banach et de Hilbert complexes

Il est des fois intéressant à regarder des espaces vectoriels complexes. La plus part des définitions s'adaptent directement.

Une norme sur un espace vectoriel complexe $E$ est une fonction $\|.\| : E \to [0, +\infty)$ telle que, pour tout $x, y \in E$,

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(iii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Si $(E, \|.\|)$ est complet on dit que c'est un espace de Banach complexe. Toutes les propriétés vues dans le cas réel s'adaptent facilement au cas complexe.

Dans ce cas, les formes linéaires sont des applications linéaires de $E$ dans $\mathbb{C}$. Leur norme et continuité sont définies identiquement.

L'unique différence notable entre les espaces vectoriels réels et complexes est dans la définition du produit scalaire. En effet, si on reprend la définition 5.3 dans le cas complexe, on obtient une contradiction entre la positivité ($\langle x, x\rangle \geq 0$) et la bi-linéarité. On adapte donc la définition comme suit.

**Définition 5.32.** *Soit $E$ un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire hermitien sur $E$ est une fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ avec les propriétés suivantes:*

(i) *pour tout $x, y \in E$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,*

(ii) *pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \langle x + y, z\rangle &= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle & \qquad \langle \lambda x, z\rangle &= \overline{\lambda}\langle x, z\rangle \\ \langle x, y + z\rangle &= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle & \qquad \langle x, \lambda z\rangle &= \lambda\langle x, z\rangle, \end{aligned} \tag{5.10}$$

(iii) *pour tout $x \in E$, $\langle x, x\rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.*

*Si $E$ est de dimension finie, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace hermitien.*

Une fonction de $E^2$ dans $\mathbb{C}$ satisfaisant (5.10) est dite *sesquilinéaire* (à gauche). La deuxième ligne de (5.10) peut s'obtenir à partir de la première à l'aide de la première propriété. Observons aussi que, grâce à cette définition on a

$$\langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle = |\lambda|^2\langle x, x\rangle \geq 0.$$

Comme dans le cas réel, on associe à un produit scalaire une norme par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \qquad \forall x \in E.$$

Si $E$ est complet pour cette norme, on dit que $(E, \langle ., .\rangle)$ est un espace de Hilbert complexe.

Toutes les propriétés (existence de la projection, auto-dualité etc.) s'adaptent directement au cas complexe.

**Exemple:** Pour $d \geq 1$, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{C}^d$. Pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{C}^d$ posons

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{k=1}^{d} \overline{x_k} y_k.$$

Alors $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}^d$ et $(\mathbb{C}^d, \langle ., .\rangle)$ est un espace hermitien.

**Exemple:** Posons $\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \ \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < \infty\right\}$. Pour $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{C})$ et $\mathbf{y} = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{C})$ posons

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k\geq 0} \overline{x_k} y_k.$$

Alors $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{C})$ et $(\ell^2(\mathbb{C}), \langle ., . \rangle)$ est un espace de Hilbert complexe.

**Exercice 105.**
Vérifier que les fonctions définies dans les exemples sont bien des produits scalaires. Montrer que $\ell^2(\mathbb{C})$ est complet.

# Chapitre 6

# Espaces de Lebesgue $L^p$

## 6.1 Définitions; propriétés

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

**Définition 6.1.** *Pour $p \in [1, +\infty)$ on pose*

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu) = \Big\{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ mesurable, avec } \int |f|^p d\mu < \infty \Big\}.$$

*De plus, on définit $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ mesurables, bornées à un ensemble de mesure nulle près:*

$$\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E}, \mu) = \big\{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ mesurable, } \exists C > 0 \text{ t.q. } |f(x)| < C \ \mu\text{-p.p.} \big\}.$$

**Théorème 6.2** (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit $p \in [1, +\infty)$ et $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Alors*

$$\Big( \int |f + g|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big( \int |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big( \int |g|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{6.1}$$

**Preuve:** Soit $p \in [1, +\infty)$ et $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. On peut se limiter au cas où $\int |f|^p d\mu < \infty$ et $\int |g|^p d\mu < \infty$.

La fonction $t \mapsto |t|^p$ est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et $x \in E$,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= \Big| \lambda \frac{f(x)}{\lambda} + (1 - \lambda) \frac{g(x)}{1 - \lambda} \Big|^p \\ &\leq \lambda \Big| \frac{f(x)}{\lambda} \Big|^p + (1 - \lambda) \Big| \frac{g(x)}{1 - \lambda} \Big|^p = \lambda^{1-p} |f(x)|^p + (1 - \lambda)^{1-p} |g(x)|^p. \end{aligned}$$

Posons $\lambda = \frac{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}$ dans cette inégalité et intégrons-la. On obtient alors

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \frac{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}{\left[\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{1-p}} = \left[\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p.$$

En prenant cette inégalité à la puissance $1/p$, on obtient le résultat désiré. □

En vertu de l'inégalité de Minkowski, pour $p \in [1, \infty)$, la fonction $\|.\|_p : \mathcal{L}^p \to [0, +\infty)$

$$f \mapsto \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$. Pour en créer une norme, on va identifier les fonctions à distance 0 dans $\mathcal{L}^p$.

Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$ on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{t \geq 0 : \mu(\{x \in E : |f(x)| > t\}) > 0\right\}.$$

On appelle $\|f\|_\infty$ la borne supérieure essentielle de $f$. Il est facile de vérifier que, pour $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty, \tag{6.2}$$

donc que $\|.\|_\infty$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty$.

**Lemme 6.3.** *Soit $p \in [1, \infty]$. Pour $f, g \in \mathcal{L}^p$, $\|f - g\|_p = 0$ si et seulement si $f = g$ $\mu$-p.p.*

**Preuve:** Pour $p < \infty$, la preuve suit directement des propriétés de l'intégrale (voir corollaire 2.17($i$)).
Pour $p = \infty$, la conclusion suit directement de la définition de $\|.\|_\infty$. □

Cela nous ramène à la définition suivante.

**Définition 6.4.** *Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit $L^p = L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{L}^p$ pour la relation d'équivalence "égalité presque partout".*
*Pour $f \in \mathcal{L}^p$, si $\hat{f}$ désigne sa classe d'équivalence dans $L^p$, notons $\|\hat{f}\|_p = \|f\|_p$.*

Le fait que $\|.\|_p$ peut être définit sur $L^p$ est une conséquence directe du lemme 6.3.

**Proposition 6.5.** *Soit $p \in [1, \infty]$. Alors $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p$, qui est ainsi un espace vectoriel normé.*

**Preuve:** Pour $f, g \in \mathcal{L}^p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}$. Ainsi $L^p$ hérite la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}^p$.

En vertu du Théorème 6.2 (et de (6.2) pour $p = \infty$), $\|.\|_p$ est une semi-norme sur $L^p$. De plus, le lemme 6.3 montre que $(\|f\|_p = 0) \Rightarrow (\hat{f} = 0)$, donc que $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p$. □

## 6.2 $L^p$ comme espace de Banach

**Théorème 6.6.** *Soit $p \in [1, \infty]$. Alors $(L^p(E), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.*

**Preuve:** Soit $p \in [1, \infty)$ (le cas $p = \infty$ va être traité séparément). Il faut montrer que $(L^p(E), \|.\|_p)$ est complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p$ une suite de Cauchy. On va identifier chaque $f_n$ à un de ses représentants dans $\mathcal{L}^p(E)$.

Soit $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(f_n)$ telle que $\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(n+1)}\|_p \leq 4^{-n}$. Posons $A_n = \{x \in E : |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n+1)}(x)| \geq 2^{-n}\}$. Alors $\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(n+1)}\|_p \geq 2^{-n}\mu(A_n)^{1/p}$, donc $\mu(A_n) \leq 2^{-pn}$.

Posons $A = \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} A_n$. Alors

$$\mu(A) = \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n\geq N} A_n\Big) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} 2^{-np} = 0. \tag{6.3}$$

De plus, pour $x \notin A$, il existe au plus un nombre fini d'indices $n$ tels que $x \in A_n$. On peut donc choisir $N = N_x$ assez grand tel que pour tout $n \geq N$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n+1)}(x)| < 2^{-n}.$$

Ainsi, pour tout $x \notin A$, $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge. Posons

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(x), & \text{si } x \notin A, \\ 0, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

On vient de prouver que $f_{\sigma(n)} \to f$ presque partout.

Posons pour $x \in E$, $g(x) = |f_{\sigma(1)}(x)| + \sum_{n\geq 1} |f_{\sigma(n+1)}(x) - f_{\sigma(n)}(x)|$. Ainsi $g$ est une fonction mesurable de $E$ dans $[0, +\infty]$. Par le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}
\Big(\int g^p \, d\mu\Big)^{1/p} &= \lim_N \left[\int \Big(|f_{\sigma(1)}| + \sum_{n=1}^N |f_{\sigma(n+1)} - f_{\sigma(n)}|\Big)^p d\mu\right]^{1/p} \\
&\leq \lim_N \|f_{\sigma(1)}\|_p + \sum_{n=1}^N \|f_{\sigma(n+1)} - f_{\sigma(n)}\|_p \\
&\leq \|f_{\sigma(1)}\|_p + \sum_{n\geq 1} 4^{-n} < \infty.
\end{aligned}$$

On conclut que $g \in \mathcal{L}^p$. De plus, $|f_{\sigma(n)}(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. Ainsi $f^p_{\sigma(n)} \to f^p$ presque partout et la convergence est dominée par la fonction intégrable $g^p$. Par le théorème de convergence dominée, $f \in \mathcal{L}^p$ et $\|f_{\sigma(n)} - f\|_p \to 0$.

Enfin, par le lemme 0.10, on déduit que $\|f_n - f\|_p \to 0$, qui est le résultat désiré.

Le cas $p = \infty$ est plus facile à traiter. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty$. Quitte à changer chaque fonction $f_n$ sur un ensemble négligeable, on peut supposer que, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m, n \geq N(\epsilon)$,

$$\sup\big\{|f_m(x) - f_n(x)| : x \in E\big\} < \epsilon.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge vers une limite qu'on note $f(x)$. On a défini ainsi une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$.

Pour $\epsilon > 0$, en prenant $m \to \infty$ dans la dernière équation, on obtient

$$\sup\big\{|f_n(x) - f(x)| : x \in E\big\} \leq \epsilon, \qquad \forall n \geq N(\epsilon).$$

Ainsi $f$ est bornée, donc dans $\mathcal{L}^\infty$ et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

## 6.3 Inclusions entre espaces $L^p$

Cette partie est surtout importante pour se familiariser avec les espaces $L^p$. La question qu'on se pose est celle de la relation entre les espaces $L^p$ pour différentes valeurs de $p$.

**Théorème 6.7.** *Supposons que $\mu$ est une mesure finie sur $E$. Alors,*

$$L^p \supset L^q, \qquad \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

L'hypothèse de finitude de $\mu$ est essentielle. En effet, sous d'autres conditions, l'opposé est vrai.

**Théorème 6.8.** *Supposons que $\mu$ est telle qu'il existe $\epsilon > 0$ avec $\mu(\{x\}) > \epsilon$ pour $\mu$-presque tout $x \in E$. Alors,*

$$L^p \subset L^q, \qquad \forall\, 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

**Preuve du Théorème 6.7:** Soit $\mu$ une mesure finie sur un espace $E$. Soient $1 \leq p \leq q < \infty$ et $f \in \mathcal{L}^q$. Montrons que $f \in \mathcal{L}^p$.

En analysant séparément les cas $x \in [0, 1]$ et $x > 1$, on observe que

$$x^p \leq x^q + 1, \qquad \forall x \geq 0.$$

Ainsi,

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \int \big(|f|^q + 1\big) \, d\mu = \int |f|^q \, d\mu + \mu(E) < \infty.$$

On déduit que $f \in \mathcal{L}^p$.

Enfin, si $f \in \mathcal{L}^\infty$, alors pour tout $1 \leq p < \infty$,

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty \cdot \mu(E) < \infty,$$

donc $f \in \mathcal{L}^p$. □

**Preuve du Théorème 6.8:** Soit $(E, \mu)$ un espace mesuré comme dans l'énoncé. Quitte à éliminer les points de $E$ de mesure nulle, on peut supposer $\mu(x) > \epsilon$ pour tout $x \in E$. De plus, soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $f \in \mathcal{L}^p$. Alors,

$$\infty > \|f\|_p^p = \sum_{x \in E} \mu(x) \cdot |f(x)|^p \geq \epsilon \sum_{x \in E} |f(x)|^p.$$

En particulier on déduit que $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty$, ce qui règle le cas $q = \infty$. Pour $q < \infty$, on peut calculer

$$\int |f(x)|^q \, d\mu(x) = \int |f(x)|^p \cdot \|f\|_\infty^{q-p} \, d\mu(x) \leq \|f\|_\infty^{q-p} \cdot \|f\|_p^p < \infty,$$

donc $f \in \mathcal{L}^q$. □

On conclut que en général, il n'y a pas de monotonie en $p$ des espaces $L^p$. Cela vient de deux causes pour qu'une fonction soit pas intégrable:

- des valeurs tendant vite vers l'infini sur un ensemble de mesure finie (comme dans le Théorème 6.7);
- une fonction ne tendant pas vers 0 assez rapidement sur un ensemble de mesure infinie (comme dans le Théorème 6.8).

