SEMINAIRE THÉMATIQUE – SE 2007

"Fonctions zêta et corps quadratiques"

Responsables:	Prof. Dr. Ruth KELLERHALS et Dr. Christine ZEHRT
Consultations:	R. Kellerhals, Math 2.103, mercredi 13:15–15:00 ou à convenir C. Zehrt, Math 0.108, jeudi 15:15–17:00 ou à convenir
Salle:	Salle de séminaire, Département de Mathématiques II (Lonza)
Horaire:	Jeudi, 13:15 – 15:00 ; début: 15 mars 2007
Référence:	[Z] D. Zagier: *Zetafunktionen und quadratische Zahlkörper* Springer Hochschultext, 1981.

Exposé 1: *Théorie analytique des séries de Dirichlet*

On présente la définition, des propriétés élémentaires et quelques exemples de séries de Dirichlet. On termine avec le produit d'Euler d'une série de Dirichlet avec coefficients multiplicatifs.

[Z, §1–§2, pp. 1–11]

Exposé 2: *Deux fonctions liées aux séries de Dirichlet*

On étudie la fonction de Möbius et la fonction Gamma.

[Z, §2–§3, pp. 12–24]

Exposé 3: *Caractères de Dirichlet*

On associe au groupe $\mathbb{Z}_N$ un caractère de Dirichlet χ_D modulo N et étudiera ses propriétés.

[Z, §5, pp. 33–41]

Exposé 4: *Séries L*

Pour chaque caractère de Dirichlet χ, on peut construire une série $L(s, \chi)$. La multiplicativité de χ induit une forme produit pour L et permet de montrer, par exemple, que $L(1, \chi) \neq 0$.

[Z, §6, pp. 41–47]

Exposé 5: *Formes quadratiques binaires I*

Dans cette première partie, on présente les éléments de base sur les formes quadratiques binaires $f(x, y)$, e.g. la notion d'équivalence, le nombre $h(D)$ de classes avec discriminant D, automorphismes.

[Z, §8, pp. 57–65]

Exposé 6: *Formes quadratiques binaires II*

On s'intéresse aux solutions inéquivalentes de l'équation diophantienne $f(x, y) = n$ et étudie d'abord le nombre $R(n, f)$ des représentations de n par la forme f. On en déduira le premier théorème fondamental de Dirichlet donnant une relation entre $h(D)$ et $L(1, \chi)$ pour des caractères réels.

[Z, §8, pp. 65–74]

Exposé 7: *Les valeurs $L(1, \chi)$ et nombres des classes*

Dans cet exposé, on détermine la valeur $L(1, \chi)$ pour des caractères arbitraires. Pour ce but, on utilise des sommes de Gauss. Finalement, on démontre et discute une formule élémentaire pour le nombre de classes $h(D)$.

[Z, §9, pp. 75–86]

Exposé 8: *Formes quadratiques et corps de nombres quadratiques*

On établit un lien entre la théorie des formes quadratiques binaires et la théorie des idéaux d'un corps quadratique.

[Z, §10, pp. 87–95]

Exposé 9: *La fonction zêta d'un corps de nombres quadratique*

On associe à un corps quadratique K sa fonction zêta de Dedekind. C'est une série de Dirichlet avec coefficients $F(n)$ qui peuvent être décrits par les nombres $R(n, f)$. Ensuite, on introduit le groupe des classes d'idéaux de K, lui associe un caractère convenablement et étudie sa série L.

[Z, §11, pp. 96–107]

Exposé 10: *Le genre d'une forme quadratique binaire*

On introduit la notion d'équivalence rationnelle de formes quadratiques f et le genre de f. On établira les résultats principaux de la théorie des genres d'après Gauss. En particulier, on montre que 2^{t-1} divise $h(D)$ où t désigne le nombre des diviseurs permiers de D.

[Z, §12, pp. 108–120]

Exposé 11: *La théorie de la réduction*

On introduit la notion de forme quadratique binaire réduite et on montre que deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes à la même forme quadratique réduite.

[Z, §13, pp. 120–132]

Exposé 12, en réserve: *La loi de réciprocité quadratique*

La loi de réciprocité quadratique décrit un lien fondamental entre les sous-groupes des carrés dans les groupes $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Z}_q$ pour deux nombres premiers impairs différents p, q.

[A. Leutbecher: *Zahlentheorie, eine Einführung in die Algebra*, Springer, 1996; pp. 57–68]