On peut quand même donner un résultat général d'inclusion pour les espaces $L^p$:

**Théorème 6.9.** *Soit* $1 \leq p < q \leq \infty$. *Alors*

$$L^p \cap L^q \subset L^r, \qquad \forall r \in [p, q].$$

**Preuve:** Traitons dans un premier temps le cas où $q < \infty$. Soit $r \in [p, q]$ et $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$. Écrivons $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{|f(x)| \geq 1}$ et $h(x) = f(x)\mathbf{1}_{|f(x)| < 1}$ pour tout $x \in E$. Alors $|f| = |g| + |h|$, donc $g, h \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ avec $\|h\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|g\|_q \leq \|f\|_q$. De plus

$$|f(x)|^r \leq |g(x)|^q + |h(x)|^p, \qquad \forall x \in E.$$

Ainsi

$$\int |f(x)|^r d\mu(x) \leq \int \big(|g(x)|^q + |h(x)|^p\big) d\mu(x) = \|g\|_q^q + \|h\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|f\|_q^q < \infty,$$

d'où $f \in \mathcal{L}^r$.

Dans le cas où $q = \infty$ et $p < r < \infty$, avec $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^\infty$, on remarque que

$$|f(x)|^r \leq \|f\|_\infty^{r-p} |f(x)|^p.$$

En intégrant, on obtient $f \in \mathcal{L}^r$. □

*Remarque* 6.10. Dans les trois théorèmes précédents on a montré des inclusions entre les espaces $\mathcal{L}^p$. Cela est équivalent à l'inclusion entre les espaces $L^p$ correspondants grâce au fait que la relation d'équivalence par laquelle on quotient pour passer de $\mathcal{L}^p$ à $L^p$ est indépendante de $p$ (voir le lemme 6.3).

**Attention!** Les injections induites par les inclusions entre les espaces $L^p$ ne sont pas isométriques. Plus simplement dit, même si $f \in L^p \cap L^q$, on n'a pas forcement $\|f\|_p = \|f\|_q$.

**Exercice 106.**
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que l'ensemble $I = \{p \in [1, \infty] : \|f\|_p < \infty\}$ est un intervalle (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et que $p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur $I$.

**Exercice 107.**
Soit $1 \leq p \leq p' \leq \infty$. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à $L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si et seulement si $q \in [p, p']$ (respectivement $q \in (p, p')$).

**Exercice 108.**
Soient $1 \leq p < q \leq \infty$. Donner des exemples de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}, (g_n)_{n\geq 1} \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \cap L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $f_n \to 0$ dans $L^p$ mais $f_n \not\to 0$ dans $L^q$ et $g_n \to 0$ dans $L^q$ mais $g_n \not\to 0$ dans $L^p$.

Montrer que si $(h_n)_{n\geq 1} \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \cap L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est une suite de fonctions avec $h_n \to 0$ dans $L^p$ et dans $L^q$, alors $h_n \to 0$ dans $L^r$ pour tout $r \in [p, q]$.

**Exercice 109.**
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Montrer alors que pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \mu(E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Déduire que l'injection de $L^q$ dans $L^p$ est continue.
*Indication:* Utiliser l'inégalité de Hölder pour des fonctions bien choisies.

## 6.4 Théorèmes de densité

Rappelons nous que pour définir l'intégrale contre une mesure, on avait commencé par les fonctions étagées. Écrivons $\mathcal{F}_{\text{et}}$ pour l'espace vectoriel des fonctions étagées intégrables sur $E$:

$$\mathcal{F}_{\text{et}} = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ et } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \text{ avec } \mu(A_k) < \infty, \forall k \Big\}.$$

**Théorème 6.11.** *Soit $p \in [1, \infty)$. Alors $\mathcal{F}_{\text{et}}$ est un sous-espace vectoriel de $L^p$, dense dans $L^p$.*

**Preuve:** Soient $p \in [1, \infty)$. La définition de $\mathcal{F}_{\text{et}}$ implique directement que $\mathcal{F}_{\text{et}}$ est un sous-espace vectoriel de $L^p$.

Soit $f \in \mathcal{L}^p$ un fonction telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. Posons, pour $n \geq 1$,

$$f_n = \sum_{k=0}^{4^n} k2^{-n} \mathbf{1}_{k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}}.$$

Alors $f_n(x) \nearrow f(x)$ pour tout $x \in E$, donc $|f_n(x) - f(x)|^p \leq |f(x)|^p$. Par le théorème de convergence dominée, $\|f_n - f\|_p \to 0$. De plus il est évident que $f_n \in \mathcal{F}_{\text{et}}$.

On en déduit que $\overline{\mathcal{F}_{\text{et}}}$ contient toutes les fonctions positives de $L^p$. Comme $\mathcal{F}_{\text{et}}$ est un sous-espace vectoriel de $L^p$, il en est de même de $\overline{\mathcal{F}_{\text{et}}}$. Ainsi $\overline{\mathcal{F}_{\text{et}}} = L^p$. □

Une conséquence du théorème précédent est que si on veut montrer une propriété stable par passage à la limite pour toutes les fonctions de $L^p$, il suffit de le faire pour les fonctions étagées. En pratique, il est souvent plus intéressant d'utiliser des fonctions continues (ou même $\mathcal{C}^\infty$) à la place des fonctions étagées, pour des raisons de régularité.

Pour donner un sens aux fonctions continues, il faut se placer dans un espace topologique. Supposons que $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Par la suite, on va toujours considérer que $E$ est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Posons $\mathcal{C}_c(E)$ la classe des fonctions continues à support compact:

$$\mathcal{C}_c(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} : \text{ continue et } \exists K \subset E, \text{ compact t.q. } f(x) = 0, \forall x \notin K \right\}$$

**Théorème 6.12.** *Soit $E$ un espace topologique, localement compact et Hausdorff muni d'une mesure borélienne régulière $\mu$ avec $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset E$. Alors, pour tout $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{C}_c(E)$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^p$.*

Observons que ce résultat s'applique aux espaces métriques propres considérés dans la partie 3.4. De plus, dans ce cadre l'hypothèse de régularité est automatiquement satisfaite par toute mesure finie sur les compacts (voir Théorème 3.28).

*Remarque* 6.13. Jusqu'à présent, quand on parlait d'éléments de $L^p$, on les percevait comme des fonctions définies à un ensemble de mesure nulle près. Cela est cohérent avec la définition de $L^p$ comme ensemble de classes d'équivalence pour l'égalité presque partout. Le fait qu'une fonction est continue dépend fortement de sa définition partout. Ainsi la conclusion du Théorème 6.12 doit être comprise comme *"les classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{C}_c$ forment un sous-espace dense de $L^p$"*.

La preuve du théorème repose sur le Lemme d'Urysohn (théorème 3.32) qu'on a déjà vu. On rappelle le point important. Comme déjà mentionné, le lemme est vrai dans tout espace topologique localement compact et Hausdorff.

**Rappel (lemme d'Urysohn):** *Soient $E$ un espace topologique localement compact et Hausdorff et $K \subset E$ un compact. Alors il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c(E)$ telles que*

$$\|f_n\|_\infty = 1,\ \forall n \quad \text{et} \quad f_n \searrow \mathbf{1}_K, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

**Preuve du Théorème 6.12:** Soient $p \in [1, +\infty)$ et $f \in \mathcal{C}_c(E)$. Alors $f$ est une fonction bornée et il s'en suit que

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \cdot \mu(\{x \in E : f(x) \neq 0\}).$$

Vu que $\{x \in E : f(x) \neq 0\}$ est contenu dans un compact, sa mesure est finie, et on déduit que $\|f\|_p < \infty$. Ainsi $\mathcal{C}_c(E) \subset \mathcal{L}^p$. De plus $\mathcal{C}_c(E)$ est stable par somme et multiplication par des scalaires, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p$. Il s'identifie alors à un sous-espace vectoriel de $L^p$.

Soit $H$ l'adhérence de $\mathcal{C}_c(E)$ dans $L^p$. Notre but est de montrer que $H = L^p$. Grâce au Théorème 6.11, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_{\text{et}} \subset H$. De plus, $\mathcal{F}_{\text{et}}$ est engendré par l'ensemble des fonctions indicatrices d'ensembles de mesure finie:

$$\mathcal{F}_{\text{et}} = \text{Vect}\{\mathbf{1}_A :\ A \in \mathcal{E},\ \mu(A) < \infty\}.$$

Comme $H$ est un sous-espace vectoriel de $L^p$, il suffit de montrer que $\mathbf{1}_A \in H$ pour tout $A \in \mathcal{E}$ de mesure finie.

Fixons un tel $A \in \mathcal{E}$. Observons que, par régularité de $\mu$, il existe une suite de compacts $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset A$ telle que $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n)$. Comme $\mu(A) < \infty$, cela implique que $\mu(A \setminus (\bigcup_n K_n)) = 0$, donc que $\mathbf{1}_{K_n}$ converge $\mu$-presque partout vers $A$. Observons que, par le théorème de convergence dominée $\int |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{K_n}|^p d\mu = \int (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{K_n}) d\mu \to 0$ (la convergence est dominée par $\mathbf{1}_A$ qui est intégrable car $\mu(A) < \infty$). Ainsi $\mathbf{1}_{K_n} \xrightarrow{\|.\|_p} \mathbf{1}_A$. Il suffit donc de montrer que $\mathbf{1}_K \in H$ pour $K$ compact.

Soit $K$ un compact de $E$. Fixons une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c(E)^{\mathbb{N}}$ comme dans le théorème 3.32, à savoir telle que $\|f_n\|_\infty = 1$, $\forall n$ et $f_n \searrow \mathbf{1}_K$. Alors la convergence simple de $f_n^p$ vers $\mathbf{1}_K$ est bornée par la fonction intégrable $f_1^p$ et on en déduit que

$$\|f_n - \mathbf{1}_K\|_p^p = \int |f_n - \mathbf{1}_K|^p d\mu \to 0, \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Ainsi $\mathbf{1}_K \in H$ et la preuve est finie. □

*Remarque* 6.14. Les deux théorèmes ne s'appliquent pas aux espaces $L^\infty$. Il est en effet facile de voir, que dans des situations très standard, comme $(E, \mathcal{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on ne peut pas approcher toutes les fonctions bornées par des fonctions de $\mathcal{F}_{\text{et}}$ ou $\mathcal{C}_c$ en norme $\|.\|_\infty$.

Prenons par exemple $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $g \in \mathcal{F}_{\text{et}}$ ou $g \in \mathcal{C}_c$, $\|f - g\|_\infty \geq 1$.

**Théorème 6.15.** *Soient $E$ un espace topologique, localement compact et Hausdorff. Alors,*

*$\mathcal{C}_c(E)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}^\infty$ et son adhérence (dans $\mathcal{L}^\infty$) est*

$$\overline{\mathcal{C}_c} = \mathcal{C}_0 = \big\{f : E \to \mathbb{R} \text{ continue t.q. } \forall \epsilon > 0,\ \exists K \subset E \text{ compact avec } |f(x)| < \epsilon,\ \forall x \notin K\big\}$$

**Preuve:** On va montrer la double inclusion entre $\overline{\mathcal{C}_c}$ et $\mathcal{C}_0$.

Soit $f \in \mathcal{C}_0$ et $\epsilon > 0$. Montrons qu'on peut trouver une fonctions $g \in \mathcal{C}_c$ avec $\|f-g\|_\infty < 2\epsilon$. Soit $K$ un compact tel que $\sup\{|f(x)| : x \in E \setminus K\} < \epsilon$ (l'existence d'un tel compact est assurée par la définition de $\mathcal{C}_0$). De plus, soit $h \in \mathcal{C}_c$ une fonction telle que $\|h\|_\infty = 1$ et $h \geq \mathbf{1}_K$ (l'existence d'une telle fonction est assurée par le théorème 3.32). Posons $g = f \cdot h$. Alors

$$|g(x) - f(x)| = |f(x)| \cdot |h(x) - 1| \begin{cases} = 0, & \text{pour } x \in K, \\ \leq 2|f(x)| < 2\epsilon, & \text{pour } x \in E \setminus K. \end{cases}$$

Ainsi $\|f - g\|_\infty < 2\epsilon$.

Inversement, soit $f \in \overline{\mathcal{C}_c}$ et $\epsilon > 0$. Montrons que $f$ est continue et qu'il existe un compact $K$ tel que $\sup\{|f(x)| : x \in E \setminus K\} < \epsilon$.

On commence par montrer la deuxième propriété. Soit $g \in \mathcal{C}_c$ avec $\|g - f\|_\infty < \epsilon$ et soit $K \subset E$ un compact contenant le support de $g$, c.-à-d. tel que $g(x) = 0$ pour tout $x \notin K$. Alors

$$\begin{aligned} \sup\big\{|f(x)| : x \in E \setminus K\big\} &= \sup\big\{|f(x) - g(x)| : x \in E \setminus K\big\} \\ &\leq \sup\big\{|f(x) - g(x)| : x \in E\big\} < \epsilon. \end{aligned}$$

Montrons que $f$ est continue. Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$. On cherche à trouver un ouvert $U$ contenant $x$ tel que $\sup\{|f(x) - f(y)| : y \in U\} < \epsilon$.

Soit $g \in \mathcal{C}_c$ avec $\|f - g\|_\infty < \epsilon/3$. Comme $g$ est continue, il existe un ouvert $U \subset E$ avec $x \in U$ et $\sup\{|g(x) - g(y)| : y \in U\} < \epsilon/3$. Alors

$$\begin{aligned} \sup\big\{|f(x) - f(y)| : y \in U\big\} &\leq \sup\big\{|f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)| : y \in U\big\} \\ &\leq \sup\big\{|g(x) - g(y)| : y \in U\big\} + 2\|f - g\|_\infty < \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $f$ est continue. □

**Exercice 110.**
Montrer que

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \big\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et } \exists K \subset \mathbb{R}^d, \text{ compact t.q. } f(x) = 0,\ \forall x \notin K\big\}$$

est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$:

(a) Trouver une fonction $h$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ positive, à support dans $B(0,1)$ avec $\int h(x)dx = 1$.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * h$, la convolution de $f$ et $h$, est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(c) Poser $h_n(x) = n^d h(nx)$ et $f_n = f * h_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.

(d) Conclure en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

**Exercice 111.**
Montrer que $\mathcal{F}_{\text{et}}$ est un sous-espace vectoriel de $L^\infty$. Montrer que son adhérence dans $L^\infty$ est

$$\overline{\mathcal{F}_{\text{et}}} = \{f \in L^\infty : \text{ pour tout } \epsilon > 0 \ \mu(\{x \in E : |f(x)| > \epsilon\}) < \infty\}.$$

Conclure que si $\mu(E) < \infty$, alors $\mathcal{F}_{\text{et}}$ est dense dans $L^\infty$. Donner un contre-exemple quand $\mu(E) = \infty$.

## 6.5 Inégalité de Hölder; dualité

L'inégalité suivante, dite de Hölder, est le point de départ pour l'étude de la dualité des espaces $L^p$.

**Théorème 6.16** (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $p, q \in (1, +\infty)$ avec*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{6.4}$$

*ou alors soient $p = 1$ et $q = \infty$. Alors, pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$,*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.5}$$

Si $p, q$ satisfont (6.4), on dit qu'ils sont des *exposants conjugués*. Par passage à la limite on va dire que le couple $1, \infty$ satisfait également (6.4).

**Preuve:** Soient $p, q$ comme dans l'énoncé et $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Si $p = 1$ et $q = \infty$, l'inégalité (6.5) est une conséquence directe de la définition de l'intégrale.

On se limite donc au cas $1 < p, q < \infty$. De plus, on peut supposer $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$, sinon le résultat est trivial.

Observons que la fonction $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est concave; on en déduit que pour $x, y > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$\log(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \log x + (1 - \lambda) \log y.$$

En prenant l'exponentielle dans cet inégalité avec $\lambda = 1/p$, on obtient

$$\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq x^{1/p} y^{1/q}, \qquad \forall x, y > 0.$$

Pour $z \in E$, appliquons cette inégalité avec $x = |f(z)|^p / \|f\|_p^p$ et $y = |g(z)|^q / \|g\|_q^q$. Ainsi on obtient

$$\frac{1}{p} \frac{|f(z)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(z)|^q}{\|g\|_q^q} \geq \frac{|f(z)g(z)|}{\|f\|_p \|g\|_q}, \qquad \forall z \in E.$$

En intégrant on obtient

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |f(z)g(z)| d\mu(z),$$

ce qui est l'inégalité attendue. □

**Corollaire 6.17.** *Soient $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués. La fonction $U : L^p \to (L^q)^*$, notée $f \mapsto U_f$ et donnée par*

$$U_f(g) = \int fg d\mu, \qquad \forall f \in L^p \text{ et } g \in L^q, \tag{6.6}$$

*est bien définie, linéaire et continue. De plus, $\|U_f\| = \|f\|_p$, pour tout $f \in L^p$; $U$ est donc une isométrie*[1].

Dans la partie 9.1 on montrera que l'application $U$ est surjective, donc que c'est un isomorphisme d'espaces de Banach (sauf quand $p = 1$, ou de manière équivalente quand $q = \infty$).

**Preuve:** Soient $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués; soient $U$ définie comme au-dessus et $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors, par (6.5), la fonction produit $fg$ (définie à un ensemble de mesure nulle près) est intégrable et

$$\int fg d\mu \leq \int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ainsi $U_f$ est une forme linéaire continue sur $L^q$. De plus $\|U_f\| \leq \|f\|_p$.

Montrons enfin que $\|U_f\| = \|f\|_p$. On utilisera la fonction sign : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{sign}(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0} - \mathbf{1}_{x<0}$.

Commençons pas le cas $p \in (1, \infty)$. Soit $f \in L^p$. Posons $g = \text{sign}(f) \cdot |f|^{p/q}$. Alors

$$\|g\|_q^q = \int (|f|^{p/q})^q \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p.$$

Ainsi $g \in L^q$ avec $\|g\|_q = \|f\|_p^{p/q}$. En utilisant que $p = 1 + p/q$ (qui se déduit directement de (6.4)), on obtient

$$|U_f(g)| = \int f \cdot \text{sign}(f) \cdot |f|^{\frac{p}{q}} \, d\mu = \int |f|^{1+\frac{p}{q}} \, d\mu = \|f\|_p^p = \|f\|_p \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{q}} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Ainsi $\|U_f\| \geq \|f\|_p$, donc $\|U_f\| = \|f\|_p$.

Passons au cas $p = 1, q = \infty$. Soit $f \in L^1$ et posons $g = \text{sign}(f)$. Alors $\|g\|_\infty = 1$ et

$$U_f(g) = \int fg \, d\mu = \int |f| \, d\mu = \|f\|_1.$$

Ainsi $\|U_f\| \geq \|f\|_1$, donc $\|U_f\| = \|f\|_1$.

Enfin, supposons $p = \infty$ et $q = 1$. Soit $f \in L^\infty$. Il existe alors une suite d'ensembles $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ avec

$$\mu(A_n) \in (0, \infty) \quad \text{et} \quad |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1 \text{ et } x \in A_n.$$

[1] Quand $p = \infty$ et $q = 1$, une condition sur $E$ est nécessaire pour obtenir l'isométrie de $U$: il faut que pour tout $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) = \infty$, il existe $B \subset A$ mesurable tel que $0 < \mu(B) < \infty$. Pour cela il suffit par exemple que $(E, \mathcal{E}, \mu)$ soit $\sigma$-fini.

Pour $n \geq 1$, définissons les fonctions $g_n : E \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{1}{\mu(A_n)} \mathbf{1}_{x \in A_n} \mathrm{sign}(f(x)).$$

Alors $g_n \in L^1$ avec $\|g_n\|_1 = 1$ pour tout $n \geq 1$ et

$$U_f(g_n) = \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(x)\mathrm{sign}(f(x)) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} |f(x)| d\mu(x) \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

On conclut que $\|U_f\| \geq \|f\|_\infty$, donc $\|U_f\| = \|f\|_\infty$. □

## 6.6 $L^2$ comme espace de Hilbert

L'espace $L^2$ joue un rôle particulier parmi les espaces $L^p$ car il s'agit d'un espace de Hilbert.

**Proposition 6.18.** *Pour $f, g \in L^2(E)$, la fonction $fg$ est intégrable et*

$$\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu$$

*est un produit scalaire sur $E$. La norme associée à ce produit scalaire est la norme $\|.\|_2$, donc $L^2$ est un espace de Hilbert.*

**Preuve:** Soient $f, g \in L^2(E)$. Par l'inégalité de Hölder (ou plus précisément par le Corollaire 6.17) la fonction $fg$ est intégrable.

La fonction $(f, g) \mapsto \int fg \, d\mu$ est évidement bi-linéaire. De plus,

$$\langle f, f \rangle = \int f^2 \, d\mu = \|f\|_2^2 \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $f = 0$ $\mu$-p.p., ce qui revient à dire que $f = 0$ dans $L^2$. □

*Remarque* 6.19. Quand on considère des fonctions de $E$ dans $\mathbb{C}$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int \overline{f} g \, d\mu$$

pour $f, g \in L^2$. Cette expression définie bien un produit scalaire au sens de la définition 5.32.

**Corollaire 6.20.** *L'espace $L^2$ est auto-dual, c.-à-d. que la fonction $U : L^2 \to (L^2)^*$ définie par* (6.6) *est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.*

Ce corollaire est un cas particulier du Théorème 5.31, qui découle de l'existence des projections orthogonales dans les espaces de Hilbert. Donnons par la suite deux résultats qui utilise la structure hilbertienne de $L^2$, et de manière indirecte l'existence de la projection orthogonale.

**Espérance conditionnelle** On énonce ici ce résultat probabiliste dans le langage de la théorie de la mesure.

**Théorème 6.21.** *Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de probabilité, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ une tribu et $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$. Alors il existe une unique fonction $g : E \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-mesurable, telle que, pour toute fonction $\mathcal{F}$-mesurable bornée $h$,*

$$\int fh\, d\mu = \int gh\, d\mu.$$

En probabilité, on écrit $E = \Omega$, $\mu = \mathbb{P}$, les fonctions $f, g$ sont appelées des variables aléatoires et l'intégrale contre $\mathbb{P}$ est notée $\mathbb{E}$. On dit que $g$ est l'espérance conditionnelle de $f$ sachant $\mathcal{F}$ et on la note $\mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F})$.

**Preuve:** Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$, $\mathcal{F}$ comme dans l'énoncé.

On commence par s'apercevoir que $L^2(E, \mathcal{F}, \mu) = \{h \in L^2 : h \text{ est } \mathcal{F}\text{-mesurable}\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$. Le fait que $L^2(E, \mathcal{F}, \mu)$ est un sous-espace vectoriel suit des propriétés des fonctions mesurables; il faut simplement vérifier qu'il est fermé. Soient $(f_n)_{n\geq 1} \in L^2(E, \mathcal{F}, \mu)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$. Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$; par complétude de $L^2(E, \mathcal{F}, \mu)$, elle converge aussi dans $L^2(E, \mathcal{F}, \mu)$. Ainsi sa limite est dans $L^2(E, \mathcal{F}, \mu)$, donc $L^2(E, \mathcal{F}, \mu)$ est fermé.

Fixons $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$. Notons $g$ la projection orthogonale de $f$ sur $L^2(E, \mathcal{F}, \mu)$. Alors, pour toute fonction $h \in L^2(E, \mathcal{F}, \mu)$, $\langle f - g, h\rangle = 0$, donc

$$\int fh\, d\mu = \int (f-g)h\, d\mu + \int gh\, d\mu = \int gh\, d\mu.$$

En particulier, l'équation précédente est valide pour toute fonction $h$ bornée. Cela prouve l'existence de la fonction $g$ désirée.

Supposons que $g$ et $\tilde{g}$ sont deux fonctions avec les propriétés désirées. Alors $\int (g - \tilde{g})h\, d\mu = 0$ pour toute fonction $h$ bornée et $\mathcal{F}$-mesurable. Posons $h = \mathbf{1}_{g>\tilde{g}} - \mathbf{1}_{g<\tilde{g}}$ (qui est bien bornée par 1 et $\mathcal{F}$ mesurable car $g$ et $\tilde{g}$ le sont). Alors $0 = \int (g-\tilde{g})h\, d\mu = \int |g-\tilde{g}|\, d\mu$, donc $g = \tilde{g}'$ presque partout, ce qui implique qu'elles correspondent au même élément de $L^2$. □

**Transformée de Fourier** Considérons l'espace $L^2([0,1])$ des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ de carré intégrable. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\begin{aligned} \chi_k : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{i2\pi kt}. \end{aligned}$$

Évidement $\chi_k \in L^2([0,1])$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors, pour $k \neq \ell$,

$$\langle \chi_k, \chi_\ell \rangle = \int_0^1 e^{i2\pi(\ell-k)t}\, d\mu = 0.$$

D'autre part

$$\|\chi_k\|_2^2 = \langle \chi_k, \chi_k \rangle = \int_0^1 e^{i2\pi(k-k)t}\, d\mu = 1.$$

Ainsi $(\chi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2([0,1])$.

Par le théorème de Weierstrass, $\mathrm{Vect}(\chi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}([0,1])$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ pour la norme $\|.\|_\infty$. La mesure $\lambda$ sur $[0,1]$ étant finie, la convergence en norme $\|.\|_\infty$ implique celle en norme $\|.\|_2$ (voir exercice 109). Ainsi l'adhérence de $\mathrm{Vect}(\chi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2([0,1])$ contient $\mathcal{C}([0,1])$. Ce dernier ensemble est dense dans $L^2([0,1])$ (voir le théorème 6.12), ce qui implique que $\mathrm{Vect}(\chi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi dense dans $L^2([0,1])$.

On conclut que $(\chi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée qui engendre un sous-espace vectoriel dense, donc que c'est **une base hilbertienne** de $L^2([0,1])$. Donnons quelques conséquences de ce fait.

Pour une fonction $f \in L^2([0,1])$, on définit ses coefficients de Fourrier par $c_k(f) = \langle \chi_k, f \rangle = \int_0^1 f e^{-kt}\, d\mu = 0$. Alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$ et

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^2 = \|f\|_2.$$

De plus

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \chi_k = f,$$

où la convergence implicite de la série est dans $L^2$.

**Exercice 112.**
Pour $E = \mathbb{N}$ et $\mu$ la mesure de comptage, on note l'espace $L^2$ simplement $\ell^2$. C'est l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\sum_n x_n^2 < \infty$. Trouver une base orthonormée de $\ell^2$.

# Chapitre 7

# Espaces de mesures: mesures signées

## 7.1 Définitions; variation totale

Il peut être intéressant de considérer des espaces de mesures, similaires aux espaces de fonctions qu'on a étudié dans les parties précédentes. Pour pouvoir parler d'un espace vectoriel de mesures, on doit pouvoir faire des soustractions de mesures, ce qui n'est pas possible dans le cadre des mesures déjà définies. Pour cette raison, on introduit ici la notion plus générale de *mesure signée*. Pour accentuer la différence, on appellera les mesures introduites au chapitre 1 des *mesure positives*.

**Définition 7.1.** *Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une* mesure signée *$\mu$ sur $(E, \mathcal{E})$ est une application $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ avec $\mu(\emptyset) = 0$ et telle que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments disjoints de $\mathcal{E}$, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)| < \infty \tag{7.1}$$

*et*

$$\mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{7.2}$$

*Remarque* 7.2. La condition $\mu(\emptyset) = 0$ est superflue, elle découle de (7.1).
La condition (7.1) est nécessaire pour que la somme infinie dans (7.2) soit bien définie.

**Proposition 7.3.** *Pour un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ on note $M(E, \mathcal{E}) = M(E)$ l'ensemble des mesures signées sur $(E, \mathcal{E})$. Alors $M(E, \mathcal{E})$ est un espace vectoriel contenant les mesures positives finies sur $(E, \mathcal{E})$.*

**Preuve:** Soient $\mu, \nu$ deux mesures signées sur $(E, \mathcal{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il est évident que $\lambda\mu \in M(E, \mathcal{E})$. Montrons que $\mu + \nu \in M(E, \mathcal{E})$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$. Alors

$$\sum_n |\mu(A_n) + \nu(A_n)| \leq \sum_n |\mu(A_n)| + |\nu(A_n)| < \infty.$$

Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ et $\sum_n \nu(A_n)$ étant absolument convergentes, on peut les sommer terme par terme:

$$\mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) + \nu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big[\mu(A_n) + \nu(A_n)\big].$$

On conclut que $\mu + \nu \in M(E, \mathcal{E})$.

Il est évident qu'une mesure positive appartient à $M(E, \mathcal{E})$ si et seulement si elle est finie. □

**Théorème 7.4.** *Soit $\mu$ une mesure signée sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Pour $A \in \mathcal{E}$, posons*

$$|\mu|(A) = \sup\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)| : \ A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{E}, \ t.q. \ A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big\}. \tag{7.3}$$

*Alors $|\mu|$ est une mesure positive finie sur $(E, \mathcal{E})$. De plus, pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$.*

**Preuve:** Montrons pour commencer que $|\mu|$ est une mesure positive sur $E$. Soient $A_1, A_2, \ldots$ des parties disjointes mesurables de $E$. Il faut alors montrer que

$$|\mu|\big(\bigsqcup_n A_n\big) = \sum_n |\mu|(A_n).$$

On montrera cette égalité par double inégalité.

Soit $\epsilon > 0$. Alors pour $n \geq 0$, il existe une partition de $A_n$, notons la $(A_{n,i})_{i\geq 0}$, telle que

$$|\mu|(A_n) \leq \sum_{i\geq 0} |\mu(A_{n,i})| + \epsilon 2^{-n}.$$

Ainsi on obtient une partition $(A_{n,i})_{n,i\geq 0}$ de $\bigsqcup_{n\geq 0} A_n$ avec

$$|\mu|\big(\bigsqcup_n A_n\big) \geq \sum_{n,i\geq 0} |\mu(A_{n,i})| \geq \sum_{n\geq 0} \Big[|\mu|(A_n) - \epsilon 2^{-n}\Big] = \sum_{n\geq 0} |\mu|(A_n) - 2\epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que

$$|\mu|\big(\bigsqcup_n A_n\big) \geq \sum_{n\geq 0} |\mu|(A_n).$$

Inversement, soit $(B_i)_{i\geq 0}$ une partition de $\bigsqcup_{n\geq 0} A_n$. Alors, pour chaque $n \geq 0$, $(B_i \cap A_n)_{i\geq 0}$ est une partition de $A_n$, donc

$$\sum_{i\geq 0} |\mu(B_i \cap A_n)| \leq |\mu|(A_n).$$

En sommant cette inégalité sur $n$, on obtient

$$\sum_{i\geq 0} |\mu(B_i)| = \sum_{i\geq 0} \Big| \sum_{n\geq 0} \mu(B_i \cap A_n) \Big| \leq \sum_{i\geq 0} \sum_{n\geq 0} |\mu(B_i \cap A_n)| \leq \sum_{n\geq 0} |\mu|(A_n).$$

Cette inégalité étant valable pour toute partition $(B_i)_{i\geq 0}$ de $\bigsqcup_{n\geq 0} A_n$, on conclut que

$$|\mu|\big(\bigsqcup_n A_n\big) \leq \sum_{n\geq 0} |\mu|(A_n).$$

Montrons maintenant par l'absurde que $|\mu|$ est une mesure finie. Supposons donc que $|\mu|(E) = \infty$. Notre but est de construire une famille $(B_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles disjoints, avec $|\mu(B_n)| \geq 1$ pour tout $n$.

Du fait que $|\mu|(E) = \infty$, il existe une partition $(A_n)_{n\geq 0}$ de $E$ avec

$$2 + 2|\mu(E)| \leq \sum_{n\geq 0} |\mu(A_n)| = \Big| \sum_{n\,:\,\mu(A_n)\geq 0} \mu(A_n) \Big| + \Big| \sum_{n\,:\,\mu(A_n)<0} \mu(A_n) \Big|.$$

Posons

$$F = \bigsqcup_{n\,:\,\mu(A_n)\geq 0} A_n \quad \text{et} \quad G = \bigsqcup_{n\,:\,\mu(A_n)<0} A_n,$$

de sorte que $F, G$ forment une partition de $E$, avec $|\mu(F)| + |\mu(G)| \geq 2 + 2|\mu(E)|$. On conclut que un des termes dans la somme est plus grand que $1 + \mu(E)$. Supposons que c'est $|\mu(F)|$. Alors

$$|\mu(G)| = |\mu(E \setminus F)| = |\mu(E) - \mu(F)| \geq |\mu(F)| - |\mu(E)| \geq 1.$$

On peut de la même facon montrer que si $|\mu(G)| > 1 + \mu(E)$, alors $\mu(F) \geq 1$. Dans les deux cas on a $|\mu(F)| \geq 1$ et $|\mu(G)| \geq 1$.

De plus

$$|\mu|(F) + |\mu|(G) = |\mu|(E) = \infty.$$

On conclut que au moins un d'entre $|\mu|(F)$ et $|\mu|(G)$ vaut $+\infty$. Si c'est le premier, on pose $E_1 = F$ et $B_0 = G$, si c'est l'inverse on pose $E_1 = G$ et $B_0 = F$. Dans les deux cas, on obtient une partition $E_1 \sqcup B_0 = E$ avec

$$|\mu|(E_1) = \infty \quad \text{et} \quad |\mu(B_0)| \geq 1.$$

On recommence la procédure avec $E_1$ à la place de $E$ pour obtenir $B_1$ et $E_2$ etc. Ainsi on forme une famille $(B_n)_{n\geq 0}$ de parties disjointes de $E$ avec $|\mu(B_n)| \geq 1$ pour tout $n$. Cela contredit la propriété définitoire de $\mu$, à savoir (7.1).

Enfin, pour $A \in \mathcal{E}$, en prenant $A_0 = A$ et $A_1 = A_2 = \cdots = \emptyset$ dans le supremum de (7.3), on déduit que $|\mu|(A) \geq |\mu(A)|$. $\square$

Suite à ce théorème, on définit la *variation totale* d'une mesure signée $\mu$ par

$$\|\mu\|_{VT} = |\mu|(E) \in [0, \infty).$$

**Théorème 7.5.** *La variation totale est une norme sur $M(E, \mathcal{E})$. Muni de cette norme, $M(E, \mathcal{E})$ est un espace de Banach.*

**Preuve:** Soit $\mu, \nu$ deux mesures signées. Alors, pour toute partition mesurable $(A_n)_{n\geq 0}$ de $E$,

$$\sum_{n\geq 0} |\mu(A_n) + \nu(A_n)| \leq \sum_{n\geq 0} \big[|\mu(A_n)| + |\nu(A_n)|\big] \leq |\mu|(E) + |\nu|(E).$$

Ainsi $\|\mu + \nu\|_{VT} \leq \|\mu\|_{VT} + \|\nu\|_{VT}$. D'autre part il est évident que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \mu \in M(E, \mathcal{E})$ et que $\|\lambda \cdot \mu\|_{VT} = |\lambda| \cdot \|\mu\|_{VT}$. Enfin, si $\|\mu\|_{VT} = 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{E}$, $|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq |\mu|(E) = 0$, donc $\mu = 0$. On conclut que $\|.\|_{VT}$ est bien une norme sur $M(E, \mathcal{E})$.

Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\big(M(E, \mathcal{E}), \|.\|_{VT}\big)$. Pour $A \in \mathcal{E}$ et $m, n \geq 0$,

$$|\mu_m(A) - \mu_n(A)| \leq |\mu_m - \mu_n|(A) \leq |\mu_m - \mu_n|(E) = \|\mu_m - \mu_n\|_{VT}.$$

Ainsi $(\mu_n(A))_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$; notons $\nu(A)$ sa limite.

Montrons que $\nu$ ainsi définie est une mesure signée. Soient $(A_k)_{k\geq 0}$ une famille de parties mesurables disjointes de $E$. Alors $\mu_n(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu(A_k)$ pour chaque $k \geq 0$. De plus, pour tout $n \geq 0$, par le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} |\mu_n(A_k) - \nu(A_k)| &= \sum_{k\geq 0} \lim_{m\to\infty} |\mu_n(A_k) - \mu_m(A_k)| \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{k\geq 0} |\mu_n(A_k) - \mu_m(A_k)| \leq \liminf_{m\to\infty} \|\mu_n - \mu_m\|_{VT}.\end{aligned}$$

Du fait que $(\mu_j)_j$ est de Cauchy, la quantité de la ligne précédente est finie pour tout $n$ et converge vers 0 quand $n \to \infty$.

Ainsi $\sum_{k\geq 0} |\nu(A_k)| \leq \sum_{k\geq 0} |\mu_n(A_k) - \nu(A_k)| + \sum_{k\geq 0} |\mu_n(A_k)| < \infty$. De plus,

$$\begin{aligned}&\Big|\nu\big(\bigsqcup_{k\geq 0} A_k\big) - \sum_{k\geq 0} \nu(A_k)\Big| \\ &\leq \underbrace{\Big|\nu\big(\bigsqcup_{k\geq 0} A_k\big) - \mu_n\big(\bigsqcup_{k\geq 0} A_k\big)\Big|}_{\leq \liminf_{m\to\infty} \|\mu_n - \mu_m\|_{VT} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\Big|\sum_{k\geq 0} \mu_n(A_k) - \sum_{k\geq 0} \nu(A_k)\Big|}_{\leq \liminf_{m\to\infty} \|\mu_n - \mu_m\|_{VT} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}.\end{aligned}$$

On conclut que $\nu \in M(E, \mathcal{E})$. Par le même calcul, il s'en suit que

$$\|\mu_n - \nu\|_{VT} \leq \liminf_{m\to\infty} \|\mu_n - \mu_m\|_{VT} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

## 7.2 Décomposition de Hahn

Soit $\mu$ une mesure signée sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Posons

$$\mu_+ = \frac{1}{2}\big(|\mu| + \mu\big) \quad \text{et} \quad \mu_- = \frac{1}{2}\big(|\mu| - \mu\big). \tag{7.4}$$

Par la proposition 7.3, $\mu_+$ et $\mu_-$ sont des mesures signées. On vérifie simplement qu'il s'agit de mesures positives.

Le fait d'écrire $\mu$ comme difference de deux mesures positives nous permet de définir simplement d'intégrale contre $\mu$. En effet, on dit qu'une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ est $\mu$ intégrable si $\int |f|\, d|\mu| < \infty$; on pose alors

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu_+ - \int f\, d\mu_-. \tag{7.5}$$

On observe facilement que la condition d'inégrabilité assure que les deux intégrales de (7.5) sont finies, et donc que $\int f\, d\mu$ est bien définie. De plus, les propriétés basiques de l'intégrale, comme la linéarité, s'étendent aux intégrales contre les mesures signées. Pour plus de détails, voir l'exercice 116

**Théorème 7.6.** *Il existe une partie mesurable $B$ de $E$, unique à un ensemble de $|\mu|$-mesure nulle près, telle que $\mu_+$ et $\mu_-$ sont les restrictions de $|\mu|$ à $B$ et $B^c$ respectivement. En d'autres mots, pour tout $A \in \mathcal{E}$,*

$$\mu(A) = |\mu|(A \cap B) - |\mu|(A \cap B^c). \tag{7.6}$$

On rappelle la notion de mesures absolument continues. Si $\nu_1, \nu_2$ sont deux mesures positives sur $(E, \mathcal{E})$ on dit que $\nu_1$ est absolument continue par rapport à $\nu_2$ (et on l'écrit $\nu_1 \ll \nu_2$) si pour tout $A \in \mathcal{E}$ avec $\nu_2(A) = 0$, on a aussi $\nu_1(A) = 0$.

Un concept relié à celui de mesures absolument continues est celui de mesures étrangères. Soient $\nu_1$ et $\nu_2$ deux mesures positives sur un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$. On dit que $\nu_1$ et $\nu_2$ sont *étrangères* s'il existe deux ensembles disjoints $B_1, B_2 \in \mathcal{E}$ avec $\nu_1(B_1^c) = 0$ et $\nu_2(B_2^c) = 0$.

Pour des mesures signées $\nu_1$ et $\nu_2$, on dit qu'elles sont absolument continues/étrangères si et seulement si $|\nu_1|$ et $|\nu_2|$ le sont.

Ainsi le théorème de décomposition de Hahn dit simplement que $\mu_+$ et $\mu_-$ sont étrangères.

**Preuve:** On commence par montrer l'**existence de** $B$. Soit $\mu$ une mesure signée sur $(E, \mathcal{E})$. Posons $M = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{E}\}$. Du fait que $|\mu|$ est une mesure finie, on conclut que $M \in [0, \infty)$. Si $M = 0$, alors $\mu = \mu_-$ et on peut choisir $B = \emptyset$.

Supposons donc que $M > 0$ et pour $k \geq 1$, soit $A_k \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A_k) \geq M(1 - 2^{-k})$. Posons

$$B = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

On va montrer que $\mu(B) = M$ et que $\mu_+$ est concentrée sur $B$ alors que $\mu_-$ est concentrée sur $B^c$.

Observons que pour $0 \leq n \leq k$ on a

$$\begin{aligned}\mu\big(A_n \cup \cdots \cup A_{k+1}\big) &= \mu\big(A_n \cup \cdots \cup A_k\big) + \mu\big(A_{k+1}\big) - \mu\big[(A_n \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}\big] \\ &\geq \mu\big(A_n \cup \cdots \cup A_k\big) + M(1 - 2^{-(k+1)}) - M \\ &= \mu\big(A_n \cup \cdots \cup A_k\big) - M \cdot 2^{-(k+1)}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mu\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) = \mu(A_n) + \sum_{j=n}^{\infty}\Big[\mu\Big(\bigcup_{k=n}^{j+1} A_k\Big) - \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{j} A_k\Big)\Big] \geq \mu(A_n) - M\cdot 2^{-n} \geq M(1-2^{-n+1}).$$

Ainsi (par intersection dénombrable décroissante, voir exercice 115),

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) \geq M.$$

Ainsi $\mu(B) = M$.

Montrons que $\mu_+(B^c) = 0$. Supposons le contraire, à savoir que $|\mu|(B^c) + \mu(B^c) = 2\mu_+(B^c) > 0$. Alors, par la définition de $|\mu|$, il existe un famille d'ensemble mesurable disjoints $A_0, A_1, \ldots$ avec $\bigsqcup_{n\geq 0} A_n = B^c$ et

$$\sum_{n\geq 0}\Big[|\mu(A_n)| + \mu(A_n)\Big] > \mu_+(B^c) > 0.$$

Il s'en suit qu'il existe au moins un $n$ avec $\mu(A_n) > 0$; fixons un tel $n$. Alors

$$\mu(B \cup A_n) = \mu(B) + \mu(A_n) = M + \mu(A_n) > M,$$

ce qui contredit la définition de $M$.

Enfin, observons que

$$\inf_{A\in\mathcal{E}} \mu(A) = \mu(E) - \sup_{A\in\mathcal{E}} \mu(A) = \mu(E) - M = \mu(B^c).$$

Ainsi, par le même raisonnement que pour $B$, on montre que $\mu_-(B) = 0$.

Enfin, montrons l'**unicité de** $B$. Soit $C \in \mathcal{E}$ un ensemble avec les mêmes propriétés que $B$. Alors, comme $\mu_-(B) = 0$

$$|\mu|(B \setminus C) = \mu_+(B \setminus C) \leq \mu_+(C^c) = 0.$$

De la même façon on montre que $|\mu|(C \setminus B) = 0$, ce qui implique que $B$ et $C$ diffère d'un ensemble $|\mu|$-négligeable. □

**Exercice 113.**
Soit $\mu$ une mesure positive quelconque sur un espace $(E, \mathcal{E})$ et $f \in L^1(E, \mu)$. Définissons $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x), \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

(a) Vérifier que $\nu$ est une mesure signée sur $E$. Montrer que $|\nu| = |f|d\mu$ et déduire en particulier que $\|\nu\|_{VT} = \|f\|_1$.
*On dit que $L^1(E,\mu)$ s'injecte de manière isométrique dans $M(E,\mathcal{E})$.*

(b) Exprimer $\nu_+$ et $\nu_-$ à l'aide de $f$.

(c) Expliciter un ensemble $B$ tel que $\nu_+(B^c) = 0$ et $\nu_-(B) = 0$.

**Exercice 114.**
Soit $\mu$ une mesure signée sur un espace $(E,\mathcal{E})$. Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{E}$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

**Exercice 115.**
Soient $\mu$ une mesure signée sur un espace $(E,\mathcal{E})$ et $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ensembles. Montrer que

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 0} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

*Indication:* utiliser le passage au complémentaire.

**Exercice 116.**
Soient $\mu, \mu'$ deux mesures signées sur un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ et $f, g : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables.

(a) Montrer que

$$\Big|\int f\,d\mu_+\Big| \leq \int |f|\,d|\mu| \quad \text{et} \quad \Big|\int f\,d\mu_-\Big| \leq \int |f|\,d|\mu|.$$

Déduire que $\int f\,d\mu$ est bien définie.

(b) Montrer que

$$\Big|\int f\,d\mu\Big| \leq \int |f|\,d|\mu|.$$

(c) Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu.$$
$$\int f\,d(\alpha\mu + \beta\mu') = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int f\,d\mu'.$$

(d) Supposons que $\mu = h\,d\nu$ pour une mesure positive $\nu$. Montrer que

$$\int f\,d\mu = \int fh\,d\nu.$$

**Exercice 117.**
Soient $\mu$ une mesure positive et $\nu$ une mesure signée sur un espace $(E, \mathcal{E})$. Sans utiliser la décomposition de Hahn, montrer que $|\nu| \perp \mu$ si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) > 0$ on a $\nu(A) = 0$.

**Exercice 118.**
Soient $\mu$ une mesure signée. Montrer que dans le sup de la définition (7.3) de $|\mu|$ on peut se limiter à des partitions formées de deux ensembles. Montrer aussi que le sup est atteint:

$$|\mu|(A) = \max\{|\mu(B_1)| + |\mu(B_2)| : \text{ avec } A = B_1 \sqcup B_2\}.$$

**Exercice 119 (☠).**
Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures positives de probabilité sur un même espace $(E, \mathcal{E})$. Un couplage de $\mu$ et $\nu$ est une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(E^2, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ avec marginales $\mu$ et $\nu$, respectivement c.-à-d. telle que $\mathbb{P}(A \times E) = \mu(A)$ et $\mathbb{P}(E \times A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\|\mu - \nu\|_{VT} = 2 - 2 \sup_{\mathbb{P}} \mathbb{P}(\{(x, x) : x \in E\}), \tag{VT}$$

où le supremum est pris sur tous les couplages $\mathbb{P}$ possibles de $\mu$ et $\nu$. (On va supposer que $E, \mathcal{E}$ sont telles que la diagonale $\{(x, x) : x \in E\}$ de $E^2$ est dans $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.)

En autres mots, la distance en variation totale entre $\mu$ et $\nu$ est obtenue comme suit. On aimerai créer un espace de probabilité avec des variables aléatoires $X$ et $Y$ de lois $\mu$ et $\nu$, respectivement. On est libre de choisir la relation entre $X$ et $Y$. Si on fait le choix $\mathbb{P}$ qui minimise la probabilité que $X$ et $Y$ diffèrent, alors cette probabilité est la moitié distance en variation totale: $\mathbb{P}(X \neq Y) = \frac{1}{2}\|\mu - \nu\|_{VT}$.

(a) Montrer que $\|\mu - \nu\|_{VT} = 2 \sup\{\mu(A) - \nu(A) : A \in \mathcal{E}\}$.
*Indication:* utiliser la décomposition de Hahn pour la mesure signée $\mu - \nu$; en utilisant que $\mu$ et $\nu$ sont de probabilité, montrer que $\sup\{\mu(A) - \nu(A) : A \in \mathcal{E}\} = \sup\{\nu(B) - \mu(B) : B \in \mathcal{E}\}$.

(b) Montrer que, pour un couplage $\mathbb{P}$ comme avant et $A \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \notin A) = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in A) \geq \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A).$$

Utiliser le point précédent pour montrer que, pour tout couplage $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \geq \frac{1}{2}\|\mu - \nu\|_{VT}.$$

*Ça peut être intéressant de traduire ces énonces de leur écriture probabiliste en écriture type théorie de la mesure.*

(c) Pour l'inégalité inverse, il faut construire un couplage $\mathbb{P}$ qui atteint le supremum dans (VT). Observer que $\mu - (\mu - \nu)_+ = \nu - (\mu - \nu)_-$ est une mesure positive sur $E$ qu'on va noter $\tau$. Calculer $\tau(E)$.

(d) Notons $\tilde{\tau}$ l'image de $\tau$ sur la diagonale $\{(x,x) : x \in E\}$ de $E^2$. Formellement $\tilde{\tau}(B) = \tau(\{x \in E : (x,x) \in B\})$ pour tout $B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.

Soit $\rho$ un couplage de $(\mu - \nu)_+$ et $(\mu - \nu)_-$ (c.-à-d. une mesure sur $E^2$ avec marginales $(\mu-\nu)_+$ et $(\mu-\nu)_-$, respectivement). Calculer $\tilde{\tau}(A\times E)+\rho(A\times E)$ et $\tilde{\tau}(E\times A)+\rho(E\times A)$ pour $A \in \mathcal{E}$. Déduire la valeur de $\tilde{\tau}(E^2) + \rho(E^2)$.

(e) Conclure.

# Chapitre 8

# Décomposition de Lebesgue et théorème de Radon-Nikodim

**Théorème 8.1.** *Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $\nu$ une mesure signée et $\mu$ une mesure positive $\sigma$-finie sur $(E, \mathcal{E})$. Alors il existe deux uniques mesures signées $\nu_0$ et $\nu_1$ telles que $\nu = \nu_0 + \nu_1$ et*

$$\nu_0 \ll \mu \quad \text{et} \quad \nu_1 \perp \mu.$$

*De plus, il existe une unique fonction $f \in L^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que*

$$\nu_0 = f\, d\mu.$$

La décomposition $\nu = \nu_0 + \nu_1$ est appelée la décomposition de Lebesgue de $\nu$. Le fait que $\nu_0$ admet une densité (la fonction $f$) par rapport à $\mu$ est ce qu'on appelle souvent le théorème de Radon-Nikodim.

**Corollaire 8.2** (Théorème de Radon-Nikodim)**.** *Soient $\mu, \nu$ deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ avec $\mu$ $\sigma$-finie et $\nu$ signée et telles que $\nu \ll \mu$. Alors il existe un unique $f \in L^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ tel que $\nu = f\, d\mu$.*

Le corollaire suit directement du théorème.

**Preuve du Théorème 8.1:** La partie difficile du théorème est l'existence de la décomposition; l'unicité suit de vérifications standard: Si $\nu = \nu_0 + \nu_1 = \nu_0' + \nu_1'$ sont deux compositions avec les propriétés demandées, alors $\nu_0 - \nu_0' = \nu_1' - \nu_1$. Le terme de droite est une mesure signée étrangère par rapport à $\mu$, alors que celui de droite est absolument continue par rapport à $\mu$. Ainsi $\nu_0 - \nu_0' = \nu_1' - \nu_1 = 0$ (voir l'exercice 120). De plus, si $\nu_0 = f\, d\mu = g\, d\mu$, alors on a $\int_A (f - g)\, d\mu = 0$ pour tout $A \in \mathcal{E}$. Ainsi $\int \mathbf{1}_{f \geq g}(f - g) d\mu = \int \mathbf{1}_{f \leq g}(f - g)\, d\mu = 0$, donc $f = g$, $\mu$-p.p.

Commençons par prouver l'existence de la décomposition et celle de $f$ quand $\nu$ **est positive et** $\mu$ **est finie** (du fait que $\nu$ est signée et $\mu$ positive, les deux sont positives finies dans ce cas). Considérons l'espace $L^2(E, \mathcal{E}, \nu + \mu)$. On sait par le Théorème 6.18 qu'il

s'agit d'un espace de Hilbert, donc auto-dual. Soit $\Lambda : L^2(E, \mathcal{E}, \nu + \mu) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f \mapsto \int f \, d\nu.$$

Alors $\Lambda$ est une forme linéaire sur $L^2(E, \mathcal{E}, \nu + \mu)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec

$$\Lambda(f) \leq \int |f| \, d\nu \leq \int |f| \, d(\nu + \mu) \leq \Big( \int |f|^2 \, d(\nu + \mu) \Big)^{1/2} \big(\nu(E) + \mu(E)\big)^{1/2}.$$

Ainsi $\Lambda$ est continue. Par l'auto-dualité de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu + \nu)$ on peut choisir $g \in \mathcal{L}^2(E, \mathcal{E}, \mu + \nu)$ telle que

$$\Lambda(f) = \int f \, d\nu = \int fg \, d(\nu + \mu), \qquad \forall f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu + \nu).$$

En particulier, pour tout $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu + \nu)$ fonction positive

$$\int fg \, d(\mu + \nu) = \int f \, d\nu \geq 0. \tag{8.1}$$

Il s'en suit que $g \geq 0$, $(\mu + \nu)$-presque partout. D'autre part, pour tout $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu + \nu)$ fonction positive,

$$0 \leq \int f \, d\mu = \int f \, d(\mu + \nu) - \int f \, d\nu = \int f(1 - g) \, d(\mu + \nu). \tag{8.2}$$

Ainsi $1 - g \geq 0$, $(\mu + \nu)$-presque partout. Quitte à changer $g$ sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que $g(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in E$.

Posons $B = \{x \in E : g(x) = 1\}$. Alors

$$\nu(B) = \int \mathbf{1}_B \, d\nu = \int g \mathbf{1}_B \, d(\mu + \nu) = \int \mathbf{1}_B \, d(\mu + \nu) = \mu(B) + \nu(B).$$

On déduit que $\mu(B) = 0$. Posons $\nu_1 = \nu(. \cap B)$, la restriction de $\nu$ à $B$. Alors $\nu_1$ et $\mu$ sont étrangères.

Il reste à montrer que $\nu_0 = \nu - \nu_1 = \nu(. \cap B^c)$ admet une densité par rapport à $\mu$. Un calcul directe nous montre que cette densité devrait être $h = \frac{g}{1-g}$. Pour montrer que c'est en effet le cas, observons que pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $n \geq 1$, en utilisant (8.1),

$$\begin{aligned}
\int_A (1 - g^{n+1}) d\nu &= \int_A (1 - g)(1 + g + \cdots + g^n) d\nu \\
&= \int_A (1 + g + \cdots + g^n) d\nu - \int_A g(1 + g + \cdots + g^n) d\nu \\
&= \int_A g(1 + g + \cdots + g^n) d(\mu + \nu) - \int_A g(1 + g + \cdots + g^n) d\nu \\
&= \int_A g(1 + g + \cdots + g^n) d\mu.
\end{aligned}$$

Quand $n$ tend vers l'infini, $1 - g^{n+1}(x) \to \mathbf{1}_{g(x)<1} = \mathbf{1}_{B^c}(x)$. D'autre part $g(x)(1 + g(x) +$

$\cdots + g^n(x)) \to g(x)/(1-g(x))$ pour tout $x \in B^c$. Comme $\mu(B) = 0$, on peut récrire ça:

$$g(1 + g + \cdots + g^n) \to \frac{g}{1-g}, \quad \mu \text{ presque partout.}$$

Ainsi, parle théorème de convergence monotone (les deux limites sont croissantes),

$$\nu_0(A) = \nu(A \cap B^c) = \int_A \frac{g}{1-g}\, d\mu.$$

On conclut que $\frac{g}{1-g}$ est la densité de $\nu_0$ par rapport à $\mu$. En particulier $\nu_0 \ll \mu$.

Passons au cas où $\nu$ **est positive finie et** $\mu$ **est** $\sigma$**-finie**. Alors il existe une faille d'ensembles disjoints $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ avec $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n$ et $\bigsqcup_{n\geq 0} A_n = E$. Écrivons $\mu^{(n)}$ et $\nu^{(n)}$ pour les restrictions de $\mu$ et $\nu$, respectivement, à $A_n$. On peut appliquer la partie précédente à $\mu^{(n)}$ et $\nu^{(n)}$. Écrivons, pour $n \geq 0$,

$$\nu^{(n)} = \nu_1^{(n)} + f^{(n)}\, d\mu$$

avec $\nu_1^{(n)} \perp \mu^{(n)}$. Posons $B_n \subset A_n$ tel que $\mu^{(n)}(B_n) = \mu(B_n) = 0$ et $\nu_1^{(n)}(B_n^c) = 0$.

Soit $B = \cup_n B_n$, $\nu_1 = \sum_n \nu_1^{(n)}$ et $f = \sum_{n\geq 0} f^{(n)}$ Alors $\nu_1$ est une mesure sur $E$ avec

$$\nu_1(B^c) \leq \sum_n \nu_1^{(n)}(B^c) \leq \sum_n \nu_1^{(n)}(B_n^c) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(B) \leq \sum_n \mu(B_n) = 0;$$

donc $\nu_1 \perp \mu$. De plus, par le théorème de convergence monotone, pour $A \in \mathcal{E}$,

$$\nu(A) = \lim_n \nu\Big(A \cap \bigcup_{k=0}^n A_n\Big) = \lim_n \sum_{k=0}^n \Big(\nu_1^{(k)}(A) + \int_A f^{(k)}\, d\mu\Big) = \nu_1(A) + \int_A f\, d\mu.$$

Enfin supposons que $\nu$ **est signée et** $\mu$ **est** $\sigma$**-finie**. Écrivons $\nu = \nu_+ - \nu_-$, avec $\nu_+$ et $\nu_-$ données par (7.4). Alors $\nu_+$ et $\nu_-$ sont des mesures positives finies sur $E$, on peut donc appliquer le point précédent. Écrivons

$$\nu_+ = \nu_{+,1} + f_+ d\mu \quad \text{et} \quad \nu_- = \nu_{-,1} + f_- d\mu,$$

où $\nu_{+,1}, \nu_{-,1} \perp \mu$ (notons $B_+$ et $B_-$ des supports $\mu$-négligeables de $\nu_{+,1}$ et $\nu_{-,1}$) et $f_+, f_- \in L^1(E, \mathcal{E}, \mu)$. Posons $\nu_1 = \nu_{+,1} - \nu_{-,1}$, $f = f_+ - f_-$.

Alors $\mu(B_+ \cup B_-) = 0$ et $|\nu_1|(B_+ \cup B_-)^c \leq |\nu_{+,1}|(B_+ \cup B_-)^c + |\nu_{-,1}|(B_+ \cup B_-)^c = 0$. Ainsi $\nu_1 \perp \mu$. D'autre part, pour $A \in \mathcal{E}$,

$$\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A) = \nu_{+,1}(A) - \nu_{-,1}(A) + \int_A (f_+ - f_-)\, d\mu = \nu_1(A) + \int_A f\, d\mu.$$

Ainsi, $\nu = \nu_0 + \nu_1$ avec $\nu_1 = f\, d\mu$ est une décomposition de Lebesgue. □

**Exercice 120.**
Soient $\mu, \nu$ deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ avec $\mu$ $\sigma$-finie et $\nu$ signée. Supposons que $\nu \ll \mu$ et $\nu \perp \mu$. Montrer que $\nu = 0$.

**Exercice 121.**
**Existence de la décomposition de Hahn par le théorème de Radon Nikodim.**
Soit $\nu$ une mesure signée sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Observons que dans la preuve du Théorème 8.1 on a utilisé la décomposition $\nu = \nu_+ - \nu_-$ (donc implicitement l'existence de la mesure finie $|\nu|$ – Théorème 7.4) mais pas le fait que $\nu_+ \perp \nu_-$.

Le but est de montrer que $\nu_+ \perp \nu_-$ suit du théorème de Radon-Nikodim.

(a) En utilisant le théorème de Radon-Nikodim, montrer qu'il existe une fonction $f \in L^1(E, \mathcal{E}, |\nu|)$ telle que $\nu = f\, d|\nu|$.

(b) Du fait que $|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$, déduire que $|f| \leq 1$, $|\nu|$-p.p.

(c) En utilisant la définition de $|\nu|$, montrer que $|f| = 1$, $|\nu|$-p.p.

(d) Exprimer $\nu_+$ et $\nu_-$ en fonction de $f$ et déduire que $\nu_+ \perp \nu_-$.

**Exercice 122.**
Soit $E$ un ensemble fini ou dénombrable. Posons $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ et notons $\mu$ la mesure de comptage sur $E$. Soit $\nu$ une mesure signée sur $(E, \mathcal{E})$. Montrer que $\nu \ll \mu$ et déterminer la densité de $\nu$ par rapport à $\mu$.

**Exercice 123 (☠).**
Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Radon-Nikodim à partir du théorème de Hahn. Pour simplifier, supposons que $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures positives finies sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

(a) Soit $F = \{f : E \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable t.q. } \nu(A) \geq \int_A f d\mu \ \forall A \in \mathcal{E}\}$. Montrer que si $f, g \in F$ alors $\max\{f, g\} \in F$ et que si $f_n \in F$ est une suite croissante de fonctions, alors $\lim_n f_n \in F$.
Déduire qu'il existe $g \in F$ telle que

$$\int_E g\, d\mu = \sup\Big\{ \int_E f\, d\mu : f \in F \Big\}.$$

(b) Fixons $g$ la fonction du point précédent. Argumenter que $\nu_1 := \nu - g\, d\mu$ est une mesure positive.

(c) Le but du reste de l'exercice est de montrer que $\nu_1 \perp \mu$. Soit $\epsilon > 0$ et considérons la mesure signée $\nu_1 - \epsilon\mu$. Par le théorème de Hahn, il existe $A_\epsilon \in \mathcal{E}$ tel que

$$(\nu_1 - \epsilon\mu)_+(A_\epsilon^c) = 0 \quad \text{et} \quad (\nu_1 - \epsilon\mu)_-(A_\epsilon) = 0.$$

Montrer que $\nu_1(A_\epsilon^c) \leq \epsilon\mu(E)$.

(d) Montrer que $\mu(A_\epsilon) = 0$.
*Indication:* Procéder par l'absurde et montrer que si $\mu(A_\epsilon) > 0$, alors $g + \epsilon \mathbf{1}_{A_\epsilon} \in F$ est une fonction avec $\int_E (g + \epsilon \mathbf{1}_{A_\epsilon}) d\mu > \int_E g d\mu$.

(e) Poser $A_0 = \bigcup_{n \geq 1} A_{1/n}$. Montrer que $\mu(A_0) = 0$ et que $\nu_1(A_0^c) = 0$.

(f) Conclure.

## 8.1 Décomposition par rapport à la mesure de Lebesgue *

Considérons la décomposition de Lebesgue des mesures sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$. Une consequence immédiate du théorème 8.1 est que toute mesure positive $\nu$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui est finie sur les compacts se décompose dans une partie absolument continue $\nu_{\text{ac}}$ par rapport à $\lambda$ et une mesure étrangère $\nu_0$ (voir l'exercice 124). De plus, $\nu_{\text{ac}}$ admet une densité $f$ par rapport à $\lambda$.

L'exemple le plus simple de mesures étrangères par rapport à $\lambda$ sont les mesures purement atomiques (voir l'exercice 125). Toutefois, il existe des mesures qui sont étrangères par rapport à $\lambda$, mais qui ne contiennent pas d'atomes; on les appelle des mesures *absolument singulières* (pour un exemple voir l'exercice 70).

La mesure $\nu_1$ obtenue au-dessus peut être encore décomposée en une partie purement atomique et une partie absolument singulière. En effet, si on pose

$$\nu_{\text{at}} = \sum_{x \in \mathbb{R}} \nu_1(\{x\})\delta_x = \sum_{x \in \mathbb{R}} \nu(\{x\})\delta_x,$$

alors $\nu_{\text{at}}$ est une mesure purement atomique et $\nu_{\text{ae}} = \nu_1 - \nu_{\text{at}}$ est une mesure positive absolument singulière par rapport à la mesure de Lebesgue (voir les exercices 66 et 126).

Ainsi, la mesure originelle $\nu$ se décompose dans une partie absolument continue $\nu_{\text{ac}} = f\,dx$, une partie purement atomique $\nu_{\text{at}}$ et une partie absolument singulière $\nu_{\text{as}}$.

Le théorème suivant nous donne une méthode constructive pour décomposer $\nu$.

**Théorème 8.3.** *Soit $\nu$ une mesure sur $\mathbb{R}$, finie sur les compacts. Posons $F(t) = \nu((0,t])$ pour $t \geq 0$ et $F(t) = -\nu((t,0])$ pour $t < 0$. Alors $F$ est dérivable $\lambda$-presque partout. De plus, la dérivée de $F$ est la densité de la partie absolument continue de $\nu$ par rapport à $\lambda$.*

Une version de ce théorème existe pour $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, la dérivée de $F$ doit être remplacée par $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\nu([t-h,t+h]^d)}{(2h)^d}$. Le prevue du théorème fait appel à la notion de recouvrement de Vitali. Pour des détails, voir [2, Sec. 6.2].

**Exercice 124.**
Soient $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\nu$ une mesure positive finie sur les compacts. Montrer que $\nu \ll \lambda$ si et seulement si il existe une fonction positive mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'intégrale sur tout compact est finie et telle que $\nu = f\,d\lambda$.

Plus généralement, montrer que $\nu$ se décompose en une partie absolument continue et une partie étrangère par rapport à $\lambda$.
*Indication:* Appliquer le théorème 8.1 sur chaque intervalle $[n, n+1)$.

**Exercice 125.**
Soient $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble et $(a_x)_{x \in A}$ une famille de nombres strictement positifs. Définissons $\mu = \sum_{x \in \mathbb{R}} a_x \delta_x$ la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$\mu(B) = \sum_{x \in A \cap B} a_x.$$

(a) A quelle condition est $\mu$ finie sur les compacts? Exprimer la condition en utilisant les ensembles $A_\epsilon = \{x \in A : a_x > \epsilon\}$. Montrer que si $\mu$ finie sur les compacts, alors $A$ est au plus dénombrable.

(b) Montrer que si $\mu$ finie sur les compacts, alors elle est étrangère par rapport à $\lambda$.

**Exercice 126.**
Soit $\mu$ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ finie sur les compacts. Posons

$$\mu_{\text{at}} = \sum_{x \in \mathbb{R}} \nu_1(\{x\})\delta_x$$

Montrer que $\mu_{\text{at}}$ est une mesure purement atomique, finie sur le compacts. Montrer que $\mu - \mu_{\text{at}}$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$, sans atomes.

# Chapitre 9

# Théorèmes de dualité

Le théorème de Radon-Nikodim nous permet de démontrer des théorèmes du dualité (dualité entre les espaces $L^p, L^q$ et le théorème de Riesz pour les mesures signées). Plus précisément, il nous permet de trouver des représentant pour les formes linéaire continues (ce qui revient à prouver la surjectivité des applications $U$ définies dans le corollaire 6.17 et le Théorème 9.4).

## 9.1 Dualité $L^p/L^q$

**Théorème 9.1.** *Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu$ $\sigma$-finie et $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués avec $q < \infty$. La fonction $U : L^p \to (L^q)^*$ notée $f \mapsto U_f$ et donnée par*

$$U_f(g) = \int fg d\mu, \qquad \forall f \in L^p \text{ et } g \in L^q,$$

*est une isométrie bijective. On dit que $(L^q)^*$ s'identifie à $L^p$ quand $q < \infty$.*

Avant de faire la preuve de ce théorème remarquons une consequence directe.

**Corollaire 9.2.** *Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu$ $\sigma$-finie et $p \in (1, \infty)$. Alors $L^p$ est réflexif.*

**Preuve du Corollaire 9.2:** Soit $q \in (1, \infty)$ l'exposant conjugué de $p$. Par deux applications successives du théorème 9.1, $((L^p)^*)^*$ s'identifie à $(L^q)^*$ qui s'identifie à $L^p$. On vérifie aisément que la composition de ces deux identifications est la fonction $\Phi$ du Thm 5.16. $\square$

Observons que les valeurs $p = 1$ et $p = \infty$ sont exclues du Corollaire 9.2. En effet, les espaces $L^1$ et $L^\infty$ ne sont pas généralement réflexifs. De ce point de vu, les espaces $L^p$ avec $1 < p < \infty$ sont similaires à l'espace $L^2$ (dont la réflexivité suit du théorème 6.18). Cette similarité vient d'une propriété géométrique des espaces $L^p$ avec $1 < p < \infty$, notamment l'uniforme convexité de leur boule unité (voir exo 127).

**Preuve du Théorème 9.1:** On a déjà vu que la fonction $U$ définie dans le théorème est une isométrie (voir Corollaire 6.17). Il reste à montrer que $U$ est surjective.

Supposons pour commencer que $\mu$ **est finie**. Soit $\Lambda \in (L^q)^*$. Pour $A \in \mathcal{E}$, $\mathbf{1}_A \in L^q$, on peut donc définir

$$\nu(A) := \Lambda(\mathbf{1}_A).$$

Montrons que $\nu$ est un mesure signée sur $E$.

Évidement $\nu(\emptyset) = 0$. Soient $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{E}$ disjoints et posons $B = \bigsqcup_{n\geq 0} A_n$. Alors, par le théorème de convergence monotone (c'est essentiel ici que $q < \infty$ et que $\mu(B) \leq \mu(E) < \infty$),

$$\mathbf{1}_{A_0\cup\dots\cup A_n} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{A_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_q} \mathbf{1}_B.$$

Supposons pour commencer que $\nu(A_n) \geq 0$ pour tout $n$. Par continuité de $\Lambda$ on déduit que

$$\begin{aligned}\nu\big(B\big) &= \Lambda\Big(\mathbf{1}_{A_0\cup A_1\cup\dots}\Big) = \lim_n \Lambda\Big(\mathbf{1}_{A_0\cup\dots\cup A_n}\Big)\\ &= \lim_n \sum_{k=0}^{n} \Lambda\big(\mathbf{1}_{A_k}\big) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \nu(A_k) = \sum_{k\geq 0} \nu(A_k).\end{aligned}$$

Il en est de même si $\nu(A_n) < 0$ pour tout $n$.

Ainsi, pour une suite d'ensemble disjoints $(A_n)_{n\geq 0}$, sans conditions sur le signe de $\nu(A_n)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} |\nu(A_k)| &= \sum_{k:\,\nu(A_k)\geq 0} \nu(A_k) - \sum_{k:\,\nu(A_k)<0} \nu(A_k)\\ &= \nu\Big(\bigcup_{k:\,\nu(A_k)\geq 0} A_k\Big) - \nu\Big(\bigcup_{k:\,\nu(A_k)<0} A_k\Big) < \infty,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} \nu(A_k) &= \sum_{k:\,\nu(A_k)\geq 0} \nu(A_k) + \sum_{k:\,\nu(A_k)<0} \nu(A_k)\\ &= \nu\Big(\bigcup_{k:\,\nu(A_k)\geq 0} A_k\Big) + \nu\Big(\bigcup_{k:\,\nu(A_k)<0} A_k\Big) = \nu\Big(\bigcup_{k\geq 0} A_k\Big).\end{aligned}$$

On conclut que $\nu$ est bien une mesure signée sur $(E, \mathcal{E})$.

De plus, $\nu \ll \mu$. En effet, pour tout $A \in \mathcal{E}$, si $\mu(A) = 0$ alors $\|\mathbf{1}_A\|_q = 0$, donc $\nu(A) = \Lambda(\mathbf{1}_A) = 0$ (voir aussi exercice 117).

Par le théorème de Radon-Nikodim 8.1, il existe $f \in L^1(\mu)$ telle que

$$\nu = f\ d\mu.$$

Ainsi

$$\Lambda(g) = \int g f\, d\mu, \tag{9.1}$$

pour toute fonction indicatrice $g$. Par linéarité, on peut étendre cette égalité aux fonctions étagées $g \in \mathcal{F}_{\text{et}}$. En utilisant la densité de $\mathcal{F}_{\text{et}}$ dans $L^\infty$ et le fait que $\mu(E) < \infty$, on déduit (9.1) pour tout $g \in L^\infty$.

Montrons que $f \in L^p$ et que (9.1) est valable pour tout $g \in L^q$.

**Cas 1:** $q = 1$**.** Alors pour tout $A \in \mathcal{E}$,

$$\Big| \int_A f \, d\mu \Big| = |\Lambda(\mathbf{1}_A)| \leq \|\mathbf{1}_A\|_1 \cdot \|\Lambda\| = \mu(A)\|\Lambda\|.$$

Cela implique $|f| \leq \|\Lambda\|$ $\mu$-presque partout, donc $f \in L^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq \|\Lambda\|$. Par densité de $\mathcal{F}_{\text{et}}$ dans $L^1$, on conclut que (9.1) est valable pour tout $g \in L^1$.

**Cas 2:** $q \in (1, \infty)$**.** Pour $n \geq 1$, posons

$$g_n(x) := \operatorname{sign}(f(x)) \cdot |f(x)|^{p-1} \cdot \mathbf{1}_{|f(x)| \leq n}, \qquad \forall x \in E.$$

Alors $g_n \in L^\infty$ et on peut appliquer (9.1) à $g_n$:

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^p \mathbf{1}_{|f(x)|\leq n} \, d\mu(x) = \Lambda(g_n) &\leq \|\Lambda\| \cdot \|g_n\|_q \\ &= \|\Lambda\| \cdot \Big( \int |f(x)|^{(p-1)q} \mathbf{1}_{|f(x)|\leq n} \, d\mu(x) \Big)^{1/q} \\ &= \|\Lambda\| \cdot \Big( \int |f(x)|^p \mathbf{1}_{|f(x)|\leq n} \, d\mu(x) \Big)^{1/q}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Big( \int |f(x)|^p \mathbf{1}_{|f(x)|\leq n} \, d\mu(x) \Big)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|\Lambda\|.$$

Par le théorème de convergence monotone, l'intégrale dans le terme de gauche converge quand $n \to \infty$ vers $\|f\|_p^p$. On conclut que $\|f\|_p \leq \|\Lambda\|$ donc que $f \in L^p$.

Enfin, par le théorème de convergence dominée et la densité de $\mathcal{F}_{\text{et}}$ dans $L^q$, (9.1) est valable pour tout $g \in L^q$. Ainsi $U_f = \Lambda$, donc $U$ est bien surjective.

Passons au cas où $\mu$ **est $\sigma$-finie**. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles disjoints avec $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n$ et $\bigsqcup_{n\geq 0} A_n = E$. (L'existence d'une telle famille est garantie par le fait que $\mu$ est $\sigma$-finie.)

Soit $\Lambda \in L^q(E, \mathcal{E}, \mu)^*$. Pour $n \geq 0$, soit $\mu_n$ la restriction de $\mu$ à $A_n$. Alors $L^q(E, \mathcal{E}, \mu_n)$ s'identifie de manière naturelle au sous-espace de $L^q(E, \mathcal{E}, \mu)$ formé des fonctions $g \in L^q(E, \mathcal{E}, \mu)$ avec $g(x) = 0$ pour $\mu$-presque tout $x \notin A_n$. Ainsi $\Lambda$ est une forme linéaire continue sur $L^q(E, \mathcal{E}, \mu_n)$.

En appliquant la première partie de la preuve à $L^q(E, \mathcal{E}, \mu_n)$, on obtient pour chaque $n \geq 0$, une fonction $f_n \in L^p(E, \mathcal{E}, \mu_n)$ telle que

$$\Lambda(g) = \int g f_n \, d\mu_n = \int_{A_n} g f_n \, d\mu, \qquad \forall g \in L^q(E, \mathcal{E}, \mu_n).$$

Comme les valeurs de $f_n$ en dehors de $A_n$ n'ont pas d'importance, on peut prendre $f_n(x) = 0$ pour tout $x \notin A_n$. Ainsi, la fonction

$$f = \sum_{n\geq 0} f_n$$

est bien définie. Par le même calcul que dans le cas où $\mu$ est finie (il faut à nouveau séparer entre le cas $q = 1$ et $q \in (1, \infty)$) on obtient

$$\|f\|_p \leq \|\Lambda\|.$$

Enfin, on conclut que, pour $g \in L^q$,

$$\Lambda(g) = \lim_{n\to\infty} \Lambda\Big(\sum_{k=0}^{n} g\mathbf{1}_{A_k}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Lambda(g\mathbf{1}_{A_k}) = \lim_{n\to\infty} \int \big(\sum_{k=0}^{n} f_k\big) g \, d\mu = \int fg \, d\mu.$$

Ici on a utilisé le théorème de convergence dominée (pour dire que $\sum_{k=0}^{n} g\mathbf{1}_{A_k} \to g$ et $\sum_{k=0}^{n} f_k g \to fg$ dans $L^q$) et la continuité de $\Lambda$ pour la première égalité. Ainsi $U_f = \Lambda$, donc $U$ est bien surjective. □

**Exercice 127** (☠).
Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $X$ est uniformément convexe si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in X$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$, on a

$$\|x - y\| > \epsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

(a) Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que pour $1 < p < \infty$, l'espace de Banach $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ est uniformément convexe. Montrer que en général, $L^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$ ne sont pas uniformément convexes.

(b) Soit $X$ un espace de Banach uniformément convexe et $Y \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que pour tout $x \in X$ il existe un unique $y \in Y$ tel que

$$\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, Y) = \inf\{\|x - z\| : z \in Y\}.$$

(c) (Théorème de Milman–Pettis) Montrer que tout espace de Banach $X$ qui est uniformément convexe est réflexif.

## 9.2 Dual de $\mathcal{C}_0$: théorème de représentation de Riesz pour les mesures signées

Dans cette partie on étudie les mesures signées comme formes linéaires sur l'espace des fonctions continues. Cette partie est reliée fortement à la partie 3.4 et plus précisément au théorème 3.33. On commence par un rappel des notions déjà introduites dans la partie 3.4.

Pour simplifier les énoncés et pour être cohérents avec la partie 3.4, on se placera dans le cadre des espaces métriques propres. Fixons un tel espace $E$. Rappelons que les mesures $\mu$ sur $(E, \mathcal{B}(E))$ qui sont finies sur les compacts sont automatiquement régulières dans le sense que

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ compact}\} \\ &= \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ ouvert}\}, \qquad \forall A \in \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Les fonctions continues tendant vers zero à l'infini forment l'espace

$$\mathcal{C}_0(E) = \big\{ f : E \to \mathbb{R} : \ f \text{ continue et } \forall \epsilon > 0, \exists K \text{ compact avec } \sup_{x \notin K} |f(x)| < \epsilon \big\}.$$

On regardera $\mathcal{C}_0(E)$ comme espace vectoriel normée avec la norme $\|.\|_\infty$. On a déjà montré que $(\mathcal{C}_0(E), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach (voir le Théorème 6.15, qui implique la complétude de $\mathcal{C}_0(E)$). Ainsi $\mathcal{C}_0(E)$ peut être vu comme l'adhérence dans $\mathcal{L}^\infty$ de $\mathcal{C}_c(E)$, l'espace des fonctions continues à support compact.

On rappelle le théorème de Riesz (Thm. 3.33) pour les mesures positives.

**Théorème 9.3** (Riesz pour mesures positives)**.** *Soit $E$ un espace métrique propre; posons $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Alors pour toute forme linéaire positive $\Lambda$ sur $\mathcal{C}_c(E)$, (c.-à-d. $\Lambda$ forme linéaire telle que si $f \in \mathcal{C}_c(E)$ est positive, alors $\Lambda(f) \geq 0$) il existe une unique mesure $\mu$, telle que*

$$\Lambda(f) = \int f(x)\, d\mu(x), \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(E). \tag{9.2}$$

*Inversement, si $\mu$ est une mesure finie sur les compacts, alors* (3.11) *définie une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(E)$.*

Ce théorème ressemble fortement à un théorème de dualité. En effet, il identifie les formes linéaires *positives* sur $\mathcal{C}_c$ aux mesures de Radon (c.-à-d. aux mesures positives, finies sur les compacts).

On verra par la suite un théorème reliée, qui porte aussi le nom de théorème de Riesz, et qui s'écrit précisément comme théorème de dualité. Rappelons que $M(E, \mathcal{E})$ désigne l'espace des mesure signées sur $E$ et qu'il est muni par défaut avec la norme de la variation totale $\|.\|_{\mathrm{VT}}$.

**Théorème 9.4** (Riesz pour mesures signées)**.** *Soit $E$ un espace métrique propre; posons $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. La fonction $U : M(E, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}_0(E)^*$ donnée par $\mu \mapsto U_\mu$ définie par*

$$U_\mu(f) = \int f d\mu := \int f d\mu_+ - \int f d\mu_-, \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(E) \tag{9.3}$$

*est une isométrie bijective. Ainsi $\mathcal{C}_0(E)^*$ s'identifie de façon canonique à $M(E, \mathcal{E})$.*

*Remarque* 9.5. Ce théorème admet une version plus générale, ou l'hypothèse que $E$ est propre est remplacée par celle plus faible que $E$ et localement compact. Alors les mesures finies sur les compacts ne sont plus automatiquement régulières et $M(E, \mathcal{E})$ doit être remplacé par $M_{\mathrm{reg}}(E, \mathcal{E}) = \{\mu \in M(E, \mathcal{E}) : \ |\mu| \text{ régulière}\}$.

La preuve suivante est basée sur la version pour les formes linéaires positives: le Thm. 3.33.

**Preuve:** Commençons par montrer que l'application $U$ définie dans (9.3) est une isométrie linéaire. Soient $\mu \in M(E, \mathcal{E})$. Une fonction $f \in \mathcal{C}_0(E)$ est bornée, donc

$$\Big| \int f\, d\mu \Big| \leq \Big| \int f\, d\mu_+ \Big| + \Big| \int f\, d\mu_- \Big| \leq \int |f|\, d|\mu| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\mu\|_{VT}.$$

Ainsi $U_\mu(f)$ **est bien définie**. La linéarité de $U_\mu$ est immédiate. On conclut que $U_\mu \in \mathcal{C}_0(E)^*$ et $\|U_\mu\| \leq \|\mu\|_{VT}$.

Montrons que $\|U_\mu\| = \|\mu\|_{VT}$, en d'autres mots que $U$ **est une isométrie.** Soit $B$ l'ensemble donné par la décomposition de Hahn de $\mu$. Alors

$$\int \big(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B^c}\big) = \mu(B) - \mu(B^c) = |\mu|(E) = \|\mu\|_{VT}.$$

Cela n'implique pas $\|U_\mu\| = \|\mu\|_{VT}$ car $\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B^c} \notin \mathcal{C}^c$.

Soit $\epsilon > 0$. Par régularité de $|\mu|$, il existe un compact $K_+ \subset B$ avec $|\mu|(K_+) \geq |\mu|(B) - \epsilon$. De même on trouve $K_- \subset B^c$ compact avec $|\mu|(K_-) \geq |\mu|(B^c) - \epsilon$. Par le lemme d'Urysohn, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(E)$ avec

$$\|f\|_\infty \leq 1; \qquad f(x) = 1,\ \forall x \in K_+; \qquad f(x) = -1,\ \forall x \in K_-.$$

Alors

$$\begin{aligned} U_\mu(f) &= \int f\, d\mu = \int_{K_+} 1\, d\mu + \int_{K_-} (-1)\, d\mu + \int_{E\setminus(K_+\cup K_-)} f\, d\mu \\ &\geq \mu(K_+) - \mu(K_-) - |\mu|\big[E \setminus (K_+ \cup K_-)\big] \geq |\mu|(B) + |\mu|(B^c) - 4\epsilon = \|\mu\|_{VT} - 4\epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $\|U_\mu\| \geq \|\mu\|_{VT} - 4\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, donc $\|U_\mu\| = \|\mu\|_{VT}$.

Enfin montrons que $U$ **est linéaire**. Soient $\mu, \nu \in M(E, \mathcal{E})$. Alors les mesures positives finies $\mu_+ + \nu_+$ et $\mu_- + \nu_-$ satisfont

$$\mu_+ + \nu_+ - (\mu_- + \nu_-) = \mu + \nu.$$

On déduit que

$$\int f\, d(\mu + \nu) = \int f\, d(\mu_+ + \nu_+) - \int f\, d(\mu_- + \nu_-),$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_{\text{et}}$. En utilisant le théorème de convergence dominée et la densité de $\mathcal{F}_{\text{et}}$ dans $\mathcal{C}_0(E)$, on étend cette relation aux fonctions $f \in \mathcal{C}_0(E)$. Ainsi $U$ est linéaire.

Il nous reste à montrer le pas le plus important, à savoir que $U$ **est surjective**. Soit $\Lambda$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(E)$. On va commencer par construire une forme linéaire positive $\Phi$ sur $\mathcal{C}_c(E)$ pour appliquer le théorème de Riesz pour les formes linéaires positives (Théorème 3.33). Posons, pour $f \in \mathcal{C}_c(E)$ fonction positive,

$$\Phi(f) = \sup\big\{\Lambda(g) :\ g \in \mathcal{C}_c(E) \text{ avec } |g| \leq f\big\}.$$

On étend $\Phi$ à $\mathcal{C}_c(E)$ par

$$\Phi(f) = \Phi(f_+) - \Phi(f_-), \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(E).$$

On peut facilement démontrer que $\Phi$ est linéaire. De plus, observons que, pour tout $f \in \mathcal{C}_c(E)$,

$$|\Phi(f)| = |\Phi(f_+) - \Phi(f_-)| \leq \Phi(f_+) + \Phi(f_-) = \Phi(|f|) \leq \|\Lambda\| \cdot \|f\|_\infty.$$

La dernière égalité suit directement de la définition de $\Phi$. On conclut que $\Phi$ est une forme

linéaire continue et positive sur $\mathcal{C}_c(E)$ avec $\|\Phi\| \leq \|\Lambda\|$.

Soit $\nu$ la mesure positive sur $E$ donné par le Théorème 3.33 appliqué à la forme linéaire $\Phi$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(E)$, $\Phi(f) = \int f\, d\nu$.

Comme $\nu$ est régulière, il existe une suite croissante de compacts $(K_n)_{n\geq 0}$ de $E$ tels que $\nu(E) = \lim_n \nu(K_n)$. Par le lemme d'Urysohn, pour chaque $n$ il existe une fonction positive $f_n \in \mathcal{C}_c(E)$ avec $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et $f_n \geq \mathbf{1}_{K_n}$. On obtient donc

$$\nu(E) = \lim_n \nu(K_n) \leq \lim_n \int f_n\, d\nu = \lim_n \Phi(f_n) \leq \lim_n \|\Phi\| \|f_n\|_\infty \leq \|\Lambda\| < \infty.$$

Ainsi $\nu$ est une mesure positive finie sur $E$. On va obtenir la mesure signée $\mu$ avec $U_\mu = \Lambda$ en décrivant sa densité par rapport à $\nu$.

Par la finitude de $\nu$, toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(E)$ est $\nu$-intégrable. Ainsi $\mathcal{C}_c(E)$ est un sous-espace de $L^1(E, \mathcal{E}, \nu)$. De plus il s'agit d'un sous-espace dense par le Théorème 6.12. Pour $f \in \mathcal{C}_c(E)$, on a

$$|\Lambda(f)| \leq |\Lambda(f_+)| + |\Lambda(f_-)| \leq \Phi(f_+) + \Phi(f_-) = \Phi(|f|) = \|f\|_1.$$

Ainsi $\Lambda$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(E)$, continue pour la norme $\|.\|_1$. On peut donc étendre $\Lambda$ par continuité à l'intégralité de $L^1(E, \mathcal{E}, \nu)$ (voir exercice 16).

Par le Théorème 9.1, il existe $g \in L^\infty$ telle que

$$\Lambda(f) = \int fg\, d\nu, \qquad \forall f \in L^1(E, \mathcal{E}, \nu).$$

Posons $\mu = g\, d\nu$. Comme $\nu$ est finie et régulière et $g$ est bornée, $\mu \in M(E, \mathcal{E})$.

Avec cette notation, tenant compte que $\mathcal{C}_0(E) \subset L^1(E, \mathcal{E}, \nu)$,

$$\Lambda(f) = \int f\, d\mu, \qquad \forall f \in \mathcal{C}_0(E),$$

donc $U_\mu = \Lambda$. □

**Exercice 128.**
Montrer que si $\mu$ est une mesure positive, régulière et finie sur les compacts, mais avec $\mu(E) = \infty$, la forme linéaire $\Lambda$ définie par (9.2) n'est pas continue.

**Exercice 129.**
Montrer que $\mathcal{C}_c$ est dense dans $\mathcal{C}_0$. Déduire que $\mathcal{C}_c(E)^* = \mathcal{C}_0(E)^*$, donc que dans le Théorème 9.4 on peut remplacer $\mathcal{C}_c$ par $\mathcal{C}_0$.

**Exercice 130 (☠).**
Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et $\nu$ des mesures de $M(E, \mathcal{E})$. On dit que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ faiblement vers $\nu$, noté $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{*} \nu$ si

$$\int f\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f\, d\nu \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(E, \mathcal{E}).$$

La topologie associée à cette convergence est appelée la topologie faible sur $M(E, \mathcal{E})$. Par

comparaison, la topologie donnée par la norme $\|.\|_{\mathrm{VT}}$ sur $M(E,\mathcal{E})$ est appelée forte.

(a) Montrer que si $\|\mu_n - \nu\|_{\mathrm{VT}} \to 0$ alors $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{*} \nu$.

(b) Donner un exemple ou $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{*} \nu$ mais que $\|\mu_n - \nu\|_{\mathrm{VT}}$ ne converge pas vers 0.

(c) Montrer que si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et $\nu$ sont des mesures positives de probabilité, alors $\mu_n$ converge faiblement vers $\nu$ si et seulement si

$$\int f\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f\, d\nu \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(E,\mathcal{E}).$$

Dans le cadre des mesures de probabilité, la convergence faible est aussi appelée en distribution.

(d) Donner un contre-exemple au point précédent si les mesures $\mu_n$ et $\nu$ ne sont pas de probabilité.

(e) Du fait que $E$ est supposé propre, on déduit qu'il est séparable. Montrer que $\mathcal{C}_c(E,\mathcal{E})$ est aussi séparable. Exhiber une distance pour la topologie de la convergence faible.

## 9.3 Dual de $L^\infty$: mesures additives *

Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace localement compact et $\sigma$-compact, muni d'une mesure régulière $\mu$ finie sur les compacts. On vient de voir que $(L^1)^*$ s'identifie à $L^\infty$. Ainsi, par le Théorème 5.16, $L^1 \subset (L^\infty)^*$.

D'autre part, $\mathcal{C}_0$ est un sous-espace de $L^\infty$, et toute forme linéaire continue sur $L^\infty$ se restreint en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0$. Ainsi

$$L^1 \xrightarrow{\text{injection canonique}} (L^\infty)^* \xrightarrow{\text{restriction}} M_{\mathrm{reg}}.$$

Pour caractériser $(L^\infty)^*$ il faut introduire la notion de mesures signées additives. Avant de commencer, mentionnons que l'injection de $L^1$ dans $(L^\infty)^*$ n'est généralement pas surjective, en particulier $L^1$ n'est pas réflexif. La restriction des formes linéaires continues sur $L^\infty$ à $\mathcal{C}_0$ (c.-à-d. la deuxième flèche au-dessus) n'est ni injective, ni surjective.

**Définition 9.6.** *Une mesure signée additive sur $(E,\mathcal{E})$ est une fonction bornée $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ telle que, pour toute famille disjointe $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{E}$,*

$$\nu\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j). \tag{9.4}$$

*Notons* ba(E, $\mathcal{E}$) *l'ensemble des mesures signées additives sur $(E,\mathcal{E})$ avec $\|\nu\|_{VT} < \infty$.*

*Pour* $\nu \in \mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$*, on pose*

$$\|\nu\|_{VT} = \sup \Big\{ \sum_{j\geq 0} |\nu(A_j)| : \ (A_j)_{j\geq 0} \textit{ partition mesurable de } E \Big\}.$$

On peut montrer, comme pour les mesures signées, que $\|.\|_{VT}$ est une norme sur $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$ et que $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$, muni de cette norme, est une espace de Banach. De plus $M(E, \mathcal{E}) \subset \mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$; en effet toute mesure signée satisfait bien (9.4). Ainsi $M(E, \mathcal{E})$ est un sous-espace fermé (car complet) de $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$. L'inclusion de $M(E, \mathcal{E})$ dans $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$ est pas stricte, on peut prendre l'exemple de $E = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Par la suite, on écrit $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E})$ pour l'ensemble des fonctions bornées (contrairement aux fonction bornées presque partout).

**Théorème 9.7.** *La fonction* $U : \mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) \to (\mathcal{L}^\infty(\mathrm{E}, \mathcal{E}))^*$*, notée* $\nu \mapsto U_\nu$ *et donnée par*

$$U_\nu(f) = \int f d\nu, \qquad \forall f \in L^\infty(E, \mathcal{E}) \textit{ et } \mu \in \mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E}), \tag{9.5}$$

*est bien définie, linéaire, isométrique et bijective.*

*Notons* $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E}, \mu) = \{\nu \in \mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) : \ \textit{pour tout } A \in \mathcal{E} \textit{ avec } \mu(A) = 0 \textit{ on a aussi } \nu(A) = 0\}$. *Il s'agit des mesures additives* $\nu$*, absolument continues par rapport à la mesure* $\mu$ *(donc aussi régulières). La restriction de* $U$ *à* $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E}, \mu)$ *induit un isomorphisme d'espace de Banach entre* $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E}, \mu)$ *et* $L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$.

*En conclusion* $(\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E}))^*$ *s'identifie de manière canonique à* $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$ *et* $(L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu))^*$ *à* $\mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E}, \mu)$.

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [1, Thm IV.8.16].

Mentionnons que l'intégrale dans (9.5) n'a pas été formellement définie, car $\nu$ n'est pas une mesure au sens de la définition 1.2.

Toutefois, si on écrit $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{et}} = \{\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{A_j} : \ n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ et } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}\}$ alors, pour $\nu \in \mathrm{ba}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$ et $f \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{et}}$, l'intégrale se définie de manière évidente. Ainsi on obtient un forme linéaire

$$\int .d\nu : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{et}} \to \mathbb{R}.$$

De plus, cette application est continue, avec norme bornée par $\|\nu\|_{TV}$. Il est facile à voir que $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{et}}$ est dense dans $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E})$, donc $\int .d\nu$ s'étend par continuité à $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E})$.

# Références


[1] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators part I: General Theory*, Wiley (1988).

[2] D.L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser (1980).

[3] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 2nd ed, Wiley (2003)

[4] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag (1950).

[5] J.F. Le Gall, *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires*, `http://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf`.

[6] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed, McGraw-Hill (1987)

[7] C. Villani, *Intégration et Analyse de Fourier*, `http://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/IAF.pdf`.

[8] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press (1993).

[9] `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension`