

Département de Mathématiques  
Université de Fribourg (Suisse)

# Groupes discrets en géométrie hyperbolique – Aspects effectifs

THESE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg (Suisse) pour  
l'obtention du grade de *Doctor scientiarum mathematicarum*

par

Jordane Granier

de

France

Co-tutelle de thèse avec l'Université Grenoble Alpes (France)

Thesis No : 1944  
epubli.de  
2015

Acceptée par la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg (Suisse) sur la proposition du jury :

Prof. Dr. Ruth Kellerhals  
Université de Fribourg (Suisse), Directrice de thèse

Prof. Dr. Christophe Bavard  
Université de Bordeaux (France), Rapporteur

Prof. Dr. John Parker  
Université de Durham (Royaume-Uni), Rapporteur

Prof. Dr. Gilles Courtois  
Université Pierre et Marie Curie (France), Président du jury

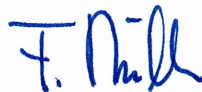
Grenoble, le 8 décembre 2015

La Directrice de thèse



Prof. Dr. Ruth Kellerhals

Le Doyen



Prof. Dr. Fritz Müller



UNIVERSITÉ DE FRIBOURG  
UNIVERSITÄT FREIBURG

UNIVERSITÉ  
GRENOBLE  
ALPES

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

**préparée dans le cadre d'une cotutelle entre  
l'Université Grenoble Alpes et l'Université de  
Fribourg (Suisse)**

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : le 6 janvier 2005 - 7 août 2006

Présentée par

**Jordane GRANIER**

Thèse dirigée par **Martin DERAUX** et **Ruth KELLERHALS**

préparée au sein de l'**Institut Fourier** dans l'école doctorale  
**Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information,  
Informatique**

et au sein du **Département de Mathématiques** de la **Faculté des  
Sciences de l'Université de Fribourg**

# Groupes discrets en géométrie hyperbolique – Aspects effectifs

Thèse soutenue publiquement le **8 décembre 2015**,  
devant le jury composé de :

**Christophe BAVARD**

Professeur, Université de Bordeaux, Rapporteur

**Michelle BUCHER**

Senior Lecturer, Université de Genève, Examinatrice

**Gilles COURTOIS**

Directeur de recherche, Université Pierre et Marie Curie, Président

**Martin DERAUX**

Maître de conférences HDR, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

**Ruth KELLERHALS**

Professeur, Université de Fribourg, Co-directrice de thèse

**Erwan LANNEAU**

Professeur, Université Grenoble Alpes, Examineur

**Hervé PAJOT**

Professeur, Université Grenoble Alpes, Examineur

**John R. PARKER**

Professeur, Durham University, Rapporteur





## Résumé

Cette thèse traite de deux problèmes en géométrie hyperbolique réelle et complexe.

On étudie dans un premier temps des structures géométriques sur des espaces de modules de métriques plates à singularités coniques sur la sphère. D'après des travaux de W. Thurston, l'espace de modules des métriques plates sur  $\mathbb{S}^2$  à  $n$  singularités coniques d'angles donnés admet une structure de variété hyperbolique complexe non complète, dont le complété métrique est une variété conique hyperbolique complexe. On étudie dans cette thèse des formes réelles de ces espaces complexes en se restreignant à des métriques invariantes par une involution. On décrit une structure hyperbolique réelle sur les espaces de modules de métriques plates symétriques à 6 (respectivement 8) singularités d'angles égaux. On décrit les composantes connexes de ces espaces comme ouverts denses d'orbifolds hyperboliques arithmétiques. On montre que les complétés métriques de ces composantes connexes admettent un recollement naturel, dont on étudie la structure.

La deuxième partie de cette thèse traite des ensembles limites de groupes discrets d'isométries du plan hyperbolique complexe. On construit le premier exemple explicite de sous-groupe discret de  $PU(2,1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger.

### Abstract

This thesis is concerned with two problems in real and complex hyperbolic geometry.

The first problem is the study of geometric structures on moduli spaces of flat metrics on the sphere with cone singularities. W. Thurston proved that the moduli space of flat metrics on  $\mathbb{S}^2$  with  $n$  singularities of given angles forms a non complete complex hyperbolic manifold, and that its metric completion is a complex hyperbolic cone-manifold. In this thesis we study real forms of these complex spaces by restricting our attention to metrics that are invariant under an involution. We describe a real hyperbolic structure on moduli spaces of flat symmetric metrics of 6 (respectively 8) singularities of same angle. We describe explicitly the connected components of these spaces as dense open subsets of arithmetic hyperbolic orbifolds. We show that the metric completions of these components admit a natural gluing, and we study the structure of the glued space.

The second part of this thesis is devoted to the study of limit sets of discrete subgroups of the isometry group of complex hyperbolic plane. We construct the first known explicit example of a discrete subgroup of  $PU(2, 1)$  which admits a limit set homeomorphic to the Menger curve.

## Zusammenfassung

Diese Dissertation behandelt zwei Probleme der reellen und komplexen hyperbolischen Geometrie.

Im ersten Teil studieren wir geometrische Strukturen auf Modulräumen von flachen Metriken auf der Sphäre mit konischen Singularitäten. W. Thurston hat gezeigt, dass der Modulraum solcher Metriken auf  $S^2$  mit  $n$  konischen Singularitäten von vorgegebenen Winkeln eine nicht vollständige komplexe hyperbolische Mannigfaltigkeit bildet. Die Vervollständigung dieser Mannigfaltigkeit ist eine komplexe hyperbolische konische Mannigfaltigkeit. In dieser Arbeit betrachten wir Metriken, die unter einer Involution invariant sind : der Modulraum solcher Metriken hat dann eine *reelle* Struktur. Wir beschreiben eine reell-hyperbolische Struktur auf Modulräumen von flachen symmetrischen Metriken mit 6 (bzw. 8) Singularitäten von gleichem Winkel. Die Zusammenhangskomponenten dieser Räume werden explizit als dichte offene Teilmengen von arithmetischen reell-hyperbolischen Orbifolds beschrieben. Wir zeigen, dass die Vervollständigungen dieser Komponenten verklebt werden können, und untersuchen die Struktur des verklebten Raums.

Der zweite Teil dieser Dissertation beschäftigt sich mit dem Studium der Limesmengen von diskreten Untergruppen der Isometriegruppe der komplex-hyperbolischen Ebene. Wir konstruieren das erste explizite Beispiel einer diskreten Untergruppe von  $PU(2, 1)$ , dessen Limesmenge homöomorph zur Menger-Kurve ist.





# Remerciements

Cette thèse touche à sa fin, et il est temps de remercier ici toutes les personnes qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à sa réalisation.

Je souhaite tout d'abord remercier vivement mes directeurs de thèse, Martin Deraux et Ruth Kellerhals. Martin, merci pour ta gentillesse, pour ta disponibilité et ta patience. J'ai beaucoup appris pendant ces années de thèse, et les innombrables heures passées dans ton bureau y sont pour beaucoup ! Ruth, merci pour tes encouragements constants et pour ton soutien logistique et financier, qui m'a permis entre autres de pouvoir terminer ma thèse sereinement. Enfin, merci à tous les deux pour votre relecture attentive du manuscrit.

Je remercie chaleureusement Christophe Bavard et John Parker d'avoir accepté d'être rapporteurs pour cette thèse, malgré des délais un peu courts (et un manuscrit un peu long !) et de s'être intéressés à mon travail. Merci aussi à Michelle Bucher, Gilles Courtois, Erwan Lanneau et Hervé Pajot d'avoir accepté de faire partie du jury.

J'ai rencontré nombre de personnes sympathiques à l'Institut Fourier, entre les membres du séminaire TSG, les adeptes du Séminaire Compréhensible, et les « anciens » doctorants de ma génération : merci à tous. Merci aussi aux différentes équipes du module MAT127, en particulier à Hervé Pajot qui a accompagné mes premiers pas dans l'enseignement.

J'ai passé une part importante de mon temps à Fribourg, et je tiens à remercier tous les membres du Département de Mathématiques pour la bonne humeur qui y règne : c'était un réel plaisir d'y travailler, et j'espère retrouver un environnement aussi chaleureux dans le futur. Merci en particulier aux doctorants et postdocs présents et passés pour toutes les discussions et les activités partagées !

Merci enfin à tous ceux qui m'ont soutenue et épaulée, au quotidien ou ponctuellement, de près ou de loin, pendant ces quatre années pas toujours faciles. Aux amis de Lyon, Grenoble, Freiburg, Fribourg et d'ailleurs, pour les discussions interminables autour d'un thé ou d'un bon repas, les randos, les parties de badminton, et les week-ends de retrouvailles sous le signe de la bonne humeur. A ma famille, pour leur amour et leur soutien (et leur patience !). A Ammar, enfin, pour tout et le reste. A tous, merci du fond du coeur, cette thèse vous doit beaucoup.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>23</b>
1.1 Géométrie hyperbolique . . . . .	23
1.1.1 Espaces hyperboliques . . . . .	23
1.1.2 Sous-espaces totalement géodésiques . . . . .	25
1.1.3 Différents modèles . . . . .	26
1.1.4 Classification des isométries . . . . .	28
1.2 Groupes discrets et réseaux . . . . .	29
1.2.1 Réseaux dans des groupes de Lie semi-simples . . . . .	29
1.2.2 Réseaux arithmétiques . . . . .	30
1.2.3 Réseaux non arithmétiques . . . . .	31
1.2.4 Point de vue géométrique . . . . .	32
1.3 Le théorème de Poincaré . . . . .	34
<b>2 Uniformisation hyperbolique d’espaces de modules</b>	<b>41</b>
2.1 Métriques symétriques sur $\mathbb{S}^2$ . . . . .	41
2.1.1 Généralités sur les métriques plates sur $\mathbb{S}^2$ . . . . .	41
2.1.2 Métriques symétriques . . . . .	42
2.1.3 Quelques propriétés des métriques symétriques . . . . .	43
2.1.4 Développement d’une métrique symétrique . . . . .	44
2.1.5 Dégénérescences . . . . .	50
2.2 Polyèdres et groupes dans $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ : quelques outils . . . . .	52
2.2.1 Polyèdres hyperboliques . . . . .	52
2.2.2 Le théorème de Poincaré, version réelle . . . . .	55
2.2.2.1 Vérification des hypothèses . . . . .	55
2.2.2.2 Le cas de plusieurs polyèdres . . . . .	57
2.2.3 L’algorithme de Vinberg . . . . .	59
2.3 L’espace de modules des métriques plates sur $\mathbb{S}^2$ à 6 singularités d’angles égaux . . . . .	62
2.3.1 Des métriques aux polygones . . . . .	62
2.3.2 Description des composantes . . . . .	64
2.3.2.1 L’exemple de Thurston . . . . .	65
2.3.2.2 Métriques de type 0 . . . . .	66
2.3.2.3 Métriques de type 1 . . . . .	70
2.3.2.4 Métriques de type 2 . . . . .	77
2.3.2.5 Métriques de type 3 . . . . .	82
2.3.2.6 Conclusion . . . . .	84

2.3.3	Recollement des composantes . . . . .	84
2.3.3.1	Isométries de recollement . . . . .	85
2.3.3.2	Résultat du recollement . . . . .	86
2.3.3.3	Le groupe $\Gamma_t$ n'est pas arithmétique . . . . .	88
2.3.4	Métriques dégénérées . . . . .	89
2.3.4.1	Métriques de type 0 et 1 dégénérées . . . . .	90
2.3.4.2	Métriques de type 1 et 2 dégénérées . . . . .	92
2.3.4.3	Métriques de type 2 et 3 dégénérées . . . . .	92
2.3.5	Conclusion . . . . .	94
2.4	Le cas des métriques plates à 8 singularités : description des composantes .	95
2.4.1	Paramétrage des composantes . . . . .	96
2.4.1.1	Développement des métriques et polygones . . . . .	96
2.4.1.2	Métriques de type 0 . . . . .	98
2.4.1.3	Métriques de type 1 . . . . .	105
2.4.1.4	Métriques de type 2 . . . . .	110
2.4.1.5	Métriques de type 3 . . . . .	117
2.4.1.6	Métriques de type 4 . . . . .	120
2.4.2	Commensurabilités explicites . . . . .	121
2.4.2.1	Application de l'algorithme de Vinberg . . . . .	122
2.4.2.2	Expression des générateurs de $\Gamma'_j$ en fonction des générateurs de $O(q_j, \mathbb{Z})$ . . . . .	126
2.4.2.3	Calcul des indices . . . . .	128
2.4.3	Conclusion . . . . .	130
2.5	Le cas des métriques plates à 8 singularités : recollement . . . . .	132
2.5.1	Mise en place du recollement . . . . .	132
2.5.2	Obstruction au théorème de Poincaré . . . . .	135
2.5.3	Le groupe associé au recollement . . . . .	136
2.5.4	Preuve de la non-discrétude de $\Gamma_t$ . . . . .	139
2.5.4.1	Principe de la procédure de Riley . . . . .	139
2.5.4.2	Implémentation de la procédure . . . . .	141
2.5.4.3	Existence d'un elliptique d'ordre infini . . . . .	143
<b>3</b>	<b>Sous-groupe discret de <math>PU(2, 1)</math> dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger</b> . . . . .	<b>145</b>
3.1	Préliminaires . . . . .	145
3.1.1	Ensembles limites . . . . .	145
3.1.2	Espaces Gromov-hyperboliques . . . . .	146
3.1.3	Groupes convexes cocompacts et ensembles limites de dimension 1 .	149
3.1.4	Groupes géométriquement finis . . . . .	151
3.2	La construction de Bourdon . . . . .	155
3.2.1	L'immeuble hyperbolique à angles droits $I_{pq}$ . . . . .	155
3.2.2	Représentations convexes cocompactes de $\Gamma_{pq}$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ . . .	156
3.3	Outils . . . . .	158
3.3.1	Bissecteurs dans l'espace hyperbolique complexe . . . . .	158
3.3.1.1	Bissecteurs . . . . .	158
3.3.1.2	Intersection de bissecteurs coéquidistants . . . . .	160
3.3.1.3	Sphères spinales . . . . .	161
3.3.2	Le théorème de Poincaré, version complexe . . . . .	162

3.3.2.1	Contexte . . . . .	162
3.3.2.2	Hypothèse sur les points à l'infini . . . . .	163
3.3.2.3	Preuve de la complétude de $Z$ . . . . .	164
3.3.2.4	Vérification du reste des hypothèses . . . . .	167
3.4	Construction d'une représentation de $\Gamma_{pq}$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$ . . . . .	169
3.4.1	Construction du groupe . . . . .	169
3.4.2	Domaine de Dirichlet partiel . . . . .	171
3.4.3	Notations pour la suite . . . . .	171
3.5	Certification de la combinatoire de $D$ . . . . .	173
3.5.1	Restriction du nombre de facettes à étudier . . . . .	173
3.5.2	Bissecteurs ne s'intersectant pas dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	174
3.5.3	Intersections dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ - Méthode générale . . . . .	175
3.5.4	Exemple de certification : facette de codimension 2 . . . . .	176
3.5.5	Exemple de certification : facette de codimension supérieure à 2 . . . . .	179
3.5.6	Combinatoire du polyèdre $D$ . . . . .	182
3.6	Représentation fidèle, discrète, convexe cocompacte . . . . .	182
3.6.1	Application du théorème de Poincaré . . . . .	183
3.6.1.1	Identifications de faces . . . . .	183
3.6.1.2	Cycles d'arêtes . . . . .	185
3.6.1.3	Points à l'infini . . . . .	186
3.6.1.4	Conclusion . . . . .	187
3.6.2	$\Gamma$ est convexe cocompact . . . . .	188
3.7	Conclusion . . . . .	190
<b>A</b>	<b>Identifications de faces pour les polyèdres</b>	<b>191</b>
A.1	Métriques à 6 singularités . . . . .	191
A.2	Métriques à 8 singularités . . . . .	196
A.3	Recollement des métriques à 8 singularités . . . . .	214
<b>B</b>	<b>Angles dièdres dans les polyèdres <math>\mathcal{P}_0</math> à <math>\mathcal{P}_4</math></b>	<b>223</b>
<b>C</b>	<b>Présentations des groupes <math>\Gamma_1</math> à <math>\Gamma_4</math></b>	<b>229</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>233</b>



# Introduction

Cette thèse traite de deux problèmes distincts en géométrie hyperbolique réelle et complexe. Le premier consiste en l'étude d'espaces de modules de certaines métriques plates à singularités coniques sur la sphère. On décrit une structure hyperbolique réelle sur ces espaces de modules, pour laquelle leurs composantes connexes sont des ouverts denses d'orbifolds hyperboliques réels non compacts de volume fini. Les complétés métriques de ces composantes connexes admettent un recollement naturel, dont on étudie la structure.

Le deuxième thème étudié dans cette thèse traite des ensembles limites de groupes discrets d'isométries du plan hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . On construit le premier exemple explicite de sous-groupe discret de  $PU(2,1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger, et on en déduit l'existence d'une famille continue à trois paramètres réels de groupes (non conjugués) vérifiant cette propriété.

La suite de l'introduction présente le contexte et les motivations de chacun de ces problèmes, traités de façon indépendante dans la thèse. On évoque aussi un dénominateur commun à ces deux thèmes : l'aspect effectif des travaux effectués.

## Espaces de modules de métriques sur la sphère

**Configurations de points sur  $\mathbb{CP}^1$**  A la fin du XIXème siècle, Picard [Pic85] construit une famille de réseaux du groupe des isométries du plan hyperbolique complexe  $PU(2,1)$ , en généralisant des travaux de Schwarz [Sch73] à la dimension supérieure. Ces réseaux sont parmi les premiers construits dans  $PU(2,1)$ . Ils sont obtenus comme groupes de monodromie de certaines fonctions hypergénométriques à deux variables, dont les poids vérifient une condition d'intégralité. La liste exacte de tous les réseaux obtenus est donnée par Le Vavasseur [LV93]. Près d'un siècle plus tard, ces travaux sont repris et étendus par Terada [Ter83], puis par Deligne et Mostow [DM86], à des fonctions hypergénométriques à  $n$  variables.

Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un ensemble de poids vérifiant  $0 < \mu_k < 1$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ , et  $\sum_{k=1}^n \mu_k = 2$ . Pour tous  $a, b \in \{1, \dots, n\}$  et  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{CP}^1$  deux à deux disjoints, on note (en reprenant les notations de l'article d'exposition de Parker [Par09])

$$F_{ab}(z_1, \dots, z_n) = \int_{z=z_a}^{z_b} \prod_{k=1}^n (\zeta - z_k)^{-\mu_k} d\zeta$$

où le chemin d'intégration ne rencontre les  $z_k$  qu'à ses extrémités. Les fonctions  $F_{ab}$  sont considérées seulement à composition avec un élément de  $PGL(2, \mathbb{C})$  près : on obtient donc des fonction multivaluées

$$F_{ab} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{C},$$

où  $\mathcal{Q} = \{(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{CP}^1)^n \mid z_k \neq z_j \text{ si } k \neq j\} / PGL(2, \mathbb{C})$  est l'espace des configurations de  $n$  points sur la sphère de Riemann. Les fonctions  $F_{ab}$  admettent un relèvement uni-

valué à  $\tilde{\mathcal{Q}}$ , le revêtement universel de  $\mathcal{Q}$ . L'espace vectoriel engendré par les  $F_{ab}$  est de dimension  $n - 2$ , et les  $F_{ab}$  ne s'annulent pas simultanément (voir [DM86, Loo07]). Après projectivisation, on peut donc définir une fonction univaluée

$$\omega_\mu : \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-3}$$

Le groupe fondamental de  $\mathcal{Q}$  agit par monodromie sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-3}$ , son action est linéaire et préserve une forme hermitienne de signature  $(n - 3, 1)$  (ce point utilise la théorie de Hodge) : le groupe de monodromie  $\Gamma$  est donc à valeurs dans  $PU(n - 3, 1)$ . Deligne et Mostow [DM86] donnent une condition sur  $\mu$  pour que  $\Gamma$  soit un réseau de  $PU(n - 3, 1)$  (généralisation de celle de Picard) :

**Théorème 0.0.1** ([DM86]). *Si  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  comme ci-dessus vérifie la condition supplémentaire*

$$(1 - \mu_k - \mu_j)^{-1} \in \mathbb{Z} \text{ pour tous } \mu_k, \mu_j \in \mu \text{ tels que } k \neq j \text{ et } \mu_k + \mu_j < 1$$

*alors le groupe de monodromie  $\Gamma$  est un réseau de  $PU(n - 3, 1)$ .*

Cette condition d'intégralité est ensuite affaiblie par Mostow [Mos86] : lorsque deux poids sont égaux, une condition de semi-intégralité est suffisante pour obtenir un réseau. Ceci donne alors une liste de 94 réseaux hyperboliques complexes, de la dimension 2 (où l'on retrouve les réseaux de Picard [Pic85]) à la dimension 9.

**Espaces de modules de métriques sur la sphère** Ces réseaux sont retrouvés par Thurston [Thu98] de façon plus élémentaire (en particulier, sans utiliser la théorie de Hodge), par l'étude de l'espace de modules de métriques plates à singularités coniques sur la sphère. Soient  $\theta_1, \dots, \theta_n \in ]0, 2\pi[$  : une métrique plate à  $n$  singularités coniques sur  $\mathbb{S}^2$  d'angles  $\theta_1, \dots, \theta_n$  (voir définition 2.1.1) est une métrique localement isométrique à la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ , sauf en  $n$  points  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  qui admettent un voisinage modelé sur un cône euclidien d'angle  $\theta_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . La courbure  $c_k$  de la singularité  $x_k$  est définie comme le défaut angulaire  $c_k = 2\pi - \theta_k$ . Dans ce cas, la formule de Gauss-Bonnet assure que les angles  $\theta_k$  vérifient la condition suivante :  $\sum_{k=1}^n (2\pi - \theta_k) = \sum_{k=1}^n c_k = 4\pi$ . Les polyèdres convexes euclidiens déterminent par exemple des métriques plates sur la sphère : les singularités sont les sommets du polyèdre, et l'angle en une singularité est égale à la somme des angles des différentes faces en ce sommets. Le théorème d'Alexandrov (voir théorème 2.1.2, ou [Ale05]) assure en fait que toute métrique plate sur  $\mathbb{S}^2$  provient d'un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^3$ .

Thurston étudie l'espace de modules des métriques plates à  $n$  singularités d'angles donnés, à isométries préservant l'orientation et homothéties près. Noter que les singularités ne sont pas marquées : les isométries considérées ne préservent pas forcément la numérotation des singularités. La construction d'une structure hyperbolique complexe sur cet espace de modules est basée sur le développement des métriques sur le plan euclidien. Soient  $\theta_1, \dots, \theta_n$  des angles vérifiant la condition de Gauss-Bonnet, et  $M$  une métrique plate d'angles  $\theta_1, \dots, \theta_n$ .  $M$  admet une triangulation géodésique dont les sommets sont les singularités de la métrique. Cette triangulation peut être développée dans  $\mathbb{R}^2$  : l'application développante est bien définie de  $\tilde{M}'$ , le revêtement universel de  $M$  privée des singularités, vers  $\mathbb{R}^2$ . A chaque arête  $e$  de la triangulation sur  $\tilde{M}'$ , on peut associer le nombre complexe  $Z(e)$  donné par le vecteur image de  $e$  dans  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ . L'application  $Z$  est



appelée *cocycle* : la somme des images des arêtes bordant un triangle est nulle. La partie orthogonale de l'holonomie de la structure euclidienne sur  $\tilde{M}'$  agit sur les cocycles. Des petites perturbations du cocycle  $Z$  donnent des métriques “proches” de  $M$ . Un changement de triangulation, ou changement de cartes, modifie le cocycle de façon linéaire.

L'espace des cocycles d'angles  $\theta_1, \dots, \theta_n$  est de dimension complexe  $n-2$  : étant donnée une triangulation, il suffit de connaître le cocycle sur  $n-2$  arêtes pour déterminer toutes les autres. L'aire d'une métrique  $M$  s'exprime en fonction du cocycle, et c'est une forme hermitienne de signature  $(1, n-3)$ . Les changements de cartes sont linéaires, et préservent la forme d'aire puisqu'ils correspondent simplement à des mouvements de type “couper-coller” dans le plan. Ils sont donc à valeurs dans  $PU(1, n-3)$ . Après passage au quotient par les homothéties, on en déduit que l'espace de modules  $\mathcal{M}(\theta_1, \dots, \theta_n)$  des métriques d'angles donnés admet une structure de variété hyperbolique complexe de dimension  $n-3$  : il est modelé sur l'espace hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n-3}$ .

Cette structure n'est pas complète : sous certaines conditions sur les angles, la distance entre deux singularités peut tendre vers 0 tout en restant à distance finie dans l'espace de modules. Le résultat de Thurston sur le complété métrique de l'espace de modules est le suivant :

**Théorème 0.0.2** ([Thu98]). *Soient  $\theta_1, \dots, \theta_n$  des angles vérifiant la condition  $\sum_{k=1}^n (2\pi - \theta_k) = 4\pi$ . On note  $c_k = 2\pi - \theta_k$  les courbures associées. L'espace de modules des métriques plates à  $n$  singularités d'angles  $\theta_k$  est une variété hyperbolique complexe de dimension  $n-3$ , dont la complétion métrique est une cône-variété hyperbolique complexe de volume fini. Cette cône-variété est un orbifold si et seulement si pour tous  $c_k, c_j$ ,  $i \neq j$ , tels que  $c_i + c_j < 2\pi$ , l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- $2\pi/(2\pi - c_i - c_j)$  est un entier,
- si  $c_i = c_j$ ,  $2\pi/(2\pi - c_i - c_j)$  est de la forme  $k/2$ , où  $k$  est un entier.

Ces conditions correspondent exactement aux conditions de Deligne et Mostow : la courbure  $c_k$  d'une singularité est le pendant du poids  $\mu_k$ , via la relation  $c_k = 2\pi\mu_k$  (voir aussi [Par09]). Lorsque le complété est un orbifold, c'est un quotient de l'espace hyperbolique complexe par un réseau. La liste des réseaux ainsi obtenue est exactement celle des travaux de Deligne et Mostow.

Le lien entre les deux approches peut être souligné par les travaux de Troyanov [Tro86, Tro91] sur les métriques satisfaisant des conditions de courbure sur des surfaces de Riemann. La sphère n'admet qu'une seule structure conforme, et le résultat est alors le suivant : étant donnés  $n$  points  $z_1, \dots, z_n$  sur  $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , et des angles  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , il existe une unique métrique plate (à homothétie près) dont les singularités sont d'angles  $\theta_k$  en les  $z_k$ . Elle est donnée par

$$ds^2 = \prod_{k=1}^n |\zeta - z_k|^{-2\mu_k} |d\zeta|^2, \quad \text{où } 2\pi\mu_k = 2\pi - \theta_k$$

Kojima [Koj01] décrit aussi la relation entre [DM86] et [Thu98], via une généralisation de la formule de Schwarz-Christoffel (évoquée aussi dans [Thu98]).

De nombreux travaux sont basés sur ces espaces de modules, avec l'un ou l'autre des points de vue (monodromie des fonctions hypergéométriques ou métriques plates à singularités coniques). Une approche peut être de décrire et étudier plus précisément les réseaux obtenus : Parker et Boadi ([Par06, PB15]) construisent par exemple via la méthode de

Thurston des domaines fondamentaux explicites pour une famille de réseaux obtenus dans le cas de 5 singularités. Matsumoto et Yoshida [MY93] décrivent le réseau de  $PU(5, 1)$  correspondant à 8 points de  $\mathbb{CP}^1$  de même poids comme sous-groupe de congruence d'un groupe modulaire. D'autres travaux étudient des généralisations de ces espaces de modules à des contextes différents. On peut citer par exemple Troyanov [Tro07], qui étudie l'espace de modules des métriques plates à singularités coniques sur des surfaces sans restriction de genre, ou Veech [Vee93] pour lequel le genre est quelconque et les singularités peuvent être d'angle supérieur à  $2\pi$ .

**Versions réelles de ces espaces de modules** Les travaux de Deligne, Mostow et Thurston donnent une structure hyperbolique *complexe* aux espaces de modules de configurations de points sur  $\mathbb{CP}^1$  ou de polyèdres euclidiens. Il existe en parallèle une littérature abondante sur des version *réelles* de ces objets. Dans le cadre de Deligne-Mostow, il s'agit en général d'étudier l'espace de modules de configurations de points sur l'espace projectif réel  $\mathbb{RP}^1$  [AY98, Yos98, KNY99, YNK02, MN00]. Leur équivalent du point de vue de la méthode de Thurston est l'étude de polygones dans le plan. En effet, un polygone du plan recollé à une copie de lui-même le long de son bord donne un polyèdre dégénéré. Un tel polyèdre est invariant par la réflexion qui échange les deux copies du polygone. Cette réflexion joue le même rôle que la conjugaison complexe dans le cadre des points sur  $\mathbb{CP}^1$ . Un premier exemple d'espace de modules d'hexagones est donné dans [Thu98], section 1. Noter que les polygones sont supposés *marqués* dans ces travaux : les isométries doivent préserver la numérotation des sommets.

Bavard et Ghys [BG92] étudient les espaces de modules de polygones convexes marqués du plan dont la suite des directions des côtés est fixée. Si les directions sont parallèles aux côtés d'un  $n$ -gone convexe, alors l'espace de modules des  $n$ -gones correspondant est un polyèdre hyperbolique réel de dimension  $n - 3$  et de volume fini. Sous certaines conditions sur les directions (qui peuvent être vues comme des analogues de la condition d'intégralité des théorèmes 0.0.1 et 0.0.2), les polyèdres obtenus sont de Coxeter. En particulier, Bavard et Ghys retrouvent la liste des orthoschèmes de Im Hof [IH90]. Parmi d'autres travaux sur les espaces de polygones qui admettent une uniformisation hyperbolique réelle, on peut citer aussi [KM95] (polygones dont les côtés sont de longueurs fixées), [KY93] (étoiles à 5 branches), [AY99] (hexagrammes).

L'article de Fillastre [Fil11] retrouve les résultats de Bavard et Ghys à l'aide de la théorie des volumes mixtes, et montre comment, étant donné un ensemble d'angles  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , les orthoschèmes obtenus à partir des différents ordres cycliques sur cet ensemble se recollent de façon naturelle. L'espace recollé est un sous-espace réel de l'espace de modules complexe des métriques d'angles  $\{2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n\}$  (dans cet espace les singularités sont marquées, c'est donc un revêtement des espaces de Thurston). Ce sous-espace est une *forme réelle* de l'espace complexe : c'est l'ensemble des points fixes d'une isométrie involutive qui renverse l'orientation, et qui peut être décrite comme la réflexion des polyèdres par rapport à un plan.

**Configurations de points stables par conjugaison complexe** Il est possible de considérer des espaces plus larges admettant une structure réelle. Considérons d'abord le cas des configurations de points sur  $\mathbb{CP}^1$  : les points réels sont les points fixes de la conjugaison complexe, mais on peut aussi considérer les ensembles de points *globalement*

stables par conjugaison. C'est l'objet de l'article d'Allcock, Carlson et Toledo [ACT07] sur les sextiques réelles (qui donne une version simple de leur problème original, l'étude de l'espace de modules des surfaces cubiques réelles, voir [ACT10]). Les sextiques réelles sont des polynômes homogènes réels de degré six à deux variables. Elles sont considérées modulo l'action de  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Une sextique est caractérisée par ses racines (homogènes) dans  $\mathbb{CP}^1$ . Les racines d'une sextique réelle ne sont pas forcément réelles, mais sont stables par conjugaison complexe : une sextique réelle admet 6 racines dans  $\mathbb{CP}^1$ , réelles ou complexes conjuguées. Leur étude est reliée à celle des configurations de 6 points (non marquées) sur  $\mathbb{CP}^1$  à poids égaux. L'espace de modules des sextiques réelles lisses (i.e. dont toutes les racines sont distinctes) admet l'uniformisation hyperbolique réelle suivante :

**Théorème 0.0.3** ([ACT07]). *Soit  $\mathcal{M}_j^{\mathbb{R}}$  l'espace de modules des sextiques réelles lisses admettant  $j$  paires de racines conjuguées,  $0 \leq j \leq 3$ . Pour chaque  $0 \leq j \leq 3$ ,  $\mathcal{M}_j^{\mathbb{R}}$  est homéomorphe à un orbifold  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3/\Gamma_j$  privé de certaines hypersurfaces, où  $\Gamma_j$  est un réseau arithmétique non cocompact de  $Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3)$ .*

*L'espace de modules des sextiques réelles admettant des racines de multiplicité au plus 2 (dites stables), noté  $\mathcal{M}_s^{\mathbb{R}}$ , est homéomorphe à un orbifold  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3/\Gamma^{\mathbb{R}}$ , où  $\Gamma^{\mathbb{R}}$  est un réseau non cocompact non arithmétique. L'orbifold  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3/\Gamma^{\mathbb{R}}$  est obtenu en recollant les  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3/\Gamma_j$  suivant les hypersurfaces ôtées, qui correspondent aux sextiques admettant des racines doubles.*

Les  $\Gamma_j$  sont des groupes de Coxeter (ou d'indice 2 dans des groupes de Coxeter) de la forme  $O(q_j, \mathbb{Z})$ , où les  $q_j$  sont des formes quadratiques de signature  $(3, 1)$ .

Dans sa thèse [Chu06] (et l'article [Chu11] qui en est tiré), Chu adapte la construction d'Allcock, Carlson et Toledo au cas des octiques réelles, polynômes homogènes de degré huit à deux variables. Les composantes de l'espace de modules admettent à nouveau une structure d'orbifold hyperbolique réelle (non complète), mais le recollement des complétés métriques des composantes ne donne pas la structure d'orbifold attendue :

**Théorème 0.0.4** ([Chu11]). *L'espace de modules des octiques réelles lisses admet cinq composantes, homéomorphes à des orbifolds arithmétiques  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^5/\Gamma_j$  privés d'hypersurfaces correspondant aux octiques admettant des racines doubles. Les  $\Gamma_j$  sont commensurables à des groupes de Coxeter du type  $O(q_j, \mathbb{Z})$ , où les  $q_j$  sont des formes quadratiques de signature  $(5, 1)$ .*

*L'espace de modules des octiques stables (i.e. admettant des racines de multiplicité au plus 2) est obtenu en recollant ces composantes suivant les hypersurfaces ôtées, mais ce recollement n'induit pas de structure d'orbifold hyperbolique : certains points admettent un angle conique de  $3\pi/4$ , qui n'est pas un sous-multiple de  $2\pi$ .*

Les résultats d'Allcock, Carlson, Toledo et Chu sont basés sur la géométrie algébrique et la théorie géométrique des invariants.

**Objectifs de ce thème et résultats** Dans le cadre des espaces de modules de métriques plates singulières sur  $\mathbb{S}^2$  (ou de polyèdres convexes de  $\mathbb{R}^3$ ), la conjugaison complexe correspond à la réflexion par rapport à un plan, voir [Fil11] p.50-51. Les points fixes de cette involution dans l'espace de modules sont les polyèdres obtenus comme deux copies d'une "pyramide" (*convex cap* dans l'article de Fillastre) recollées suivant leur bord. Une des questions d'ouverture à la fin de l'article [Fil11] est la suivante (question 4, p.51) : est-il possible de décrire une structure hyperbolique (réelle) sur l'espace de modules des pyramides d'angles fixés ?

L'objectif de la première partie de cette thèse est de répondre à la question de Fillastre dans le cas des métriques à 6 (respectivement 8) singularités d'angles égaux : on décrit une structure hyperbolique réelle sur l'espace de modules des métriques plates à 6 (resp. 8) singularités coniques d'angles égaux admettant une symétrie (voir définition 2.1.3), en adaptant la méthode décrite par Thurston au début de [Thu98] (voir aussi [Par06] et [PB15]).

Dans le cas des métriques à six singularités, on retrouve par une méthode élémentaire les résultats de [ACT07], voir le théorème 2.3.16. Appliquée aux métriques à huit singularités, cette méthode permet d'obtenir une description précise des composantes de l'espace de modules, et de l'obstruction au recollement de ces composantes. Les outils utilisés donnent des résultats plus fins que ceux obtenus par Chu [Chu11, Chu06] dans le contexte des octiques réelles. Les réseaux  $\Gamma_j$  uniformisant les composantes de l'espace de modules sont décrits explicitement par une présentation et un polyèdre fondamental, et les indices de commensurabilité entre les  $\Gamma_j$  et les groupes de Coxeter  $O(q_j, \mathbb{Z})$  sont calculés explicitement. Ces résultats sont résumés dans le théorème 2.4.15. L'obstruction au recollement des composantes est précisée : on montre que l'espace de modules des métriques plates symétriques à huit singularités d'angles égaux, éventuellement dégénérées, est obtenu comme quotient d'une union de polyèdres hyperboliques par des isométries, et que le groupe engendré par ces isométries n'est pas discret, voir théorème 2.5.3.

Une seconde motivation pour ces travaux était la construction de réseaux non arithmétiques dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ . Pour les métriques à 6 singularités, le recollement des composantes arithmétiques donne en effet un orbifold non arithmétique, et il est naturel de chercher à généraliser cette construction. Comme indiqué plus haut, ce résultat n'est malheureusement plus valable dans le cas des métriques à 8 singularités, puisque le groupe obtenu après le recollement n'est pas discret.

## Ensembles limites de sous-groupes discrets de $PU(2, 1)$

Ce thème traite d'un aspect différent des groupes discrets d'isométries de l'espace hyperbolique réel ou complexe : les objets géométriques étudiés ici sont les ensembles limites. Contrairement à l'étude des espaces de modules, basée sur les réseaux, les groupes discrets considérés ici sont de covolume infini. On s'intéresse de plus principalement à des groupes d'isométries du plan hyperbolique *complexe*.

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret du groupe des isométries de  $\mathbb{H}^n$ , l'espace hyperbolique de dimension  $n$  réel ou complexe. Tout point d'accumulation d'une  $\Gamma$ -orbite est alors sur le bord  $\partial_{\infty}\mathbb{H}^n$ , et on définit l'ensemble limite de  $\Gamma$ , noté  $\Lambda\Gamma$ , par

$$\Lambda\Gamma = \overline{\Gamma \cdot x} \cap \partial_{\infty}\mathbb{H}^n \text{ pour un } x \in \mathbb{H}^n.$$

La définition est indépendante du choix de  $x$ . Si  $\Gamma$  est un réseau, alors  $\Lambda\Gamma$  est toujours égal au bord à l'infini  $\partial_{\infty}\mathbb{H}^n$ . En revanche, les ensembles limites forment un outil important dans l'étude des sous-groupes discrets de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  de covolume *infini*. De nombreux résultats relient les propriétés algébriques et géométriques du groupe  $\Gamma$  à la topologie de l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$ , voir par exemple l'article récapitulatif de M. Kapovich [Kap08] sur les groupes discrets d'isométries de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ . La littérature est particulièrement abondante pour les groupes fuchsien ou kleiniens (sous-groupes discrets de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$  ou  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3)$ ), voir par exemple [Mas88]. Dans une autre optique, le livre [MSW02] présente un grand nombre

de belles images d'ensembles limites de groupes kleinien, qui permettent de se familiariser avec leur structure souvent fractale.

Une question naturelle est de savoir quels espaces topologiques apparaissent comme ensembles limites. Les ensembles limites de dimension topologique 0 sont complètement classifiés : ils sont soit de cardinal inférieur ou égal à 2, soit homéomorphes à l'ensemble de Cantor [Kap08]. En dimension 1, on s'intéresse seulement aux ensembles limites "indécomposables", correspondant à des groupes qui ne sont pas obtenus comme composition de deux groupes non triviaux (voir par exemple [Mas88, Kap01] sur les théorèmes de composition de Klein et Maskit). D'après un théorème de M. Kapovich et B. Kleiner ([KK00]), dans le cadre des groupes convexes cocompacts, il existe seulement trois tels ensembles : le cercle, le tapis de Sierpinski et l'éponge de Menger. Les deux premiers apparaissent relativement facilement : l'ensemble limite des réseaux fuchsien est le cercle, et les groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques compactes à bord totalement géodésique sont des exemples de groupes dont l'ensemble limite est homéomorphe au tapis de Sierpinski [Kap08]. En revanche, il faut attendre les travaux de M. Bourdon [Bou97b] pour obtenir un exemple explicite de groupe dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger : pour chaque  $n \geq 4$  pair, Bourdon construit une famille infinie de sous-groupes discrets d'isométries de l'espace hyperbolique réel de dimension  $n$  avec cette propriété. A ma connaissance, il n'y a pour l'instant pas d'exemple dans l'espace hyperbolique complexe. Il est donc naturel de chercher à construire un exemple de groupe d'isométries du plan hyperbolique *complexe* dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger. Pour l'obtenir, on adapte la construction de Bourdon au cas hyperbolique complexe.

La construction de [Bou97b] est basée sur le lien entre les ensembles limites de groupes convexes cocompacts, et le bord des groupes Gromov-hyperboliques : une représentation fidèle, discrète, et convexe cocompacte d'un groupe hyperbolique a un ensemble limite homéomorphe au bord du groupe (cf. proposition 3.1.11). La première étape de la construction est donc de trouver un groupe hyperbolique dont le bord est homéomorphe à l'éponge de Menger. C'est le cas du groupe

$$\Gamma_{pq} = \langle r_1, \dots, r_p \mid r_i^q = 1, [r_i, r_{i+1}] = 1, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rangle, \text{ où } p \geq 5 \text{ et } q \geq 3,$$

d'après les travaux de N. Benakli [Ben92], et ceux plus récents de Dymara et Osajda [DO07] (voir aussi la section 3.2 de ce manuscrit). La deuxième étape de la construction consiste alors à trouver une représentation convexe cocompacte de  $\Gamma_{pq}$  dans  $PO(n, 1)$ . La représentation est définie de la façon suivante : soit  $P$  un  $p$ -gone régulier à angles droits de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  plongé dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ . Les images des  $r_i \in \Gamma_{pq}$  sont des isométries  $R_i \in \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  d'ordre  $q$  qui fixent la  $i$ -ème arête de  $P$  et commutent avec  $R_{i-1}$  et  $R_{i+1}$ . Sous les conditions

$$n = 2q - 2 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) < \frac{1}{\sqrt{q}},$$

et pour des isométries  $R_i$  bien choisies, la représentation ainsi construite est fidèle, discrète et convexe cocompacte, et l'ensemble limite de son image est homéomorphe à l'éponge de Menger.

Le but de la deuxième partie de cette thèse est d'adapter cette construction au cas complexe, pour obtenir un exemple explicite de sous-groupe discret de  $PU(2, 1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger. La construction réelle ne peut

pas être adaptée directement au cas hyperbolique complexe, car une grande partie des propriétés utilisées dans [Bou97b] ne sont plus valables en courbure variable. La principale différence est l'absence de sous-variétés totalement géodésiques (cf. section 1.1.2), qui entraîne notamment des difficultés liées à la notion de convexité : un domaine de Dirichlet, par exemple, n'est pas convexe dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

L'idée de base de la construction dans  $PU(2,1)$  est de plonger un  $p$ -gone hyperbolique réel régulier à angles droits dans le plan hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et d'étudier le groupe engendré par les réflexions d'ordre  $q$  en les droites complexes portant les côtés du polygone. L'étude de la représentation de  $\Gamma_{pq}$  correspondante est basée sur la construction d'un domaine de Dirichlet pour ce groupe. Le théorème de Poincaré permettra de montrer que la représentation est bien discrète et fidèle. Pour vérifier qu'elle est convexe cocompacte, on utilisera une caractérisation alternative (groupe géométriquement fini et sans parabolique), vérifiable aussi sur un domaine fondamental.

Du fait de la courbure variable, l'étude de la combinatoire d'un polyèdre fondamental pour le groupe est beaucoup plus difficile que dans l'étude des espaces de modules. La certification des calculs est nécessaire, et fait l'objet d'une section spécifique. Faute de méthode générale pour traiter des familles de groupes, on se restreint à un cas particulier, choisi de manière à travailler dans un corps de nombre le plus simple possible : on étudie donc la représentation de  $\Gamma_{pq}$  avec  $p = 6$ ,  $q = 3$ . L'étude précise d'un domaine de Dirichlet partiel permet alors de montrer le

**Théorème 0.0.5.** *Il existe une représentation fidèle, discrète et convexe cocompacte de  $\Gamma_{6,3}$  dans  $PU(2,1)$ . L'ensemble limite de cette représentation est donc homéomorphe à l'éponge de Menger.*

Le résultat suivant de O. Guichard [Gui04] permet alors d'en déduire l'existence d'une famille de sous-groupes de  $PU(2,1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger.

**Théorème 0.0.6** ([Gui04]). *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple à centre fini, et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de type fini de  $G$ . On suppose que  $\Gamma$  est plongé quasi-isométriquement dans  $G$ , et qu'il est de plus contenu dans un sous-groupe  $G^*$  de rang un de  $G$ . Alors l'injection de  $\Gamma$  dans  $G$  admet un voisinage dans l'espace  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  des représentations entièrement constitué de plongements quasi-isométriques.*

En appliquant le résultat de Guichard à la représentation construite précédemment (voir section 3.7), on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 0.0.7.** *Il existe une famille continue à trois paramètres réels de sous-groupes de  $PU(2,1)$  deux à deux non conjugués dont les ensembles limites sont homéomorphes à l'éponge de Menger.*

## Aspects effectifs

Au delà du thème commun des groupes discrets en géométrie hyperbolique, les travaux effectués dans cette thèse présentent une similitude de traitement : dans les deux cas, on insiste sur les aspects *effectifs* liés à ces travaux. Ces aspects effectifs sont de deux types principaux. Le premier consiste à trouver des méthodes pratiques, effectives, pour vérifier sur des exemples explicites des propriétés théoriques données. Certaines notions (comme la convexe cocompacité, par exemple, ou le fait qu'une isométrie de l'espace hyperbolique

induit une isométrie entre deux faces d'un polyèdre) sont définies de façon théorique, et sont difficiles à vérifier en pratique sur un exemple donné. On détaillera donc des méthodes “algorithmiques”, pratiques, qui permettent de traiter effectivement certaines classes d'exemples.

Le deuxième versant de l'effectivité est d'explicitier les résultats d'existence obtenus théoriquement, pour gagner en compréhension sur les objets et les processus en jeu. On détaille dans la suite l'exemple de la commensurabilité entre deux groupes : de nombreux résultats théoriques (par exemple liés à l'arithméticité) peuvent montrer que deux groupes sont commensurables, mais trouver des indices de commensurabilité explicites est un problème difficile, pour lequel il n'existe pas de méthode générale.

**Vérification des hypothèses du théorème de Poincaré** La plupart des travaux présentés dans ce manuscrit sont basés sur l'étude de groupes discrets d'isométries hyperboliques (réelles ou complexes) via des domaines fondamentaux pour ces groupes. Les liens entre la géométrie d'un domaine fondamental suffisamment régulier et les propriétés du groupe (covolume, cocompacité, présentation, finitude géométrique...) font des domaines fondamentaux des outils essentiels dans l'étude des groupes discrets. L'outil principal dans cette optique, utilisé tout au long de la thèse, est le *théorème du polyèdre de Poincaré*. Etant donné un polyèdre muni d'isométries identifiant les faces deux à deux, il permet de tester si le groupe engendré par ces isométries est discret, et si le polyèdre est un domaine fondamental pour ce groupe.

Dans la version générale du théorème de Poincaré (voir section 1.3), les hypothèses nécessaires pour l'appliquer sont difficilement vérifiables en pratique. Ces hypothèses sont de trois types :

- les identifications de faces induisent bien des isométries entre les faces du polyèdre,
- pour chaque arête, les copies du polyèdre recollées autour de cette arête doivent paver un voisinage de l'arête,
- si le polyèdre n'est pas compact, il faut vérifier la complétude de l'espace obtenu comme l'ensemble des copies distinctes du polyèdre recollées le long de leurs faces, en accord avec les identifications.

Si on se restreint à l'espace hyperbolique réel, ces hypothèses peuvent être reformulées sous des formes vérifiables de façon effective. L'hypothèse de pavage local, par exemple, revient à vérifier que l'angle associé à un cycle d'arête est de la forme  $2\pi/k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , voir section 2.2.2. L'article d'Esptein et Petronio [EP94] présente de façon détaillée une version réelle du théorème de Poincaré, en insistant sur l'aspect effectif des vérifications. Noter que le théorème de Poincaré est un résultat subtil, et cette reformulation des hypothèses sous forme pratique est un exercice périlleux, comme en atteste la liste des versions erronées de la littérature (et des contre-exemples correspondant) donnée par [EP94].

Dans le cas de l'espace hyperbolique complexe, les travaux de [EP94] ne sont pas entièrement généralisables : certains points en particulier reposent sur la convexité des domaines fondamentaux étudiés, et cette hypothèse ne passe pas au cas complexe (les domaines de Dirichlet, par exemple, ne sont pas convexes). En se restreignant à des cas particuliers, on peut cependant exprimer certaines des hypothèses de façon effective et vérifiable (cf. section 3.3.2). C'est le cas par exemple de la condition de pavage local, qui s'exprime simplement dans le cas où les polyèdres considérés sont des domaines de Dirichlet.

L'hypothèse de complétude est la plus difficile à manipuler. On en donne une version

vérifiable sur un domaine fondamental, mais restreinte à un cas particulier excluant entre autres le cas des polyèdres à “cusps”, voir section 3.3.2.2. Le problème de la vérification de l’existence d’identifications de faces est étudié au paragraphe suivant.

**Certification de la combinatoire d’un domaine fondamental dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$**  L’application du théorème de Poincaré nécessite de connaître la combinatoire du polyèdre étudié, pour vérifier que les identifications de faces induisent bien des isométries entre les faces. Dans le cas hyperbolique réel, un polyèdre est délimité par des hyperplans, chacun donné par une équation linéaire. Les intersections entre ces hyperplans sont décrites via l’algèbre linéaire.

Dans le cas hyperbolique complexe, il n’y a pas d’hypersurfaces totalement géodésiques du fait de la courbure variable. Dans cette thèse, tous les polyèdres de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  considérés sont bordés par des bissecteurs (définis section 3.3.1.1) en nombre fini. Ces bissecteurs sont décrits par des équations quadratiques en quatre variables réelles (les parties réelles et imaginaires des coordonnées dans la boule  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ), et un polyèdre est donc donné par un système fini de telles inégalités quadratiques.

Il existe des algorithmes pour étudier les ensembles semi-algébriques obtenus ainsi, mais ils sont trop coûteux lorsque le nombre de faces du polyèdre augmente. Il est cependant possible de tirer parti des propriétés géométriques des bissecteurs pour définir une méthode plus efficace, basée sur l’étude des intersections de paires de bissecteurs (voir [DPP15]). Une fois connues toutes les intersections de deux bissecteurs, on peut en déduire la combinatoire complète du polyèdre. L’intersection de deux bissecteurs peut être paramétrée par deux variables réelles (voir section 3.3.1.2) : les facettes de codimension supérieure ou égale à 2 dans le polyèdre sont donc définies par des égalités et inégalités en deux variables réelles, quadratiques en chaque variables, dont les coefficients sont dans un corps de nombres. Chacune de ces égalités (resp. inégalités) donne une courbe plane (resp. un domaine bordé par une courbe plane). Les intersections entre ces courbes sont souvent zéro-dimensionnelles (ce sera toujours le cas pour les exemples considérés dans cette thèse), et peuvent être étudiée par la méthode de la représentation rationnelle univariée, voir section 3.5.3. Ceci permet de certifier la combinatoire des facettes de codimension 2, et donc toute la combinatoire du polyèdre.

**Vérification effective de propriétés théoriques** Outre le théorème de Poincaré et les hypothèses associées, on peut citer deux autres propriétés difficilement vérifiables en pratique sur un exemple donné, et que l’on cherche à retranscrire en termes plus effectifs dans cette thèse.

La première est la propriété de non discrétude d’un groupe. Etant donné un ensemble fini d’isométries de l’espace hyperbolique (réel ou complexe), il est en général difficile de déterminer si le groupe engendré par ces isométries est discret ou non, et de le montrer. La procédure de Riley [Ril83], détaillée section 2.5.4, est une méthode effective pour traiter ce type de problèmes. Elle est basée sur le théorème de Poincaré, et la construction pas à pas d’un domaine de Dirichlet pour le groupe. Si le groupe est discret, la procédure devrait donner un domaine fondamental conjecturel pour le groupe. Si au contraire le groupe n’est pas discret, le comportement de la procédure devrait en témoigner et fournir des outils pour montrer la non discrétude (par exemple un élément elliptique d’ordre infini). Pour montrer qu’un certain groupe engendré par des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^5$  n’est pas discret (cf. section 2.5.4), on construit une version générale de la procédure de Riley pour des groupes d’isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^5$ . (Voir [Der05] pour une version dans le plan hyperbolique complexe.)



La deuxième notion qui nous intéresse est celle de groupe convexe cocompact, cf. section 3.1.3. Un sous-groupe de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ , groupe des isométries de l'espace hyperbolique réel ou complexe, est dit convexe cocompact s'il agit cocompactement sur l'enveloppe convexe  $C(\Lambda\Gamma)$  de son ensemble limite  $\Lambda\Gamma$ . L'ensemble limite est un objet en général difficile à appréhender en pratique du fait de sa structure souvent fractale, et de même pour son enveloppe convexe. Dans le contexte hyperbolique réel, une définition équivalente de la convexe cocompactité est donnée par le fait que le groupe est géométriquement fini et n'admet pas de paraboliques. En se basant sur les travaux de Bowditch [Bow95] sur la finitude géométrique en courbure variable, on vérifie que cette équivalence est toujours vraie dans le cadre hyperbolique complexe. On en déduit une caractérisation vérifiable sur un domaine fondamental quasi-convexe du groupe étudié (par exemple un domaine de Dirichlet), voir section 3.6.2. Ceci nous permet alors de vérifier que le groupe construit dans le chapitre 3 est convexe cocompact, et d'en déduire que son ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger.

**Expliciter certaines propriétés** Un dernier aspect de l'effectivité dans cette thèse correspond à l'étude explicite de certaines propriétés théoriques, données de façon non constructive. L'exemple qui nous intéresse ici apparaît dans les travaux sur les espaces de modules, section 2.4.2. Les composantes de l'espace de modules des métriques plates symétriques sur  $\mathbb{S}^2$  à huit singularités coniques sont des (ouverts denses) d'orbifolds  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^5/\Gamma_j$ ,  $j = 0, \dots, 4$ , où les  $\Gamma_j$  sont des réseaux d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^5$ . Pour chaque  $j$ , les coefficients des éléments de  $\Gamma_j$  et le fait que le covolume de  $\Gamma_j$  est fini entraînent que le réseau est commensurable à un groupe d'isométries entières de la forme  $O(q_j, \mathbb{Z})$ . Ce résultat ne donne en revanche aucune indication sur les indices de commensurabilité entre ces groupes.

Il n'y a pas de méthode générale pour calculer explicitement les indices de commensurabilité entre deux groupes donnés que l'on sait commensurables. Une possibilité peut être de comparer les covolumes des deux groupes, mais le problème de calcul des volumes hyperboliques est une tâche difficile en dimension impaire. Dans ces travaux, on connaît explicitement (par une partie génératrice) le sous-groupe  $\Gamma_j \cap O(q_j, \mathbb{Z})$  commun aux deux groupes. On peut alors en déduire les indices de commensurabilité explicites, en utilisant les domaines fondamentaux et des algorithmes de théorie des groupes, voir section 2.4.2.

## Plan de la thèse

Cette thèse est composée de trois chapitres. Le chapitre 1 traite des préliminaires communs aux deux thèmes de la thèse. On y rappelle les bases de la géométrie hyperbolique, quelques résultats généraux sur les groupes discrets, et une version générale du théorème du polyèdre de Poincaré.

Le chapitre 2 présente l'étude des espaces de modules de métriques plates symétriques à singularités coniques sur la sphère. Les deux premières parties rappellent les définitions et propriétés de base de ces métriques, ainsi que les outils spécifiques à ce chapitre. La section 2.3 traite du cas des métriques à six singularités. Dans ce cas, la description des composantes de l'espace de modules et de leur recollement est particulièrement simple et esthétique : cette partie se veut donc une introduction et une motivation pour les travaux sur les métriques à huit singularités, détaillés dans le reste du chapitre, et qui présentent une plus grande complexité et des difficultés calculatoires. La description des composantes de l'espace de modules des métriques à huit singularités est faite section 2.4, et leur recollement est étudié section 2.5.

Enfin, le chapitre 3 présente la construction du premier exemple explicite de sous-groupe discret de  $PU(2, 1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger. Les sections 3.1 à 3.3 rappellent les notions théoriques nécessaires pour étudier et reformuler le problème. La construction de l'exemple est effectuée dans les sections 3.4 à 3.6. Les résultats obtenus sont résumés section 3.7.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Les deux thèmes développés dans cette thèse portent chacun sur l'étude de groupes discrets d'isométries en géométrie hyperbolique, réelle dans le cas des espaces de modules au chapitre 2, et complexe au chapitre 3. Ce chapitre décrit les objets et les concepts communs à ces deux thèmes.

On décrit d'abord la construction des espaces hyperboliques réels et complexes, et les bases de la géométrie hyperbolique. On s'attache principalement ici à l'étude des objets communs aux contextes réel et complexe : les objets spécifiques à une géométrie (comme les bissecteurs pour l'espace hyperbolique complexe) seront étudiés dans le chapitre correspondant. La deuxième partie présente les notions de base sur les groupes discrets utilisées dans ces travaux. On présente enfin un outil fondamental pour l'étude des groupes discrets d'isométries : le théorème du polyèdre de Poincaré.

### 1.1 Géométrie hyperbolique

Cette partie décrit en parallèle la construction des espaces hyperboliques réel et complexe. Le livre de J.G. Ratcliffe [Rat06] est la référence principale utilisée pour le cas réel. Pour le cas complexe, on se base sur le livre de W.M. Goldman [Gol99], ainsi que sur la première partie du livre à venir de J.R. Parker [Par].

Dans la suite de cette section,  $\mathbb{K}$  représentera le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $n$  sera un nombre naturel,  $n \geq 1$ .

#### 1.1.1 Espaces hyperboliques

Soit  $q_{\mathbb{R}}$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  de signature  $(n, 1)$  :  $q_{\mathbb{R}}$  est équivalente à la forme quadratique standard

$$q_0(X) = -X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_n^2, \quad \text{pour tout } X = (X_0, X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

L'espace  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de la forme quadratique  $q_{\mathbb{R}}$  est noté  $\mathbb{R}^{n,1}$ . L'espace hyperbolique réel de dimension  $n$ , noté  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , est défini comme l'ensemble des droites négatives de  $\mathbb{R}^{n,1}$  :

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n = \mathbb{P}(\{X \in \mathbb{R}^{n,1} \mid q_{\mathbb{R}}(X) < 0\})$$

où  $\mathbb{P} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  est la projection usuelle sur l'espace projectif réel.  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est muni de la distance  $\rho_{\mathbb{R}}$  suivante, où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  est la forme bilinéaire associée à  $q_{\mathbb{R}}$  : pour tous  $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ ,

de relevés  $X$  et  $Y$  à  $\mathbb{R}^{n,1}$ ,

$$(1.1) \quad \cosh^2(\rho_{\mathbb{R}}(x, y)) = \frac{\langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}}^2}{\langle X, X \rangle_{\mathbb{R}} \langle Y, Y \rangle_{\mathbb{R}}}$$

L'expression de droite ne dépend pas du choix des relevés  $X$  et  $Y$ . Cette distance fait de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  une variété riemannienne complète de courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ .

Soit  $O(q_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) < GL(n+1, \mathbb{R})$  le groupe orthogonal des matrices qui préservent la forme quadratique  $q_{\mathbb{R}}$ . (On le note  $O(n, 1)$  dans le cas de  $q_0$ .) Le groupe des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est le groupe projectif

$$PO(q_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) = O(q_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) / \{\pm I_{n+1}\}$$

L'hyperboloïde défini par  $\{X \in \mathbb{R}^{n,1} \mid q_{\mathbb{R}}(X) = -1\}$  est formé de deux nappes. Le groupe des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est alors aussi isomorphe au sous-groupe  $O^+(q_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ , d'indice 2 dans  $O(q_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ , formé par les isométries qui préservent globalement chaque nappe de l'hyperboloïde. C'est la description qui sera principalement utilisée dans le chapitre 2.

L'espace hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  est défini de façon similaire. Soit  $q_{\mathbb{C}}$  une forme hermitienne de signature  $(n, 1)$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Elle est équivalente à la forme hermitienne standard

$$q_B(X) = -|X_0|^2 + |X_1|^2 + \dots + |X_n|^2, \quad \text{pour tout } X = (X_0, X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

L'espace  $\mathbb{C}^{n+1}$  muni de la forme quadratique  $q_{\mathbb{C}}$  est noté  $\mathbb{C}^{n,1}$ . L'espace hyperbolique complexe de dimension (complexe)  $n$ , noté  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , est défini comme l'ensemble des droites complexes négatives de  $\mathbb{C}^{n,1}$  :

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{P}(\{X \in \mathbb{C}^{n,1} \mid q_{\mathbb{C}}(X) < 0\})$$

où  $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  est la projection complexe usuelle. Il est muni d'une distance, définie de même à partir de la forme hermitienne  $q_{\mathbb{C}}$ . On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  la forme sesquilinéaire associée à  $q_{\mathbb{C}}$ , qui est semi-linéaire à gauche et linéaire à droite. La forme associée à  $q_B$ , par exemple, est donnée par

$$\langle X, Y \rangle_B = -\overline{X_0}Y_0 + \overline{X_1}Y_1 + \dots + \overline{X_n}Y_n, \quad \text{pour tous } X, Y \in \mathbb{C}^{n,1}$$

La distance  $\rho_{\mathbb{C}}$  sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  est donnée par

$$(1.2) \quad \cosh^2\left(\frac{\rho_{\mathbb{C}}(x, y)}{2}\right) = \frac{|\langle X, Y \rangle_{\mathbb{C}}|^2}{\langle X, X \rangle_{\mathbb{C}} \langle Y, Y \rangle_{\mathbb{C}}}$$

pour tous  $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  de relevés  $X, Y \in \mathbb{C}^{n,1}$ . Le facteur  $1/2$  est un facteur de normalisation : muni de cette distance,  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  est une variété riemannienne à courbure holomorphe constante égale à  $-1$ , et sa courbure sectionnelle est pincée entre  $-1$  et  $-1/4$  ([Gol99] section 3.1). Si  $n \geq 2$ , la courbure de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  n'est pas constante. La courbure variable est l'une des différences principales avec l'espace hyperbolique réel, et elle a de nombreuses conséquences, notamment l'absence d'hypersurfaces totalement géodésiques.

Soit  $U(q_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) < GL(n+1, \mathbb{C})$  le groupe unitaire des matrices qui préservent la forme hermitienne  $q_{\mathbb{C}}$ . D'après l'expression de la distance  $\rho_{\mathbb{C}}$ , le groupe unitaire projectif  $PU(q_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$  agit par isométries sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Contrairement au cas réel, ce n'est pas le groupe complet  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$  des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . La conjugaison complexe préserve aussi la distance  $\rho_{\mathbb{C}}$ .

$\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$  est engendré par  $PU(q_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$  et la conjugaison complexe.  $PU(q_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$  est l'ensemble des isométries holomorphes de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  et est d'indice 2 dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$ .

Les deux espaces hyperboliques  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  sont munis naturellement d'un bord à l'infini, donné par l'ensemble des droites nulles de  $\mathbb{K}^{n,1}$  :

$$\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{P}(\{X \in \mathbb{K}^{n,1} \mid q_{\mathbb{K}}(X) = 0\})$$

### 1.1.2 Sous-espaces totalement géodésiques

Dans l'espace hyperbolique réel, les sous-espaces totalement géodésiques sont les images projectives des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{n,1}$  qui admettent des points négatifs pour  $q_{\mathbb{R}}$ . Soit  $V \subset \mathbb{R}^{n,1}$  un sous-espace de dimension  $k+1$  ( $k \leq n$ ), tel que  $V$  intersecte l'ensemble  $\{X \in \mathbb{R}^{n,1} \mid q_{\mathbb{R}}(X) < 0\}$ . De manière équivalente, la forme quadratique  $q_{\mathbb{R}}$  restreinte à  $V$  est de signature  $(k, 1)$ .  $\mathcal{V} = \mathbb{P}(V) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est alors un sous-espace totalement géodésique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  de dimension  $k$ . C'est une copie isométrique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^k$ . Tous les sous-espaces totalement géodésiques sont obtenus de cette façon.  $PO(q_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$  agit transitivement sur l'ensemble des sous-espaces de dimension  $k$  de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ .

Un hyperplan est un sous-espaces totalement géodésiques de dimension  $n-1$ . Soit  $\mathcal{V}$  un hyperplan de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , image projective d'un hyperplan  $V \subset \mathbb{R}^{n,1}$ . L'orthogonal de  $V$  pour  $q_{\mathbb{R}}$  dans  $\mathbb{R}^{n,1}$  est une droite, engendrée par un vecteur  $v$  tel que  $q_{\mathbb{R}}(v) > 0$ .  $v$  est appelé *vecteur polaire* de l'hyperplan  $\mathcal{V}$ . Réciproquement, tout vecteur positif  $v \in \mathbb{R}^{n,1}$  donne, via son orthogonal, un hyperplan de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ .

Une partie des sous-espaces totalement géodésiques de l'espace hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  sont obtenus de façon similaire : pour tout sous-espace complexe  $V \subset \mathbb{C}^{n,1}$  de dimension complexe  $k+1$  ( $k \leq n$ ), si l'image projective  $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  intersecte l'espace hyperbolique complexe, alors l'intersection  $\mathcal{V} = \mathbb{P}(V) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  forme un sous-espace totalement géodésique de dimension complexe  $k$ . C'est une copie de l'espace hyperbolique complexe de dimension  $k$ ,  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^k$ .  $PU(q_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$  agit transitivement sur l'ensemble des sous-espaces totalement géodésiques complexes de dimension  $k$ .

Si  $\mathcal{V}$  est de dimension 1, on l'appelle *droite complexe* de l'espace hyperbolique. Si  $\mathcal{V}$  est de dimension  $n-1$ , on définit comme ci-dessus les vecteurs polaires de  $\mathcal{V}$  comme les vecteurs qui engendrent l'orthogonal de l'hyperplan  $V \subset \mathbb{C}^{n,1}$  associé à  $\mathcal{V}$ .

Cependant, les sous-espaces complexes ne sont pas les seuls sous-espaces totalement géodésiques de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Ils peuvent être vus comme points fixes de sous-groupes des isométries holomorphes de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Un autre type de sous-espaces totalement géodésiques est obtenu en considérant des isométries anti-holomorphes.

L'exemple le plus simple est donné par l'image projective de  $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n,1}$ . C'est l'ensemble des points fixes de la conjugaison complexe dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Tous les autres sont obtenus comme images de ce sous-espace (ou de l'image projective de  $\mathbb{R}^{k+1} \subset \mathbb{C}^{n,1}$ ,  $k \leq n$ ) par  $PU(q_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ . On les appelle les *lagrangiens* de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Les lagrangiens de dimension 1 sont simplement les géodésiques réelles de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ .

Les sous-espaces totalement géodésiques de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  réalisent les extrema de la courbure : les sous-espaces complexes sont de courbure  $-1$ , et les lagrangiens de courbure  $-1/4$  ([Gol99]).

La théorie générale des espaces symétriques permet de montrer que les sous-espaces complexes et les lagrangiens forment l'ensemble des sous-espaces totalement géodésiques

de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  (voir [Gol99] p.82 pour une esquisse de preuve). Les lagrangiens sont de dimension (réelle) maximale  $n$ , et les sous-espaces complexes de dimension complexe maximale  $n - 1$ . En particulier, il n'y a pas d'hypersurface (codimension réelle 1) totalement géodésique dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . C'est une différence fondamentale avec le cas de l'espace hyperbolique réel. Il n'y a par exemple pas de définition canonique de polyèdre dans l'espace hyperbolique complexe : plusieurs types d'hypersurfaces peuvent être utilisés pour border des polyèdres.

Dans la suite de la thèse, l'espace hyperbolique complexe étudié sera essentiellement le plan  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

### 1.1.3 Différents modèles

**Modèle de la boule** Différents modèles existent pour représenter les espaces hyperboliques. Le premier est le *modèle de Beltrami-Klein*, ou *modèle de la boule*. Les formes quadratiques et lorentziennes utilisées pour ce modèle sont les formes standard  $q_0$  (pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ ) et  $q_B$  (pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ). Ce modèle est obtenu en considérant  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  dans la carte affine  $\{X_0 = 1\}$ . En effet, si  $X \in \mathbb{K}^{n+1}$  est un vecteur négatif pour la forme  $q_{\mathbb{K}}$ , il vérifie

$$-|X_0|^2 + \sum_{j=1}^n |X_j|^2 < 0$$

$X_0$  est donc non nul, on peut alors étudier  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  dans la carte affine  $X_0 = 1$ . La trace de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  dans cette carte est donnée par la relation

$$\sum_{j=1}^n |X_j|^2 < 1$$

Le modèle est donc donné par la boule unité de  $\mathbb{K}^n$ . Elle est munie de la distance définie en (1.1) ou (1.2). Le bord à l'infini  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  dans ce modèle est le bord de la boule unité : c'est la sphère de dimension (réelle)  $n - 1$  dans le cas réel, et  $2n - 1$  dans le cas complexe. La topologie considérée sur  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  est la topologie induite par la topologie euclidienne. De même, on peut définir une topologie sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n \cup \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , qui est la topologie induite par la topologie euclidienne sur la boule unité fermée. Ces topologies coïncident avec les définitions plus générales données dans le cadre des espaces Gromov-hyperboliques, voir [BH99], ou section 3.1.2 de ce manuscrit.

Dans le cas de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , les sous-espaces totalement géodésiques de dimension  $k$ ,  $k \leq n$ , dans ce modèle sont les intersections de sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^n$  avec la boule unité. Pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , les sous-espaces totalement géodésiques complexes sont aussi donnés par l'intersection des sous-espaces affines complexes de  $\mathbb{C}^2$  avec la boule unité. En revanche, les lagrangiens ne sont en général pas linéaires dans ce modèle : seuls ceux qui passent par l'origine de la boule sont linéaires.

**Modèle du demi-espace de Poincaré et modèle de Siegel** Le deuxième modèle utilisé est le *modèle du demi-espace de Poincaré* (en réel), ou *modèle de Siegel* (pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ). Ces modèles permettent de voir le bord à l'infini comme le compactifié d'un groupe.

Pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , le modèle du demi-espace de Poincaré est défini comme le demi-espace supérieur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ , muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}$$

Dans ce modèle, le bord à l'infini est  $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ .  $\partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  privé d'un point admet donc une structure euclidienne. Les isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  qui fixent le point à l'infini agissent sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Ce sont des similitudes pour la structure euclidienne de  $\mathbb{R}^{n-1}$  ([Rat06] théorème 4.4.4).

Les sous-espaces totalement géodésiques dans ce modèle sont soit des sous-espaces linéaires verticaux, orthogonaux au bord, soit des hémisphères centrés en des points du bord.

Ce modèle permet de décrire aisément un objet important de la géométrie hyperbolique : les horosphères centrées en un point du bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ . Soit  $p_\infty \in \partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  le point à l'infini. Alors l'horosphère  $S_h$  de hauteur  $h$  centrée en  $p_\infty$  est l'hyperplan horizontal

$$S_h = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = h\}$$

Ces horosphères sont aussi munies d'une structure euclidienne. Les horosphères centrées en  $p \in \partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  sont les images des horosphères centrées en  $p_\infty$  par les isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  envoyant  $p_\infty$  sur  $p$ . Ce sont alors des  $(n-1)$ -sphères tangentes au bord en  $p$ .

Il existe d'autres descriptions, plus générales, des horosphères centrées en un point  $p \in \partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , par exemple comme les lignes de niveau d'une fonction de Busemann ([BH99] p.268) ou encore comme les sous-espaces orthogonaux à toutes les géodésiques issues de  $p$ .

Le modèle de Siegel est l'analogue complexe du demi-espace de Poincaré pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . La forme sesquilinéaire sur  $\mathbb{C}^3$  utilisée dans ce cas est

$$\langle X, Y \rangle_S = \overline{X_0}Y_2 + \overline{X_1}Y_1 + \overline{X_2}Y_0, \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^3$$

On note  $q_S$  la forme hermitienne associée. Si  $X$  est un vecteur négatif pour  $q_S$ , alors

$$2\operatorname{Re}(\overline{X_0}X_2) + |X_1|^2 < 0$$

$X_0$  est donc non nul, et on peut considérer la carte affine  $\{X_0 = 1\}$ . Dans cette carte,  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est donné par l'inégalité

$$2\operatorname{Re}(X_2) + |X_1|^2 < 0$$

Le bord de cet ensemble dans la carte est l'ensemble des points vérifiant  $2\operatorname{Re}(X_2) + |X_1|^2 = 0$ . Il existe cependant un point de  $\partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  qui n'appartient pas à la carte  $\{X_0 = 1\}$  : le point  $[0, 0, 1]$ , donné ici en coordonnées homogènes. C'est le point à l'infini de  $\partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  dans le modèle de Siegel.

Le bord fini du modèle de Siegel peut être muni d'une loi de groupe qui lui donne la structure du groupe de Heisenberg, voir [Gol99] section 4.2, ou [Par].  $\partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  peut donc être vu comme le compactifié du groupe de Heisenberg.

Comme pour le cas réel, le modèle de Siegel permet de définir aisément des horosphères. Notons  $p_\infty$  le point à l'infini de  $\partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  : l'horosphère  $S_h$  centrée de  $p_\infty$  et de hauteur  $h$  est définie par

$$S_h = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 2\operatorname{Re}(x_2) + |x_1|^2 = -2h\}$$

Elle est aussi munie de la structure du groupe de Heisenberg.

Il existe d'autres modèles pour les espaces hyperboliques, comme le modèle de l'hyperboloïde ou le modèle de la boule de Poincaré (pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ ). Ils ne seront pas utilisés dans la suite de ces travaux, on ne les détaille donc pas ici.

### 1.1.4 Classification des isométries

Les isométries (respectivement les isométries holomorphes) de l'espace hyperbolique réel (respectivement complexe) peuvent être réparties en trois classes distinctes, suivant les points fixes de leur action sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n \cup \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  ([Rat06] p.136 pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , [Par] pour  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ). Soit  $A$  une isométrie (holomorphe) de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  :  $A$  est

- *elliptique* si  $A$  admet au moins un point fixe dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ ,
- *parabolique* si  $A$  admet un unique point fixe dans  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ ,
- *loxodromique* si  $A$  admet exactement deux points fixes dans  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ .

Une famille importante d'isométries elliptiques est donnée par les réflexions, par rapport à un hyperplan de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  ou une droite complexe de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . On considère d'abord le cas hyperbolique réel. Soit  $\mathcal{V}$  un hyperplan de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , dont le relevé à  $\mathbb{R}^{n,1}$  est un hyperplan noté  $V$ . Soit  $v$  un vecteur polaire de  $V$ . Dans  $\mathbb{R}^{n,1}$ , la réflexion  $R_v$  par rapport à l'hyperplan  $V$  est définie par

$$R_v : X \mapsto X - 2 \cdot \frac{\langle X, v \rangle_{\mathbb{R}}}{\langle v, v \rangle_{\mathbb{R}}} v$$

C'est bien une isométrie pour  $q_{\mathbb{R}}$ , et l'isométrie qu'elle induit sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est la réflexion par rapport à  $\mathcal{V}$ .  $v$  est aussi appelée la polaire de la réflexion  $v$ .

Dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , l'orthogonal d'une droite complexe est de dimension réelle 2, il n'y a donc pas une unique réflexion par rapport à une droite complexe donnée. Une réflexion agit comme une rotation sur l'orthogonal de la droite complexe. Soit  $\mathcal{V}$  une droite complexe de polaire  $v$ , et soit  $\zeta \in S^1$  un nombre complexe de module 1 :

$$R_{v,\zeta} : X \mapsto X + (\zeta - 1) \cdot \frac{\langle X, v \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle v, v \rangle_{\mathbb{C}}} v$$

est la réflexion par rapport à la droite complexe  $\mathcal{V}$  et d'angle  $\zeta$ . Elle est d'ordre fini si et seulement si son angle est un multiple rationnel de  $\pi$ .  $\mathcal{V}$  est aussi appelé le *miroir* de la réflexion  $R_{v,\zeta}$ .



## 1.2 Groupes discrets et réseaux

Cette thèse est basée sur l'étude de sous-groupes discrets du groupe des isométries de l'espace hyperbolique (réel ou complexe), et entre autres des réseaux de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ . Cette partie détaille le contexte général des sous-groupes discrets et des réseaux dans des groupes de Lie semi-simples, en particulier des réseaux arithmétiques. Le dernier paragraphe est plus géométrique et étudie les réseaux de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  du point de vue des domaines fondamentaux.

### 1.2.1 Réseaux dans des groupes de Lie semi-simples

Soit  $G$  un groupe de Lie localement compact.  $G$  admet une mesure de Radon invariante par l'action du groupe par multiplication à gauche, qui est unique à multiplication par un scalaire positif près ([Kna02] section VIII-2). Cette mesure s'appelle *mesure de Haar* de  $G$ . Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $G$ , la mesure de Haar descend sur le quotient  $G/\Gamma$ .

**Définition 1.2.1.** Un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$  est un réseau si le quotient  $G/\Gamma$  est de mesure finie. Il est cocompact si  $G/\Gamma$  est compact.

*Exemple 1.2.2.*  $\mathbb{Z}^n$  est un réseau cocompact de  $\mathbb{R}^n$ .  $SL(n, \mathbb{Z})$  est un réseau non cocompact de  $SL(n, \mathbb{R})$ .

Le théorème suivant, de Borel et Harish-Chandra, donne une méthode pour construire des réseaux dans des groupes algébriques semi-simples définis sur  $\mathbb{Q}$ . Une algèbre de Lie est *semi-simple* si elle n'admet pas d'idéal non trivial résoluble, et un groupe de Lie est dit semi-simple si son algèbre de Lie est semi-simple. Soit  $G$  un groupe algébrique défini sur  $\mathbb{Q}$  :  $G$  est un sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{C})$  défini par un nombre fini d'équations polynomiales à coefficients rationnels.  $G$  est dit semi-simple si le groupe de Lie  $G(\mathbb{R})$  des points réels de  $G$  est semi-simple (voir [Eme09] pour une définition plus générale).

**Théorème 1.2.3** (Borel, Harish-Chandra, [BHC62] p.519). *Soit  $G$  un groupe algébrique semi-simple défini sur  $\mathbb{Q}$ . Alors  $G(\mathbb{Z})$  est un réseau du groupe de Lie  $G(\mathbb{R})$  :  $G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z})$  est de mesure de Haar finie.*

Il existe de plus des critères caractérisant la cocompacité du réseau  $G(\mathbb{Z})$ , comme le critère de Godement ([BHC62] Théorème 11.6), ou le critère de Mahler (voir par exemple [Ben09]). Tous les réseaux étudiés dans cette thèse sont non cocompacts, on ne s'étend donc pas sur ces critères de cocompacité.

*Exemple 1.2.4.* Considérons la forme quadratique de signature  $(n, 1)$  de la section 1.1 :  $q_0(x_0, \dots, x_n) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ .  $q_0$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ , donc le groupe spécial orthogonal  $SO(n, 1) = SO(q_0)$  est un groupe algébrique défini sur  $\mathbb{Q}$ . Il est semi-simple ([Kna02]), donc  $SO(q_0, \mathbb{Z})$  est un réseau de  $SO(q_0, \mathbb{R})$ .

Appliqué aux groupes non compacts classiques, le théorème de Borel - Harish-Chandra fournit des exemples de réseaux non cocompacts ([WM15], corollaire 5.1.17). Le procédé de *restriction des scalaires* ([Eme09]) permet de construire des exemples cocompacts, en étudiant des groupes définis sur des corps de nombres. Soit  $k$  un corps de nombres, et  $Gal(k)$  l'ensemble des conjugués de Galois de l'extension  $k/\mathbb{Q}$ . On note  $Gal_{\mathbb{R}}(k)$  l'ensemble des morphismes de Galois réels, et  $Gal_{\mathbb{C}}(k)$  l'ensemble des paires de morphismes conjugués. Soit  $G$  un groupe algébrique défini sur  $k$ . Pour tout  $\sigma \in Gal(k)$ , on note  $G^\sigma$  l'image de  $G$

par  $\sigma$ . La restriction des scalaires assure l'existence d'un groupe algébrique  $H$  défini sur  $\mathbb{Q}$ , tel que

$$G(\mathbb{R}) \simeq H(\mathbb{R}) = \prod_{\sigma \in \text{Gal}_{\mathbb{R}}(k)} G^{\sigma}(\mathbb{R}) \times \prod_{\sigma \in \text{Gal}_{\mathbb{C}}(k)} G^{\sigma}(\mathbb{C})$$

et

$$G(\mathcal{O}_k) \simeq H(\mathbb{Z}), \text{ où } \mathcal{O}_k \text{ est l'anneau des entiers de } k.$$

Si  $H$  est semi-simple, alors le théorème de Borel - Harish-Chandra implique que  $H(\mathbb{Z})$  est un réseau de  $H(\mathbb{R})$ . Si tous les facteurs de  $H(\mathbb{R})$  correspondant à des morphismes non triviaux sont compacts, la projection sur le premier facteur  $G(\mathbb{R})$  est à noyau compact.  $G(\mathcal{O}_k)$  est alors un réseau de  $G(\mathbb{R})$ . Si de plus  $H(\mathbb{R})$  admet un facteur compact, alors  $G(\mathcal{O}_k)$  est un réseau cocompact ([Eme09] Proposition 3.20).

Considérons par exemple la forme quadratique  $q(x) = -\sqrt{2}x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ .  $SO(q)$  est défini sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . Notons  $\sigma$  l'unique morphisme de Galois non trivial de  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  : la forme quadratique  $q^{\sigma}$  est définie positive, donc  $SO(q^{\sigma})$  est compact.  $SO(q, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$  est donc un réseau cocompact de  $SO(q, \mathbb{R})$ .

### 1.2.2 Réseaux arithmétiques

Les réseaux  $G(\mathbb{Z}) \subset G(\mathbb{R})$  donnés par le théorème de Borel - Harish-Chandra sont les exemples les plus simples de ce qu'on appelle les *réseaux arithmétiques*. Les réseaux arithmétiques généraux sont obtenus à partir de ces exemples par deux opérations.

Notons d'abord que pour un groupe algébrique linéaire  $G$  défini sur  $\mathbb{Q}$ , l'ensemble  $G(\mathbb{Z})$  dépend du plongement de  $G$  dans  $GL(n, \mathbb{C})$ . Mais étant donnés deux plongements  $\varphi$  et  $\psi$  tels que  $\varphi \cdot \psi^{-1}$  est un  $\mathbb{Q}$ -isomorphisme, les groupes  $\varphi(G)(\mathbb{Z})$  et  $\psi(G)(\mathbb{Z})$  sont *commensurables* ([Eme09] Proposition 3.2), au sens suivant :

**Définition 1.2.5.** Soit  $G$  un groupe. Deux sous-groupes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de  $G$  sont commensurables si l'intersection  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  est d'indice fini dans  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

La notion d'arithméticité doit donc être indépendante de la classe de commensurabilité :

**Définition 1.2.6.** Soit  $G$  un groupe algébrique semi-simple défini sur  $\mathbb{Q}$ , et  $\Gamma$  un réseau du groupe de Lie  $G(\mathbb{R})$ .  $\Gamma$  est un réseau *arithmétique* s'il est commensurable au réseau  $G(\mathbb{Z})$ .

Il est naturel aussi de vouloir considérer le sous-groupe  $SO(q, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$  de l'exemple précédent comme un groupe arithmétique : il faut alors que la définition autorise le passage à l'image par un morphisme surjectif (ici la projection sur le premier facteur du produit) à noyau compact. L'image d'un réseau par un tel morphisme est bien un réseau.

Les réseaux arithmétiques rencontrés dans cette thèse seront tous de la forme de la définition 1.2.6. Pour une définition exacte de l'arithméticité, voir [Eme09] ou [Zim84].

*Exemple 1.2.7.* D'après la section précédente,  $SL(n, \mathbb{Z})$  est un réseau arithmétique de  $SL(n, \mathbb{R})$ , et  $SO(q, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$  est un réseau arithmétique de  $SO(q, \mathbb{R})$ , où  $q$  est la forme quadratique définie par  $q(x) = -\sqrt{2}x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

Noter qu'il existe une classification des réseaux arithmétiques dans les groupes de Lie semi-simples, voir [WM15] section 18.5. Elle est basée sur la classification des  $k$ -formes dans les groupes algébriques classiques, pour tout corps de nombre  $k$ , et sur le fait que tout réseau dans un groupe de Lie semi-simple non localement isomorphe à  $SL(2, \mathbb{R})$  est défini sur un corps de nombres ([Wei62, GR70]).

### 1.2.3 Réseaux non arithmétiques

**Existence de réseaux non arithmétiques** Le théorème de Borel - Harish-Chandra assure que pour tout groupe de Lie semi-simple défini sur  $\mathbb{Q}$ , il existe des réseaux arithmétiques. Il est naturel de chercher s'il existe aussi des réseaux non arithmétiques. Dans la suite, on s'intéresse aux réseaux de groupes d'isométries d'espaces symétriques :  $X$  est un espace symétrique, et  $G = \text{Isom}(X)$ . Les résultats suivants restreignent grandement les espaces dans lesquels il existe des réseaux non arithmétiques.

**Théorème 1.2.8** (Margulis, Corlette, Gromov-Schoen [Mar77, Cor92, GS92]). *Soit  $G$  le groupe d'isométries d'un espace symétrique irréductible  $X$  de type non-compact. Si  $G$  est de rang supérieur ou égal à deux [Mar77], ou si  $X$  est l'espace hyperbolique sur les quaternions ou le plan hyperbolique sur les octonions [Cor92, GS92], alors tout réseau de  $G$  est arithmétique.*

Les seuls espaces pouvant admettre des réseaux non arithmétiques sont donc les espaces hyperboliques réels et complexes,  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  et  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ . En réel, la méthode de Gromov - Piatetski-Shapiro [GPS87] permet de construire une infinité de classes de commensurabilité de réseaux non arithmétiques dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , et ce pour tout  $n \geq 2$ . Dans le cas complexe, en revanche, il n'existe pas de construction en toute dimension. Les constructions existantes ne fournissent qu'un nombre fini d'exemples de réseaux non arithmétiques, en dimension 2 et 3 [Mos80, DM86, Thu98, DPP15].

**Critère de (non) arithméticité** On se place maintenant dans le cadre du groupe des isométries de l'espace hyperbolique réel,  $PO(n, 1)$  (ou  $PO(q)$  pour une forme quadratique  $q$  de signature  $(n, 1)$ ). Soit  $\Gamma$  un réseau de  $PO(n, 1)$ . Soit  $k = \mathbb{Q}(\{\text{Tr}(Ad\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\})$  le corps engendré par les traces des éléments de  $\Gamma$  dans la représentation adjointe de  $PO(n, 1)$ . On rappelle que pour un groupe de Lie matriciel  $G$ , la représentation adjointe est définie par l'action de  $G$  par conjugaison sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  :

$$\forall g \in G, Adg : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, x \mapsto gxg^{-1}$$

Le corps  $k$  est fondamental dans la description du réseau  $\Gamma$ , d'après le résultat suivant, cas particulier de la proposition 12.2.1 de [DM86] :

**Proposition 1.2.9.** *Soit  $\Gamma$  un réseau de  $PO(n, 1)$ , et  $k = \mathbb{Q}(\{\text{Tr}(Ad\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\})$  le corps des traces de  $\Gamma$  dans la représentation adjointe. Alors  $k$  est le corps minimal de définition de  $\Gamma$ , et  $k$  est un invariant de commensurabilité dans  $PO(n, 1)$ .*

Dans certains cas, le corps des traces  $k$  est calculable, et il permet de tester l'arithméticité de  $\Gamma$ . Le critère suivant est un cas particulier du corollaire 12.2.8 de [DM86] (voir [DPP15] pour une version hyperbolique complexe) :

**Théorème 1.2.10** (Critère d'arithméticité). *Soit  $q$  une forme quadratique de signature  $(n, 1)$ , définie sur un corps  $K$  totalement réel, et soit  $\Gamma$  un réseau de  $PO(q, \mathbb{R})$  tel que  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $PO(q, \mathcal{O}_K)$ , où  $\mathcal{O}_K$  est l'anneau des entiers de  $K$ . Alors  $\Gamma$  est arithmétique si et seulement si pour tout plongement  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$  dont la restriction au corps des traces  $k$  n'est pas le plongement identité, la forme quadratique  $q^\sigma$  est définie.*

### 1.2.4 Point de vue géométrique

**Quotients** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe du groupe des isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  ou  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  (noté  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  dans la suite). Le caractère discret de  $\Gamma$  peut se voir sur l'action de  $\Gamma$  sur l'espace hyperbolique :  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$  est discret si et seulement si son action sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  est proprement discontinue ([Rat06] p.164). On rappelle qu'un groupe  $\Gamma$  agit proprement discontinuement sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  si pour tout compact  $C \subset \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , l'ensemble  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(C) \cap C \neq \emptyset\}$  est fini.

Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret sans torsion (i.e. tout élément d'ordre fini est trivial) de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$ , alors le quotient  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n/\Gamma$  est une *variété hyperbolique*, réelle ou complexe. Si  $\Gamma$  admet des éléments de torsion, alors certains points de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  ont un stabilisateur non trivial dans  $\Gamma$ . Ce stabilisateur est fini, donc tout point de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n/\Gamma$  admet un voisinage homéomorphe au quotient de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  par un groupe fini :  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n/\Gamma$  admet donc une structure d'*orbifold hyperbolique* (voir [Thu80] pour une définition plus générale).

$\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  est un espace symétrique de la forme  $G/K$ , où  $G$  est la composante connexe de l'identité de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$  et  $K$  est un sous-groupe compact maximal. Dans la suite, la mesure de Haar  $\mu$  choisie sur  $G$  est construite à partir de la mesure de Haar sur  $K$  de volume total 1, et de la forme volume hyperbolique sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n \sim G/K$ . Pour cette normalisation, on a pour tout sous-groupe discret  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  :  $\mu(G/\Gamma) = \text{vol}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n/\Gamma)$ , où *vol* est le volume hyperbolique.

**Domaines fondamentaux** On décrit dans ce paragraphe des objets géométriques importants associés aux groupes discrets d'isométries : les domaines fondamentaux. De nombreuses propriétés des groupes sont en correspondance directe avec les propriétés d'un domaine fondamental.

**Définition 1.2.11.** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$ , et  $\mathcal{D}$  un ouvert connexe de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ .  $\mathcal{D}$  est un *domaine fondamental* pour  $\Gamma$  si  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  est pavé par les copies de  $\mathcal{D}$  sous  $\Gamma$  :

- $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{\mathcal{D}})$ ,
- si  $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$  alors  $\mathcal{D} \cap \gamma(\mathcal{D}) = \emptyset$ .

$\mathcal{D}$  est dit *localement fini* si tout point  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  admet un voisinage  $U$  tel que l'ensemble  $\{\gamma \in \Gamma \mid U \cap \gamma(\overline{\mathcal{D}}) \neq \emptyset\}$  est fini.

Dans la suite, on utilisera parfois le terme *domaine fondamental* pour un ensemble  $\mathcal{E}$  tel que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{D}}$ .

**Théorème 1.2.12** ([Rat06] p.238). *Soit  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , et  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental localement fini pour  $\Gamma$ . Alors le quotient  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n/\Gamma$  est isométrique à  $\overline{\mathcal{D}}/\Gamma$ .*

Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ , et  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental pour  $\Gamma$  tel que son bord  $\partial\mathcal{D}$  est de mesure 0. Alors  $\Gamma$  est de covolume fini si et seulement si  $\mathcal{D}$  est de volume fini, et dans ce cas, le covolume de  $\Gamma$  est égal au volume de  $\mathcal{D}$ . De même,  $\Gamma$  est cocompact si et seulement si  $\overline{\mathcal{D}}$  est compact. Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut de plus en déduire une partie génératrice pour  $\Gamma$  :  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\overline{\mathcal{D}}) \cap \overline{\mathcal{D}} \neq \emptyset\}$ . La section suivante, sur le théorème de Poincaré, montre que sous certaines conditions, on peut aussi déduire une présentation de  $\Gamma$  à partir d'un domaine fondamental.

Un groupe discret  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$  admet toujours un domaine fondamental localement fini. Un exemple de tel domaine fondamental est donné par les *domaines de Dirichlet*. Pour tout  $p_0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  et  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma$  n'appartient pas au stabilisateur de  $p_0$ , on définit

$$H_{\gamma}^{-}(p_0) = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n \mid d(x, p_0) \leq d(x, \gamma(p_0))\}$$

$H_{\gamma}^{-}(p_0)$  est un demi-espace de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , bordé par l'hypersurface médiatrice entre  $p_0$  et  $\gamma(p_0)$  :

$$H_{\gamma}(p_0) = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n \mid d(x, p_0) = d(x, \gamma(p_0))\}$$

Dans le cas de l'espace hyperbolique réel,  $H_{\gamma}(p_0)$  est un hyperplan, totalement géodésique. Dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $H_{\gamma}(p_0)$  est un *bissecteur*. Les bissecteurs seront étudiés plus en détail section 3.3.1.1. Ils ne sont pas totalement géodésiques d'après la section 1.1.2, mais on verra qu'ils admettent un feuilletage par des sous-espaces totalement géodésiques. Tous les polyèdres de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  considérés dans cette thèse seront bordés par des bissecteurs.

**Définition 1.2.13.** Soit  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$  discret, et  $p_0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  de stabilisateur trivial dans  $\Gamma$ . Le domaine de Dirichlet pour  $\Gamma$  centré en  $p_0$  est défini par

$$D_{\Gamma}(p_0) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}} H_{\gamma}^{-}(p_0)$$

Un *domaine de Dirichlet partiel* pour  $\Gamma$  est un ensemble de la forme

$$\bigcap_{\gamma \in S} H_{\gamma}^{-}(p_0)$$

où  $S$  est un sous-ensemble fini de  $\Gamma \setminus \{id\}$ .

**Théorème 1.2.14** ([Rat06] p.244). *Soit  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$  discret, et  $p_0 \in \mathbb{H}^n$  de stabilisateur trivial dans  $\Gamma$ . Alors le domaine de Dirichlet de  $\Gamma$  centré en  $p_0$ ,  $D_{\Gamma}(p_0)$ , est un domaine fondamental localement fini pour  $\Gamma$ .*

Etant donné un sous-groupe  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n)$  dont on veut déterminer le caractère discret, la construction d'un domaine de Dirichlet (ou d'un domaine de Dirichlet partiel), peut être une stratégie naturelle. Sa mise en pratique est fortement liée au théorème de Poincaré, décrit dans la section suivante.

### 1.3 Le théorème de Poincaré

Le théorème de Poincaré est un outil fondamental pour l'étude des groupes discrets d'isométries des espaces hyperboliques réels ou complexes, ainsi que des espaces de courbure constante euclidien et sphérique. Le problème étudié est le suivant : étant donné un polyèdre  $\mathcal{P}$  muni d'isométries identifiant les faces de  $\mathcal{P}$  deux à deux (elles seront définies précisément dans la suite sous le terme *identifications de faces*), est-ce que l'ensemble des copies de  $\mathcal{P}$  recollées suivant ces données pave l'espace ? En d'autres termes, est-ce que le groupe  $\Gamma$  engendré par les identifications de faces est discret, et admet  $\mathcal{P}$  pour domaine fondamental ? Le théorème de Poincaré donne une liste d'hypothèses sur le polyèdre et les identifications de faces pour laquelle la réponse au problème est positive. Dans ce cas, il fournit aussi une présentation du groupe  $\Gamma$ .

La littérature sur le théorème de Poincaré dans le cas de courbure constante est abondante. La référence principale utilisée ici est l'article récapitulatif d'Epstein et Petronio [EP94]. On y trouve entre autres une présentation des versions du théorème dans la littérature, avec leurs restrictions et, le cas échéant, les erreurs présentes. Pour le cas de l'espace hyperbolique complexe, on se réfère principalement à l'article de Mostow [Mos80], en faisant attention au fait qu'il ne traite pas le problème des points à l'infini et de la complétude du quotient. Une autre référence à venir dans le cas complexe est le livre de J. Parker [Par]. En attendant, on trouve une version détaillée de l'énoncé du théorème dans l'article de Deraux, Parker et Paupert [DPP15], mais dans un contexte plus compliqué (le polyèdre est un domaine fondamental pour les classes d'un sous-groupe non trivial) et avec une version de la complétude différente de celle qui nous intéresse ici.

Dans toute la suite,  $X$  représente un des espaces suivants :  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  ou  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ .

**Polytopes** On considère dans ces travaux des CW-complexes ([Whi49]) finis, admettant une unique cellule de dimension maximale (égale à la dimension réelle de  $X$ ) dont l'adhérence est tout le CW-complexe. Ils sont de plus supposés réguliers : les applications de recollement sont des homéomorphismes sur leur image. Par conséquent, pour chaque  $k$ -facette  $F$  du complexe ( $k \geq 2$ ), les facettes de codimension 2 de  $F$  sont sur exactement 2 facette de codimension 1 (voir [CF67]). Un polytope  $\mathcal{P} \subset X$  est alors défini comme le plongement dans  $X$  d'un tel CW-complexe de manière lisse par morceaux, voir par exemple la définition de "polytope différentiable" dans [AW43] p.121. En pratique, les polytopes considérés dans cette thèse seront bordés par des hyperplans dans le cas de l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , et par des bissecteurs (voir section 3.3.1.1) dans l'espace hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Dans la suite, on appellera "faces" d'un polytope les facettes de codimension 1, et "arêtes" les facettes de codimension 2. L'hypothèse de régularité sur les polytopes assure que chaque arête est l'intersection d'exactly deux faces.

*Remarque 1.3.1.* Le théorème de Poincaré peut être appliqué à un ou plusieurs polytopes. Les deux cas diffèrent relativement peu. Dans cette section, pour la simplicité des notations, on ne traitera que le cas d'un seul polytope. Le cas d'une famille de polytopes sera vu de manière plus détaillée section 2.2.2.

**Identifications de faces** Soit  $\mathcal{P}$  un polytope de  $X$ , et soit  $\mathcal{F}(\mathcal{P})$  l'ensemble des faces de  $\mathcal{P}$ . Un *système d'identifications de faces* pour  $\mathcal{P}$  est la donnée d'une application  $\mathcal{F}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Isom}(X)$ ,  $F \mapsto \gamma_F$ , vérifiant les propriétés suivantes :

- pour toute face  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ ,  $\gamma_F(F)$  est un élément de  $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ , et  $\gamma_F|_F : F \rightarrow \gamma_F(F)$  préserve la structure de CW-complexe,
- si  $F^- = \gamma_F(F)$ , alors  $\gamma_{F^-} = \gamma_F^{-1}$ . Cette relation est appelée *relation de paire*. En particulier, si  $F^- = F$ , alors  $\gamma_F$  est une involution :  $\gamma_F^2 = id$ .
- pour toute face  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ ,  $\gamma_F$  envoie  $\mathcal{P}$  sur l'extérieur de  $\mathcal{P}$  :  $\gamma_F(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = \gamma_F(F)$  et  $\gamma_F(\overset{\circ}{\mathcal{P}}) \cap \overset{\circ}{\mathcal{P}} = \emptyset$ .

**Cycles d'arêtes** Soit  $e_1$  une arête de  $\mathcal{P}$ . D'après l'hypothèse de régularité,  $e_1$  est exactement l'intersection de deux faces  $F_1$  et  $F'_1$  de  $\mathcal{P}$ . Soit  $\gamma_1$  l'identification de face associée à  $F'_1$ , et  $F_2$  l'image de  $F'_1$  par  $\gamma_1$  :  $F_2$  est une face de  $\mathcal{P}$ , et l'image par  $\gamma_1$  de l'arête  $e_1$  est une arête  $e_2$  de  $\mathcal{P}$  sur  $F_2$ . En particulier, il existe une face  $F'_2$  de  $\mathcal{P}$  telle que  $e_2 = F_2 \cap F'_2$ . On répète le processus avec  $F'_2$  : l'identification de faces  $\gamma_2$  associée à  $F'_2$  envoie  $F'_2$  sur une face  $F_3$  de  $\mathcal{P}$ ,  $e_2$  sur une arête  $e_3 \subset F_3$  et il existe une face  $F'_3$  de  $\mathcal{P}$  telle que  $e_3 = F_3 \cap F'_3$ . On continue de même jusqu'à retomber sur l'arête  $e_1 = F_1 \cap F'_1$  de départ :  $\mathcal{P}$  admet un nombre fini de faces, donc il existe un entier  $m$  tel que  $e_{m+1} = e_1$ , et  $F_{m+1} = F_1$  :

$$F_1 \cap F'_1 \xrightarrow{\gamma_1} F_2 \cap F'_2 \xrightarrow{\gamma_2} \dots \xrightarrow{\gamma_m} F_1 \cap F'_1$$

C'est le cycle d'arêtes de  $e_1$ . La première condition de cycle d'arêtes est qu'il existe un tel entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que l'isométrie  $\gamma_m \circ \dots \circ \gamma_1$  est l'identité sur l'arête  $e_1$ . Si la condition est vérifiée, on choisit  $m$  minimal avec cette propriété :  $t_{e_1} = \gamma_m \circ \dots \circ \gamma_1$  est appelée la *transformation de cycle* associée à  $e_1$ . On demande de plus que la transformation de cycle soit d'ordre fini : il existe  $s > 0$  tel que  $(t_{e_1})^s = id$ . Cette relation est la *relation de cycle* associée à l'arête  $e_1$ .

Noter que la transformation de cycle associée à toute arête  $e_j$  apparaissant dans le cycle de l'arête  $e_1$  est simplement obtenue de  $t_{e_1}$  par permutation cyclique des facteurs.

L'objectif est d'obtenir un pavage de  $X$  par les copies de  $\mathcal{P}$  recollées suivant les identifications de faces. Une condition nécessaire est alors que pour chaque arête  $e \subset \mathcal{P}$ , un voisinage de  $e$  soit pavé par les copies de  $\mathcal{P}$  qui apparaissent le long des  $s$  itérations du cycle d'arête de  $e$ , où  $s$  est l'ordre de la transformation de cycle  $t_e$ . Soit donc  $e_1$  une arête de  $\mathcal{P}$  comme précédemment, de transformation de cycle  $t_{e_1}$  d'ordre  $s$ . En reprenant les notations de [DPP15], soit  $\mathcal{C}(e_1)$  l'ensemble des suffixes du mot  $(t_{e_1})^s$  en les identifications de faces  $\gamma_i$  :  $\mathcal{C}(e_1) = \{\gamma_i \circ \dots \circ \gamma_1 \circ (t_{e_1})^j \mid 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq s-1\}$ . La seconde condition de cycle est alors donnée par :

- $e_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}(e_1)} C^{-1}(\mathcal{P})$ ,
- les intérieurs des copies de  $\mathcal{P}$  sont disjoints : pour tous  $C, C' \in \mathcal{C}(e_1)$  distincts,  $C^{-1}(\overset{\circ}{\mathcal{P}}) \cap C'^{-1}(\overset{\circ}{\mathcal{P}}) = \emptyset$ ,
- un voisinage de l'arête est pavé par les  $C^{-1}(\mathcal{P})$  : pour tout  $x$  dans l'intérieur relatif de  $e_1$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $V$  est inclus dans  $\bigcup_{C \in \mathcal{C}(e_1)} C^{-1}(\mathcal{P})$ .

Ces conditions sont illustrées Figure 1.1.

**Complétude** On reprend dans cette section certaines notations de l'article [EP94]. Soit  $\Gamma$  le sous-groupe de  $Isom(X)$  engendré par les identifications de faces  $\gamma_F$ ,  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ , et soit  $G$  le groupe abstrait engendré par les  $\gamma_F$  et vérifiant les relations de paires et les relations de cycles. Il existe un morphisme surjectif naturel  $\varphi$  de  $G$  sur  $\Gamma$ .

Soit  $Z$  l'espace obtenu en recollant de manière disjointe les images de  $\mathcal{P}$  par les éléments de  $G$ , suivant les identifications de faces.  $Z$  est obtenu en quotientant le produit  $G \times \mathcal{P}$  par

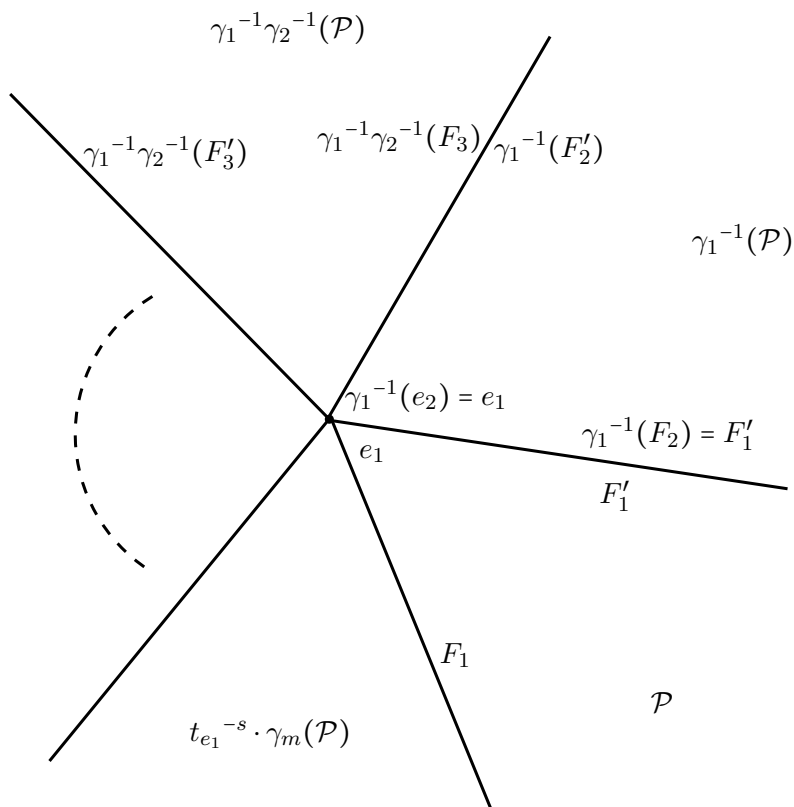


FIGURE 1.1 – Copies de  $\mathcal{P}$  recollées autour de l'arête  $e_1$  suivant les itérations du cycle d'arête (vue transverse à l'arête  $e_1$ ).

la relation d'équivalence engendrée par les

$$(g, x) \sim (g \cdot \gamma_F^{-1}, \gamma_F(x))$$

pour tout  $g \in G$ ,  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$  et  $x \in F$ , voir Figure 1.2.  $G$  est muni de la topologie discrète,  $G \times \mathcal{P}$  de la topologie produit, et  $Z$  de la topologie quotient.

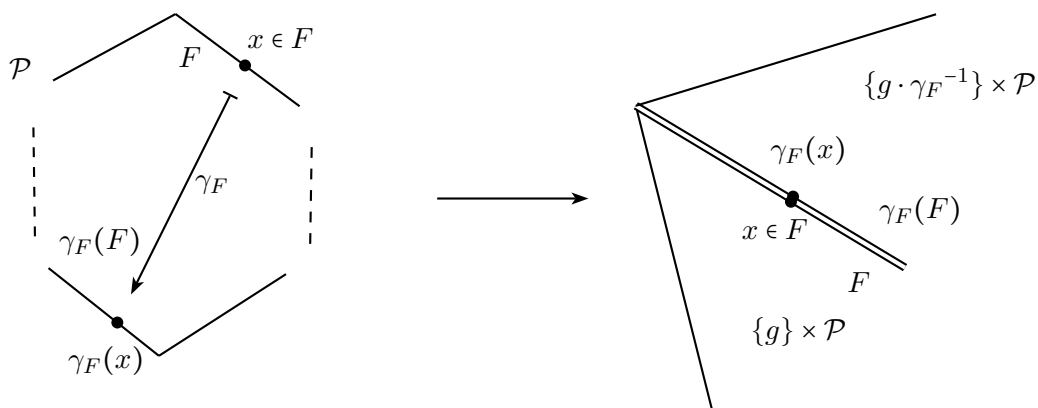


FIGURE 1.2 – Recollement le long des faces par les identifications de faces.

$Z$  admet une application développante naturelle :

$$D_Z : \begin{array}{ccc} Z & \rightarrow & X \\ [(g, x)] & \mapsto & \varphi(g)(x) \end{array}$$



où  $[(g, x)]$  est la classe de  $(g, x)$  dans  $Z$ , pour tout  $g \in G$  et  $x \in \mathcal{P}$ . Le but du théorème de Poincaré est de montrer, entre autres, que  $D_Z$  est une isométrie globale.

Le théorème de Poincaré se prouve par récurrence sur la dimension de l'espace  $X$ , voir par exemple [EP94]. Le résultat en dimension 2 est obtenu directement à partir des conditions de cycle. En dimension supérieure, on considère pour chaque facette  $E \subset \mathcal{P}$  de codimension  $i$ , le cycle de  $E$  dans  $\mathcal{P}$  sous les identifications de faces (i.e. l'ensemble des facettes obtenues à partir de  $E$  par une suite finie d'identifications de faces). Chacune de ces facettes admet un link dans  $\mathcal{P}$  (voir définition 2.2.4), qui est un polytope de  $S^{n-1}$ . Les identifications de faces pour  $\mathcal{P}$  permettent de définir des identifications de faces entre ces links. Les conditions de cycles vérifiées par  $\mathcal{P}$  se traduisent par des conditions de cycles sur ces polytopes de  $S^{n-1}$ . Le théorème de Poincaré pour  $X = S^{n-1}$ , vrai d'après l'hypothèse de récurrence, assure que le développement de ces links sur  $S^{n-1}$  est une isométrie. Ceci permet alors de montrer que l'application développante  $D_Z : Z \rightarrow X$  est une isométrie locale.

Si  $Z$  est complet, on peut alors en déduire (voir par exemple [BH99] p.43) que  $D_Z$  est un revêtement, et donc, puisque  $X$  est simplement connexe, que  $D_Z$  est une isométrie globale. Ceci prouve le théorème de Poincaré en dimension  $n$ .

En revanche, si  $Z$  n'est pas complet, il peut y avoir une obstruction à la conclusion du théorème de Poincaré. L'exemple le plus simple d'un tel comportement est le suivant : dans le modèle du demi-plan de Poincaré, soit  $\mathcal{P}$  le polyèdre délimité par deux géodésiques verticales d'abscisses 1 et 2, voir Figure 1.3.  $\mathcal{P}$  est muni de l'identification de faces  $\gamma : z \rightarrow 2z$ , qui identifie les deux faces de  $\mathcal{P}$ . Les copies de  $\mathcal{P}$  sous le groupe  $\Gamma = \langle \gamma \rangle$  pavent seulement la moitié d'abscisse positive du demi-plan. L'espace  $Z$  n'est pas complet : le chemin horizontal, tracé Figure 1.3, est de longueur finie dans  $Z$ , mais n'admet pas de limite dans  $Z$ .

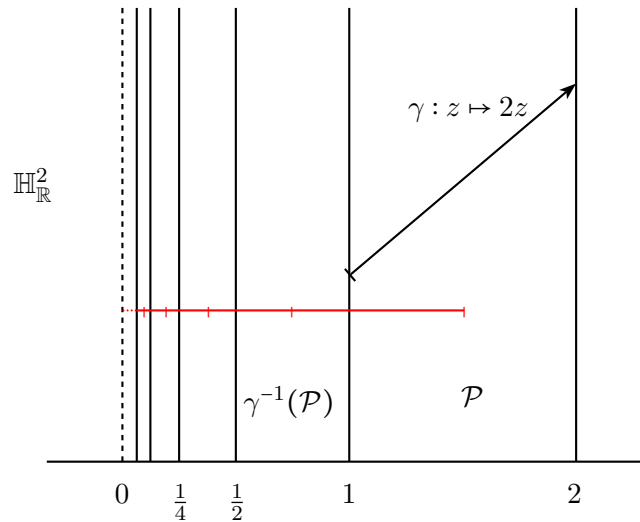


FIGURE 1.3 – L'espace  $Z$  n'est pas complet, et  $\mathcal{P}$  n'est pas un domaine fondamental pour le groupe  $\langle \gamma \rangle$ .

La complétude de  $Z$  est donc une condition nécessaire pour obtenir un pavage de  $X$  par les copies de  $\mathcal{P}$ .

**Enoncé du théorème** Le théorème de Poincaré s'énonce alors comme suit :

**Théorème 1.3.2** (Théorème du polyèdre de Poincaré). *Soit  $\mathcal{P}$  un polytope de  $X$  muni d'un système d'identifications de faces  $\{\gamma_F \mid F \in \mathcal{F}(\mathcal{P})\}$ . On suppose que ces identifications de faces vérifient toutes les conditions de cycles, et que l'espace  $Z$  défini précédemment est complet. Alors :*

- *l'application développante  $D_Z : Z \rightarrow X$  est une isométrie,*
- *le groupe  $\Gamma$  engendré par les identifications de faces est discret, et  $\mathcal{P}$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma$ ,*
- *un système de relations pour  $\Gamma$  est donné par l'ensemble des relations de paire  $\gamma_F \cdot \gamma_{F^-} = \text{id}$  pour tout  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$  et  $F^- = \gamma_F(F)$ , et des relations de cycle  $(t_e)^s = \text{id}$  pour toute arête  $e$  de  $\mathcal{P}$ .*

**Vérification des hypothèses** Lorsque  $X$  est l'espace hyperbolique réel ou complexe, la complétude de l'espace  $Z$  est liée aux points à l'infini du polytope  $\mathcal{P}$  et à leurs stabilisateurs. Si  $\mathcal{P}$  est compact dans  $\mathbb{H}^n$ , alors  $Z$  est automatiquement complet (voir par exemple le paragraphe 3.3.2.3, ou [EP94]). Si  $\mathcal{P}$  admet des points à l'infini, l'existence de stabilisateurs loxodromiques peut mener à des comportements pathologiques comme Figure 1.3.

Dans la suite de la thèse, les polytopes considérés seront non compacts. On peut distinguer deux familles de polytopes, suivant le type de points à l'infini. Dans le chapitre 2, les polyèdres sont hyperboliques réels et n'admettent que des sommets idéaux (voir définition 2.2.6). La complétude de  $Z$  se voit sur la parabolicité des stabilisateurs de ces sommets idéaux, comme décrit section 2.2.2. Dans le chapitre 3, les polyèdres étudiés sont dans l'espace hyperbolique complexe, et ils n'admettent que des points à l'infini de stabilisateur fini. La complétude de  $Z$  dans ce cas peut être montrée directement, voir section 3.3.2.

Les autres hypothèses du théorème de Poincaré, en particulier la condition de pavage autour des arêtes, se vérifient aussi différemment suivant qu'on se trouve dans le cadre hyperbolique réel ou complexe. Ces vérifications seront détaillées dans les sections correspondantes.

**Utilisation du théorème de Poincaré dans cette thèse** Le théorème de Poincaré est l'un des outils principaux utilisés dans ces travaux. Dans le chapitre 2, l'étude des espaces de modules de métriques sur la sphère fournit des polyèdres hyperboliques réels munis d'identifications de faces naturelles, auxquels on peut appliquer directement le théorème de Poincaré, après vérification des hypothèses.

Le théorème peut aussi être utilisé pour détecter la discrétude (ou non) d'un groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , en se basant sur la construction d'un domaine de Dirichlet partiel (cf. définition 1.2.13). C'est la procédure qui est décrite par Riley dans [Ril83], que l'on appellera dans la suite *procédure de Riley*. Elle sera détaillée section 2.5.4.1. Le point de départ de la procédure est un ensemble de générateurs  $S$  fini de  $\Gamma$ , fermé pour l'inverse, et d'un centre  $p$ . Le domaine de Dirichlet partiel  $\mathcal{D}_S = \bigcap_{\gamma \in S} H_{\gamma}^-(p)$  a des identifications de faces potentielles : pour tout  $\gamma \in S$ ,  $\gamma(H_{\gamma^{-1}}(p)) = H_{\gamma}$ , et  $\gamma(H_{\gamma^{-1}}(p)) \cap H_{\gamma}^- = H_{\gamma}$ . En revanche, rien ne garantit que l'image d'une arête de  $\mathcal{D}_S$  par  $\gamma$  soit à encore une arête. Si ce n'est pas le cas, il y a une face naturelle à ajouter (qui correspond à un nouveau générateur ajouté à  $S$ ). On essaie alors de construire pas à pas un domaine fondamental de Dirichlet pour  $\Gamma$ , et les hypothèses du théorème de Poincaré permettent de tester le polyèdre obtenu à chaque étape.

Si le groupe  $\Gamma$  est discret, on espère que la procédure se stabilise rapidement et donne un domaine fondamental pour  $\Gamma$ . Au chapitre 3, c'est ce qui nous donne le polyèdre candidat

pour être un domaine fondamental pour le groupe  $\Gamma$  dont on étudie l'ensemble limite.

Dans la section 2.5, on utilise cette procédure pour tester la discrétude du groupe obtenu après recollement des composantes de l'espace de modules. La procédure ne se stabilise pas et les domaines de Dirichlet partiels obtenus sont de plus en plus petits, ce qui indique que le groupe n'est probablement pas discret. On peut alors chercher (par exemple) un élément d'ordre infini pour prouver la non discrétude du groupe.



## Chapitre 2

# Uniformisation hyperbolique d’espaces de modules

Ce chapitre a pour objectif d’étudier une structure hyperbolique réelle sur les espaces de modules de métriques plates symétriques à singularités coniques sur la sphère. On s’intéresse aux métriques à six et huit singularités d’angles égaux.

La section 2.1 présente les définitions et propriétés de base des métriques plates symétriques sur la sphère. Les outils généraux de géométrie hyperbolique réelle utilisés dans ce chapitre sont rappelés section 2.2. L’étude des métriques symétriques à 6 singularités d’angles égaux est effectuée section 2.3 : on retrouve bien les résultats de [ACT07]. Les deux dernières sections sont consacrées à l’étude des métriques à 8 singularités : la section 2.4 décrit explicitement les différentes composantes de l’espace de modules, et le recollement des composantes est évoqué section 2.5.

### 2.1 Métriques symétriques sur $\mathbb{S}^2$

#### 2.1.1 Généralités sur les métriques plates sur $\mathbb{S}^2$

La notion principale de ce chapitre est celle de métrique plate à singularités coniques sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  :

**Définition 2.1.1.** Un espace métrique  $(M, d)$  est une *métrique plate sur  $\mathbb{S}^2$  à  $n$  singularités coniques d’angles  $\theta_1, \dots, \theta_n$ ,  $\theta_k \in ]0, 2\pi[$* , si  $M$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$  et s’il existe  $n$  points distincts  $x_1, \dots, x_n \in M$  tels que :

- $M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  est localement isométrique au plan  $\mathbb{R}^2$  muni de sa structure euclidienne :  $M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  admet un atlas d’isométries vers  $\mathbb{R}^2$ , tel que les applications de changement de cartes soient des isométries positives de  $\mathbb{R}^2$ ,
- chaque singularité  $x_k$  admet un voisinage centré en  $x_k$  isométrique à un cône euclidien de sommet  $x_k$  et d’angle  $\theta_k$ , obtenu en recollant les bords d’un secteur angulaire d’angle  $\theta_k$  (voir Figure 2.1).

Les cartes locales en les singularités (qui développent un voisinage de la singularité sur un secteur angulaire) dépendent de la géodésique utilisée pour le développement. On les appellera dans la suite “cartes coniques”.

La formule de Gauss-Bonnet appliquée à une métrique plate sur la sphère implique la

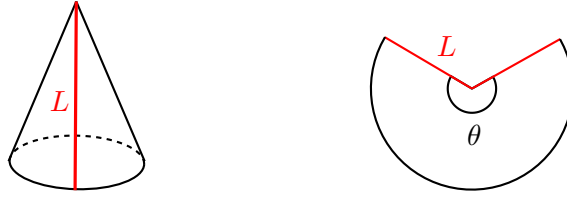


FIGURE 2.1 – L’ouverture du cône suivant la géodésique  $L$  donne un secteur angulaire d’angle  $\theta$ .

relation suivante sur les angles  $\theta_k$  :

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^n (2\pi - \theta_k) = 2\chi(\mathbb{S}^2) = 4\pi$$

En particulier, puisque les  $\theta_k$  sont tels que  $0 < \theta_k < 2\pi$ , la formule de Gauss-Bonnet implique que les singularités sont au moins au nombre de 3.

Les polyèdres convexes de  $\mathbb{R}^3$  sont des exemples de métriques plates sur la sphère : les singularités sont les sommets du polyèdre, et l’angle conique en une singularité est donné par la somme des angles des faces incidentes au sommet. Le théorème d’Alexandrov [Ale05] montre que ce sont en fait les seuls exemples de métriques plates sur  $\mathbb{S}^2$  :

**Théorème 2.1.2** ([Ale05] Théorème 1\* p.103). *Soit  $(M, d)$  une métrique plate singulière sur la sphère, telle que tous les angles coniques appartiennent à l’intervalle  $]0, 2\pi[$ . Alors il existe un polyèdre fermé convexe  $P \subset \mathbb{R}^3$  qui est isométrique à  $(M, d)$ , et ce polyèdre est unique à isométrie près.*

Dans ce théorème, les polyèdres peuvent être dégénérés et inclus dans un plan : ce sont alors deux copies isométriques d’un polygone, recollées le long de leur bord. C’est via cette construction que l’on peut interpréter les espaces de modules de polygones de [BG92] et de la section 1 de [Thu98] comme des espaces de modules de polyèdres “plats”.

### 2.1.2 Métriques symétriques

Au début de son article [Thu98], Thurston décrit l’espace de modules des métriques plates sur  $\mathbb{S}^2$  à 6 singularités marquées de même angle particulières : elles sont obtenues en recollant deux copies d’un hexagone euclidien le long de leur bord. Etudier ces métriques du point de vue des hexagones permet de paramétrer facilement l’espace de modules des métriques, voir section 2.3.2.1. Cet espace de modules admet une uniformisation hyperbolique *réelle* : c’est le quotient par un réseau de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  privé d’une famille d’hyperplans. La complétion métrique de cette structure hyperbolique réelle donne un orbifold hyperbolique de dimension 3. Les métriques étudiées par Thurston admettent une isométrie involutive naturelle : la symétrie qui échange les deux copies de l’hexagone. C’est cette condition de symétrie qui permet d’obtenir une structure réelle, et non plus complexe, sur l’espace de modules.

Dans [ACT07], Allcock, Carlson et Toledo étudient des sextiques à coefficients réels, dont les racines sont invariantes par la conjugaison complexe. Dans le cas des métriques, on voudrait de même étudier les métriques invariantes par une isométrie involutive pour obtenir une structure réelle sur l’espace de modules. Ceci nécessite de généraliser l’exemple

de Thurston pour obtenir une classe plus large de métriques, que l'on nommera *métriques symétriques sur  $\mathbb{S}^2$* .

**Définition 2.1.3.** Une métrique plate  $(M, d)$  sur  $\mathbb{S}^2$  est dite *symétrique* s'il existe une isométrie involutive  $\sigma : M \rightarrow M$  qui renverse l'orientation et admet un "cercle" de points fixes (i.e. une courbe de Jordan), appelé *équateur*. Une telle métrique est notée  $(M, d, \sigma)$ .

Deux métriques symétriques  $(M, d, \sigma)$  et  $(M', d', \sigma')$  sont *équivalentes* s'il existe une homothétie  $f : M \rightarrow M'$  qui préserve les symétries : il existe  $c > 0$  tel que pour tous  $x, y \in M$ ,  $d'(f(x), f(y)) = c \cdot d(x, y)$ , et  $f \circ \sigma = \sigma' \circ f$ . Les singularités ne sont pas marquées : l'homothétie  $f$  ne préserve pas forcément la numérotation des singularités.

*Remarque 2.1.4.* 1. Si une métrique  $(M, d)$  admet deux symétries  $\sigma$  et  $\sigma'$  différentes,  $(M, d, \sigma)$  et  $(M, d, \sigma')$  ne sont pas forcément équivalentes en tant que métriques symétriques. Considérer par exemple un cube euclidien posé sur un plan horizontal : la symétrie par rapport à un plan médian horizontal, et une symétrie par rapport à un plan diagonal, ne donnent pas des métriques symétriques équivalentes.

2. Dans le plan euclidien, les seules isométries involutives qui renversent l'orientation sont les réflexions par rapport à un axe. Le comportement de la symétrie  $\sigma$  dans les cartes assure alors que l'ensemble des points fixes de  $\sigma$  est exactement l'équateur.

Le but de ce chapitre est donc d'étudier les espaces de modules de métriques symétriques sur  $\mathbb{S}^2$  avec des singularités coniques d'angles égaux en adaptant la méthode décrite par Thurston : le paramétrage de ces espaces est basé sur l'étude des formes de polygones. La première étape est l'étude des métriques symétriques à 6 singularités, pour retrouver les résultats de [ACT07]. On étudie ensuite les métriques à 8 singularités : on précise les résultats de la thèse de Chu [Chu06], et on considère plus en détail l'obstruction au recollement des différentes composantes de l'espace de modules.

### 2.1.3 Quelques propriétés des métriques symétriques

Soit  $(M, d, \sigma)$  une métrique symétrique sur  $\mathbb{S}^2$  à  $n$  singularités coniques, notées  $x_1, \dots, x_n$ , d'angles respectifs  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . D'après la formule de Gauss-Bonnet (2.1),  $\sum_{i=1}^n (2\pi - \theta_i) = 4\pi$ . Notons  $\mathcal{C}$  le cercle de points fixes de  $\sigma$ . Puisque  $\sigma$  est une isométrie de  $(M, d)$ , elle préserve l'ensemble des singularités  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ . De plus,  $\sigma$  est involutive, donc pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

- soit  $x_i$  est un point fixe de  $\sigma$ , donc  $x_i$  appartient à l'équateur  $\mathcal{C}$  par définition. La singularité  $x_i$  est dite *équatoriale* dans ce cas.
- soit il existe  $j \neq i$  tel que  $\sigma$  échange  $x_i$  et  $x_j$ . On dit alors que  $x_i$  et  $x_j$  sont conjuguées par  $\sigma$ .

Noter que deux singularités conjuguées par  $\sigma$  sont forcément de même angle.

Les métriques plates symétriques ont certaines propriétés géométriques qui nous seront utiles dans la suite. On commence par la propriété générale d'existence de géodésiques dans les métriques plates  $(M, d)$ . Un *segment géodésique* (ou *géodésique*) dans un espace métrique est un chemin continu de domaine compact, paramétré par longueur d'arc, et qui minimise localement la distance.  $(M, d)$  est un espace métrique compact, donc un résultat classique de Menger ([Men30] p.492) implique l'existence d'un plus court chemin entre toute paire de points de l'espace. Ce chemin est alors un segment géodésique. Il est obtenu comme limite d'une suite minimisante de chemins continus entre les deux points. Dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la métrique euclidienne, un chemin qui minimise la distance localement est un segment, donc l'image dans les cartes non coniques d'une géodésique de  $(M, d)$  est un

segment euclidien. De même, l'image d'un segment géodésique partant d'une singularité dans une carte conique en cette singularité est un segment à partir du sommet du secteur angulaire.

Soit maintenant  $(M, d, \sigma)$  une métrique symétrique sur  $\mathbb{S}^2$ . Les propriétés suivantes se déduisent facilement du comportement des géodésiques dans les cartes :

- Proposition 2.1.5.**
1. *Une géodésique ne peut pas passer par une singularité conique, sauf à ses extrémités.*
  2. *L'arc d'équateur compris entre deux singularités équatoriales consécutives est un segment géodésique entre ces deux singularités.*
  3. *Soient  $x_i, x_j$  deux singularités conjuguées par  $\sigma$  : toute géodésique entre  $x_i$  et  $x_j$  invariante par  $\sigma$  (une telle géodésique sera dite symétrique) est orthogonale à l'équateur  $\mathcal{C}$ , et intersecte  $\mathcal{C}$  une seule fois. C'est le cas en particulier d'une géodésique de longueur minimale entre les deux singularités. Une telle géodésique n'est pas forcément unique, voir section 2.3.2.3.*

Noter que la conclusion du point 3. est fautive si on enlève l'hypothèse de symétrie de la géodésique.

- Démonstration.*
1. Soit  $l$  une géodésique de  $(M, d)$ . Supposons qu'une singularité  $x_i$  soit dans l'intérieur relatif de  $l$ . On choisit une carte conique en  $x_i$ , telle que la géodésique d'ouverture de la carte n'intersecte pas  $l$ . Alors l'image de  $l$  dans la carte est formée de deux segments passant par le centre du secteur angulaire et faisant un angle strictement inférieur à  $\pi$ .  $l$  ne minimise donc pas la distance entre les points situés de part et d'autre de la singularité, ce qui est absurde.
  2. Soit  $y \in \mathcal{C} \setminus \{x_i\}_{1 \leq i \leq 6}$  : on considère une carte en  $y$  qui ne contient pas de singularité.  $\sigma$  est une isométrie involutive, donc l'ensemble de ses points fixes dans la carte est un segment euclidien. L'équateur minimise donc la distance localement. Il en est de même aux extrémités, au niveau des singularités coniques.
  3. Soit  $l : [0, a] \rightarrow M$  une telle géodésique. Par continuité,  $l$  intersecte l'équateur  $\mathcal{C}$ . Soit  $p = l(t_0)$  le premier point d'intersection (à partir de  $x_i$  par exemple) avec l'équateur. Noter que  $p$  n'est pas une singularité par 1.  $l$  est invariante par  $\sigma$ , donc l'image du segment géodésique  $l|_{[0, t_0]}$  par  $\sigma$  est  $l|_{[a-t_0, a]}$ , segment géodésique entre  $p$  et  $x_j$ .  $l$  est orthogonale à  $\mathcal{C}$  en  $p$  puisque son image est un segment invariant par l'involution  $\sigma$ , et non contenu dans l'ensemble des points fixes. Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que les images de  $l|_{[t_0, t_0+\varepsilon]}$  et  $l|_{[a-t_0, a-t_0+\varepsilon]}$  coïncident (considérer une carte en  $p$ ). Par connexité, on en déduit que  $t_0 = a/2$ , et que  $l$  admet un unique point d'intersection avec  $\mathcal{C}$ . □

### 2.1.4 Développement d'une métrique symétrique

Le but de ce chapitre est de décrire les espaces de modules de certaines familles de métriques plates symétriques sur  $\mathbb{S}^2$ . Pour les étudier, on cherche à se ramener à des polygones, plus faciles à paramétrer. Ceci se fait en développant ces métriques dans  $\mathbb{R}^2$  pour obtenir un polygone euclidien, dans l'esprit de l'article de Thurston [Thu98] (voir aussi [Par06] et [PB15]). Le cas des métriques symétriques est particulier : du fait de l'involution  $\sigma$ , toute l'information géométrique de l'espace  $(M, d, \sigma)$  est contenue dans un hémisphère (l'adhérence d'une des deux composantes de  $M \setminus \mathcal{C}$ ). Il suffit alors de développer un hémisphère dans  $\mathbb{R}^2$ , ce qui donne des polygones euclidiens relativement simples.



**Image du développement** Soit  $(M, d, \sigma)$  une métrique symétriques à  $n$  singularités distinctes. L'équateur  $\mathcal{C}$  partage  $M$  en deux hémisphères isométriques par  $\sigma$ . Notons  $W$  un de ces hémisphères fermés :  $M$  est obtenue en recollant deux copies de  $W$  le long de leur bord. Soit  $k$  le nombre de paires de singularités conjuguées : chaque paire est notée  $\{y_i, \sigma(y_i)\}$ , où  $y_i$  est choisie dans l'hémisphère  $W$ , et l'angle conique de  $y_i$  est noté  $\theta_i$ . Soit  $m = n - 2k$  le nombre de singularités équatoriales, notées  $x_j$  pour  $1 \leq j \leq m$ , d'angle conique  $\phi_j$ .

Pour chaque paire de singularités conjuguées  $\{y_i, \sigma(y_i)\}$ , on choisit une géodésique symétrique  $l_i$  entre les deux singularités, voir Proposition 2.1.5. Les  $l_i$  sont choisies de manière à ce qu'elles soient toutes disjointes (voir aussi Figure 2.3). Un tel choix existe d'après la proposition suivante, mais il n'est en général pas unique.

**Proposition 2.1.6.** *Pour chaque paire de singularités conjuguées  $\{y_i, \sigma(y_i)\}$ , soit  $l_i$  une géodésique de longueur minimale entre  $y_i$  et  $\sigma(y_i)$ . Alors les  $l_i$  sont deux à deux disjointes.*

*Démonstration.* Supposons que deux de ces géodésiques, notées  $l_i$  et  $l_j$ , se coupent. Soit  $p$  un point d'intersection.  $l_i$  et  $l_j$  sont symétriques, donc  $\sigma(p)$  est encore un point d'intersection entre les deux géodésiques. Considérons les deux segments géodésiques  $l'_i$  et  $l'_j$  des géodésiques restreintes entre  $p$  et  $\sigma(p)$ . Si  $l'_i$  (par exemple) est de longueur strictement inférieure à  $l'_j$ , alors on peut trouver un chemin entre  $y_j$  et  $\sigma(y_j)$  plus court que  $l_j$ . C'est absurde, donc  $l'_i$  et  $l'_j$  sont de même longueur.

Dans une carte en  $p$ , l'image de chaque géodésique (restreinte à la carte) est un segment passant par  $p$ . Les deux segments ne coïncident pas (sinon, par connexité, les deux géodésiques seraient égales, absurde car les singularités  $y_i$  et  $y_j$  sont distinctes), donc ils se coupent transversalement en  $p$ . C'est absurde, car on peut encore trouver un chemin de longueur strictement inférieure entre  $y_j$  et  $\sigma(y_j)$  (par exemple), voir Figure 2.2.

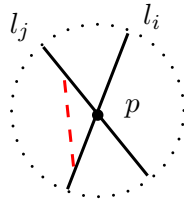


FIGURE 2.2 – Le chemin entre  $y_j$  et  $\sigma(y_j)$  suivant  $l_j$  jusqu'à  $p$ , puis le segment en pointillés, puis  $l_i$  jusqu'à  $\sigma(p)$  et à nouveau  $l_j$ , est de longueur strictement inférieure à  $l_j$ .

□

Dans la suite, on dénotera encore  $l_i$  le segment géodésique  $l_i \cap W$ . On va alors “ouvrir” l'hémisphère  $W$  suivant les géodésiques  $l_i$ , et le développer à l'aide des cartes vers  $\mathbb{R}^2$ .

Considérons  $W \setminus \{l_i\}_{i=1, \dots, k}$ . Pour chaque géodésique  $l_i$  ôtée, on recolle deux composantes de bord isométriques à  $l_i$ , partant de  $y_i$ . L'espace obtenu est noté  $W'$  : il est compact et simplement connexe car les géodésiques  $l_i$  ne se coupent pas.  $W'$  admet un atlas d'isométries vers  $\mathbb{R}^2$ , dont les changements de cartes sont des isométries euclidiennes positives. Pour tout point dans l'intérieur de  $W'$ , il suffit de considérer une carte usuelle de  $(M, d)$  incluse dans  $W \setminus \{l_i\}_{i=1, \dots, k}$ . Pour un point  $p$  au bord de  $W'$ , quatre cas se présentent :

- $p$  appartient à l'équateur  $\mathcal{C}$  et n'est pas une singularité : une carte en  $p$  est simplement la restriction d'une carte en  $p$  de  $(M, d)$  à l'hémisphère  $W$ .

- $p$  appartient à une composante de bord isométrique à une géodésique  $l_i$  ôtée : toute carte de  $(M, d)$  en  $p$  (restreinte à l'hémisphère  $W$ ) est séparée en deux composantes connexes par  $l_i$ . Une carte en  $p$  pour  $W'$  est alors la restriction à l'une de ces deux composantes connexes, correspondant au côté suivant lequel  $p$  est recollé.
- $p$  est une singularité équatoriale  $x_j$  : une carte en  $p$  est la restriction à  $W$  d'une carte conique en  $x_j$  ouverte suivant une géodésique appartenant à l'hémisphère opposé  $\sigma(W)$ . Son image est donc un secteur angulaire d'angle  $\phi_j/2$  du fait de la symétrie par  $\sigma$ .
- $p$  est une singularité non équatoriale  $y_i$  : une carte en  $p$  est une carte conique ouverte suivant la géodésique  $l_i$ .

Soit  $p$  un point de  $W'$ , et  $\varphi_U : U \subset W' \rightarrow \mathbb{R}^2$  une carte en  $p$ . Pour tout  $x \in W'$ , soit  $\gamma$  un chemin entre  $p$  et  $x$  : on peut le recouvrir par des cartes (en commençant par la carte  $U$  fixée). En utilisant les changements de cartes, qui sont des isométries euclidiennes, on construit pas à pas un chemin  $\tilde{\gamma}$  de  $\mathbb{R}^2$  isométrique à  $\gamma$ , partant de  $\varphi_U(p)$ . L'application développante  $dev$  associée à  $x$  l'extrémité finale  $dev(x)$  du chemin  $\tilde{\gamma}$ . Comme  $W'$  est simplement connexe,  $dev(x)$  est indépendant du choix de  $\gamma$  et du recouvrement par des cartes associé, donc l'application développante  $dev : W' \rightarrow \mathbb{R}^2$  est bien définie pour une carte initiale  $\varphi_U$  donnée.

Étudions l'image de l'application développante.  $dev$  est une isométrie locale par construction, donc l'image de tout segment géodésique par  $dev$  est un segment euclidien de  $\mathbb{R}^2$ . En une singularité équatoriale  $x_j$ , l'angle entre les images des deux segments géodésiques portés par  $\mathcal{C}$  est  $\phi_j/2$ . En une singularité non équatoriale  $y_i$ , les deux segments géodésiques au bord de  $W'$  ont pour image deux segments faisant un angle  $\theta_i$  en  $dev(y_i)$ . Ils sont orthogonaux aux segments images de l'équateur, puisque  $l_i$  est orthogonale à  $\mathcal{C}$ . On veut montrer que l'image de  $dev$  est un polygone, comme décrit Figure 2.3.

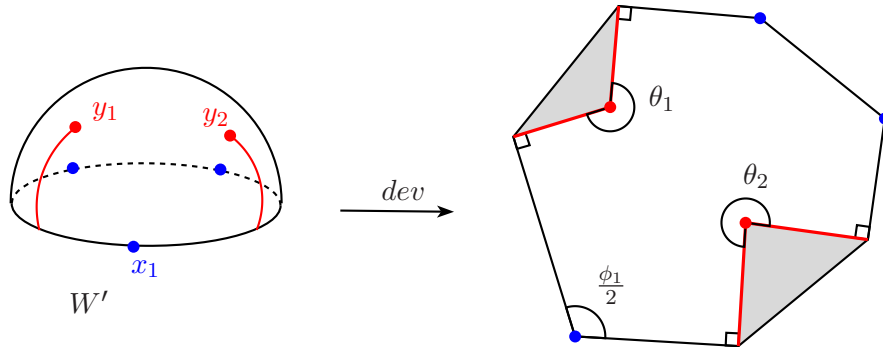


FIGURE 2.3 – Développement d'une métrique à 7 singularités, dont deux paires conjuguées. L'hémisphère  $W$  est ouvert suivant les géodésiques  $l_i$  et développé sur  $\mathbb{R}^2$  en un  $(7+2)$ -gone.

**Proposition 2.1.7.** *L'application développante  $dev$  induit une isométrie globale de  $W'$  sur un  $n+k$ -gone  $S$  comme illustré Figure 2.3 : il admet  $m$  sommets d'angles  $\phi_j/2$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $2k$  sommets d'angles  $\pi/2$ , et  $k$  sommets d'angles  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Chaque sommet d'angle  $\theta_i$  est situé entre deux sommets à angles droits.*

On peut voir le polygone  $S$  comme un  $n$ -gone (où  $n$  est le nombre de singularités de la métrique) admettant  $m$  sommets d'angles  $\phi_j/2$  et  $k$  paires de sommets consécutifs d'angles  $\theta_i/2$ , modifié de la façon suivante :

- si  $\theta_i > \pi$ , on ôte un triangle isocèle orthogonal au bord, basé sur le côté entre les deux sommets d'angles  $\theta_i/2$  (voir Figure 2.3),

- si  $\theta_i < \pi$ , on recolle un triangle isocèle orthogonal au bord, basé sur ce côté,
- si  $\theta_i = \pi$ , l'image de la singularité  $y_i$  par l'application développante est au bord du polyèdre.

Pour toutes les métriques étudiées dans les sections suivantes, les singularités conjuguées seront d'angle supérieur à  $\pi$ .

*Démonstration.* Surjectivité. L'image par  $dev$  de  $\partial W'$  est le bord d'un tel polygone. Les composantes de  $\mathcal{C}$  privé des singularités équatoriales  $x_j$  et des points d'intersection avec les géodésiques  $l_i$  sont des segments géodésiques, donc leurs images par  $dev$  sont des segments euclidiens. L'angle entre deux d'entre eux au niveau d'une singularité équatoriale  $x_j$  est  $\phi_j/2$ . L'angle au niveau de l'image d'une singularité non équatoriale  $y_i$  est  $\theta_i$ , et les deux segments issus de l'image de  $y_i$  sont orthogonaux aux segments image de l'équateur. L'image du bord est donc une courbe fermée qui délimite un polygone  $S$  comme décrit dans l'énoncé de la proposition.

$\partial W'$  est homotope au lacet constant dans  $W'$ , donc son image par  $dev$ ,  $\partial S$ , est aussi un lacet trivial  $dev(W')$ . Ceci implique que  $S$  est entièrement inclus dans  $dev(W')$ .  $dev$  est une isométrie locale, donc tout point de  $W'$  est dans l'intérieur de  $dev(W)$  (puisqu'il est inclus dans l'image d'une carte, ouverte). En particulier, pour tout  $p \in W'$ , si  $dev(p)$  est au bord de  $dev(W')$  alors  $p$  appartient à  $\partial W'$ . Donc le bord de  $dev(W')$  est inclus dans le bord de  $S$ . On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} S \subset dev(W') \\ \partial dev(W') \subset \partial S \end{array} \right. , \text{ et } S \text{ et } dev(W') \text{ sont compacts (donc fermés).}$$

Ceci implique que les deux ensembles sont égaux :  $S = dev(W')$ . On obtient de plus que pour tout  $p \in W'$ ,  $dev(p) \in \partial S$  si et seulement si  $p \in \partial W'$ .

*Injectivité.* Pour montrer l'injectivité de  $dev : W' \rightarrow S$ , on montre que c'est un revêtement. Puisque  $S$  est simplement connexe, le théorème de relèvement des chemins et homotopies (voir [Hat02] p.60-61 pour le théorème et ses conséquences) implique que  $dev$  est injective, donc que c'est une isométrie globale.

Soit  $x \in S$ . Montrons d'abord que  $x$  admet un nombre fini d'antécédents. Supposons le contraire.  $W'$  est compact, donc il existe une suite d'éléments distincts  $p_n \in dev^{-1}(\{x\})$  qui converge vers  $p' \in W'$ . Par continuité,  $p'$  appartient aussi à  $dev^{-1}(\{x\})$ . Or il existe une carte en  $p'$  telle que  $dev$  restreinte à cette carte est une isométrie. C'est absurde, donc  $x$  admet un nombre fini d'antécédents, notés  $p_1, \dots, p_s$ .

Si  $x$  appartient à  $\overset{\circ}{S}$ , alors tout  $p_i \in dev^{-1}(\{x\})$  appartient à  $\overset{\circ}{W}'$ . Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que les boules ouvertes  $B(p_i, \varepsilon)$  sont deux à deux disjointes, incluses dans  $\overset{\circ}{W}'$ , et telles que  $dev$  restreinte à chacune des  $B(p_i, \varepsilon)$  est une isométrie. La boule  $B(x, \varepsilon) \subset S$  est donc un voisinage admissible pour  $x \in S$ .

Si  $x$  appartient à  $\partial S$ , tout antécédent appartient à  $\partial W'$ . Le même raisonnement permet de trouver un voisinage admissible pour  $x$ .  $dev$  est donc un revêtement de  $W'$  sur  $S$ .  $\square$

A toute métrique symétrique à  $n$  singularités, on peut donc associer via une application développante un polygone comme décrit Figure 2.3. Réciproquement, étant donné un polygone respectant les conditions sur les angles de la proposition 2.1.7, on peut construire une métrique symétrique : pour chaque triangle isocèle ôté, on recolle les deux côtés au bord de  $S$ , ce qui donne une "pyramide" avec  $k$  sommets d'angles  $\theta_i$  (ceci correspond aux "convex caps" de [Fil11]). On recolle ensuite deux copies de cette pyramide le long de leur bord. L'espace obtenu est alors bien homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$ , localement isométrique à  $\mathbb{R}^2$

sauf au niveau des  $k$  paires de singularités conjuguées, et des  $m$  singularités équatoriales d'angles  $\phi_j$ . La symétrie  $\sigma$  est celle qui échange les deux copies de la pyramide.

Dans la construction de l'application développante, un choix différent du point base  $p$  ou de la carte  $\varphi_U$  donnerait un hexagone  $S'$  qui diffère de  $S$  par une isométrie positive de  $\mathbb{R}^2$ . De même, le choix de l'hémisphère  $\sigma(W)$  au lieu de  $W$  donnerait un hexagone isométrique à  $S$  par une isométrie de  $\mathbb{R}^2$  qui renverse l'orientation. A chaque métrique, on peut donc associer naturellement une classe d'isométrie de polygones. Il faut noter cependant que cette classe n'est pas forcément unique : un choix différent des géodésiques de découpe  $l_i$  peut donner un polygone  $S'$  qui n'est pas isométrique à  $S$ . Le passage du polygone  $S$  au polygone  $S'$  peut être décrit simplement en termes d'opération de type "couper-coller" sur  $S$ .

**Changements de géodésique de découpe** Les géodésiques symétriques de la métrique  $(M, d, \sigma)$  autres que les  $l_i$  sont visibles sur le polygone  $S$ . Elles sont représentées par des segments dans  $S$ , puisque l'application développante est une isométrie, et sont orthogonales au bord du polygone d'après la proposition 2.1.5. Les géodésiques symétriques sont de deux type dans  $S$ . Soit  $l$  une géodésique symétrique entre les singularités  $y_i$  et  $\sigma(y_i)$ , différente de la géodésique de découpe  $l_i$  :

- si  $l$  n'intersecte aucune des géodésiques de découpe  $l_j$ , alors l'image de  $l$  par dev est un segment issu de  $dev(y_i)$  et orthogonal à  $\partial S$ , voir par exemple la géodésique  $l'_2$  sur la Figure 2.5,
- si  $l$  intersecte une ou plusieurs des géodésiques  $l_j$ , alors  $dev(l)$  est une union de segments. Les discontinuités ont lieu aux niveau des  $l_j$  comme décrit Figure 2.4. Le premier segment est issu de  $dev(y_i)$ , le dernier est orthogonal à  $\partial S$ , voir la géodésique  $l'_1$  sur la Figure 2.5.

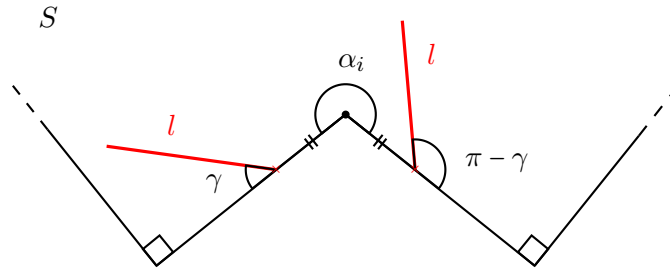


FIGURE 2.4 – L'image par l'application développante d'une géodésique de  $(M, d, \sigma)$  qui croise une géodésique de découpe est discontinue.

Soit donc  $\{l'_1, \dots, l'_k\}$  un ensemble de géodésiques symétriques entre les paires de singularités  $\{y_i, \sigma(y_i)\}$  ( $1 \leq i \leq k$ ), telles que les  $l'_i$  sont deux à deux disjointes. Soit  $S'$  le polygone obtenu en développant la métrique  $(M, d, \sigma)$  suivant les  $l'_i$ .  $S'$  peut être construit à partir de  $S$  par une modification de type "couper-coller", voir Figure 2.5.

Pour tous les  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , tels que  $l'_i$  est différente de  $l_i$  :

- $S$  est découpé le long des géodésiques  $l'_i$ . L'espace résultant admet plusieurs composantes connexes (leur nombre dépend du nombre de géodésiques  $l'_i$  différentes de  $l_i$ , et de leur nombre d'intersections avec les géodésiques  $l_j$ ). Ce sont des polygones dont les côtés sont isométriques à des portions de  $\partial S$ , des  $l_i$  ou des  $l'_i$ .
- les portions des anciennes géodésiques de découpe  $l_i$  sont identifiées deux à deux : on referme les découpes suivant les  $l_i$ .

Le polygone obtenu est bien  $S'$ , qui développe la métrique  $(M, d, \sigma)$  après ouverture suivant les géodésiques  $l'_i$ .

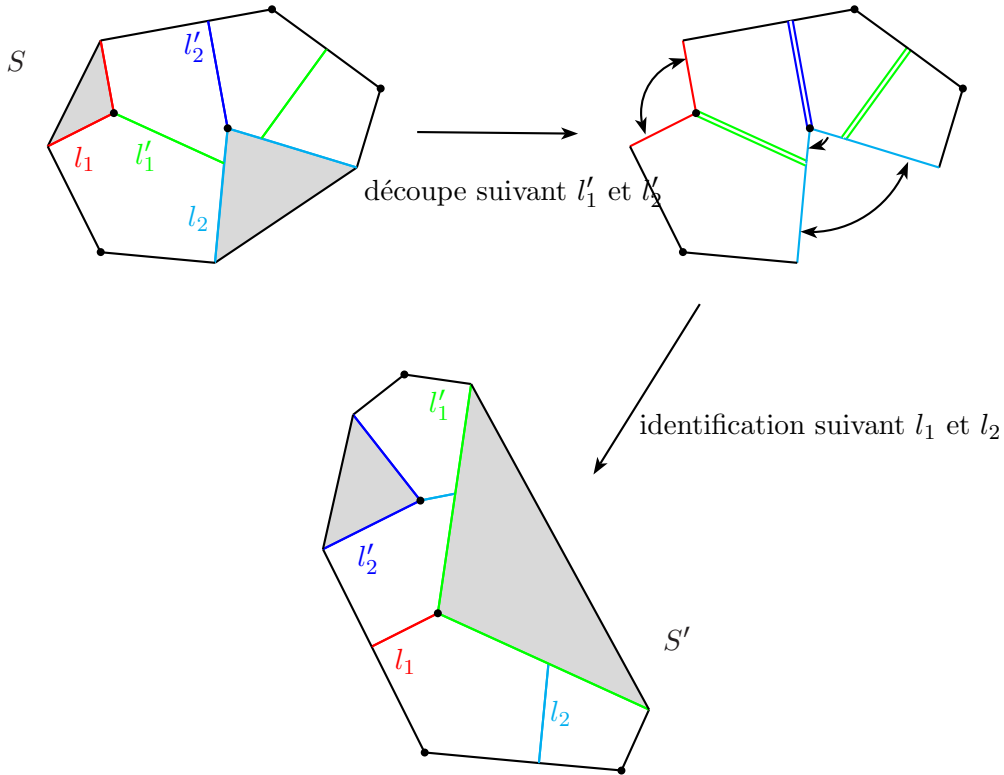


FIGURE 2.5 – Le polygone  $S$  est découpé suivant les géodésiques  $l'_1$  et  $l'_2$ , puis recollé le long des portions de géodésiques  $l_1$  et  $l_2$ . Le polygone  $S'$  obtenu est le développement de la métrique correspondante après ouverture suivant  $l'_1$  et  $l'_2$ .

Ces opérations de “couper-coller” peuvent cependant être définies de manière indépendante de la métrique  $(M, d, \sigma)$ , en considérant seulement le polygone  $S$  et les segments orthogonaux au bord comme décrit précédemment (que l’on appellera *géodésiques symétriques* de  $S$ ). Une modification de  $S$  comme décrit ci-dessus sera appelée un *changement de géodésiques de découpe* pour  $S$ .

Notons alors  $\mathcal{M}_{\theta_1, \dots, \theta_k, \phi_1, \dots, \phi_m}$  l’ensemble des classes d’équivalence de métriques symétriques à  $k$  paires de singularités non équatoriales d’angles  $\theta_1, \dots, \theta_k$ , et  $m$  singularités équatoriales d’angles  $\phi_1, \dots, \phi_m$ . On rappelle que deux métriques sont équivalentes s’il existe une similitude entre les deux qui préserve la symétrie, voir définition 2.1.3.

**Définition 2.1.8.** Considérons l’ensemble des polygones  $S$  comme dans la proposition 2.1.7 : ce sont des  $n + k$ -gones, admettant  $m$  sommets d’angles  $\phi_j/2$ , et  $k$  triplets de sommets consécutifs d’angles  $(\pi/2, \theta_i, \pi/2)$ . Deux tels polygones sont dits *équivalents* s’ils diffèrent d’une similitude et d’un changement de géodésiques de découpe, comme décrit au paragraphe précédent.

On note  $\mathcal{I}_{\theta_1, \dots, \theta_k, \phi_1, \dots, \phi_m}$  l’ensemble des classes d’équivalence de ces polygones. Alors par construction, on a la proposition :

**Proposition 2.1.9.** *L’application suivante, où les crochets représentent une classe d’équivalence,*

est une bijection :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{I}_{\theta_1, \dots, \theta_k, \phi_1, \dots, \phi_m} &\rightarrow \mathcal{M}_{\theta_1, \dots, \theta_k, \phi_1, \dots, \phi_m} \\ [S] &\mapsto \left[ \begin{array}{l} \text{métrique obtenue en identifiant deux à deux} \\ \text{les côtés des triangles isocèles et en recollant} \\ \text{deux copies de cet espace le long de leur bord} \end{array} \right] \end{aligned}$$

La surjectivité de  $\phi$  est assurée par l'étude du développement des métriques. L'injectivité vient du fait que deux métriques équivalentes ont des hémisphères isométriques, puisque la symétrie est préservée. Leur développement diffère alors d'une similitude, et du choix des géodésiques d'ouverture.

### 2.1.5 Dégénérescences

Soit  $(M, d)$  est une métrique plate sur  $\mathbb{S}^2$  à  $n$  singularités coniques, avec  $m$  singularités équatoriales et  $k$  paires de singularités conjuguées. Les singularités sont toutes distinctes par définition, donc le  $(n+k)$ -gone obtenu après développement de la métrique (voir proposition 2.1.7) est *non dégénéré* : il a exactement  $n+k$  sommets distincts.

Dans certains cas, il est cependant possible de faire tendre la longueur d'un côté du polygone vers 0, tout en conservant les angles du polygone, et de façon à ce que le polygone limite soit le développement d'une métrique sur  $\mathbb{S}^2$ . Le polygone obtenu lorsque les deux sommets coïncident est appelé *polygone dégénéré*, et la métrique plate sur  $\mathbb{S}^2$  associée est appelée *métrique dégénérée*. Les dégénérescences de polygones sont décrites dans [BG92] (p.212). Elles sont aussi décrites du point de vue des métriques sur  $\mathbb{S}^2$  dans [Thu98] p.528-529 : la topologie considérée sur l'espace de modules des métriques est donnée par la structure hyperbolique complexe (rappelée succinctement dans l'introduction) définie sur cet espace. On se contente pour le moment d'une description des dégénérescences en termes de polygones, puisque nous n'avons pas encore défini de topologie sur l'espace de modules des métriques symétriques. Plus loin dans le chapitre, une fois une structure hyperbolique réelle définie sur l'espace de modules, on retrouvera bien le même type de dégénérescences que [Thu98].

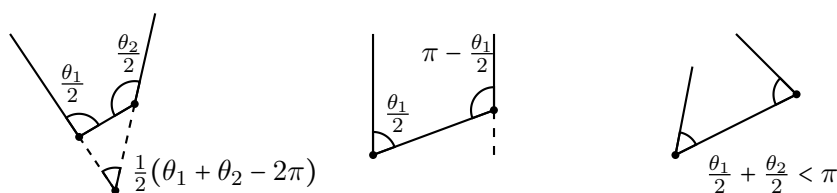
La possibilité de faire coïncider deux sommets consécutifs d'un polygone (dont les angles sont fixés) dépend des angles en ces sommets. Différents cas sont décrits Figure 2.6. On considère seulement les dégénérescences correspondant à deux singularités qui coïncident. Il y a alors trois cas possibles : soit deux singularités équatoriales consécutives se rapprochent, soit deux singularités conjuguées (donc la longueur des segments correspondant à la géodésique de découpe tend vers 0), soit deux singularités non équatoriales non conjuguées. Dans les trois cas, si on note  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles coniques des deux singularités, une condition nécessaire pour la dégénérescence est la suivante :

$$2\pi < \theta_1 + \theta_2$$

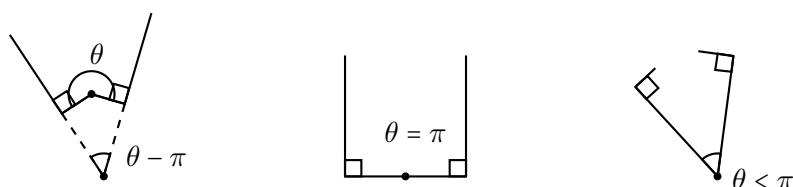
Cette condition est aussi souvent exprimée en termes des courbures  $c_k = 2\pi - \theta_k$  des singularités : elle s'écrit alors  $c_1 + c_2 < 2\pi$ .

Considérons par exemple le cas de deux singularités équatoriales consécutives d'angles coniques  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Les angles dans le polygone développé sont alors  $\theta_1/2$  et  $\theta_2/2$ . On observe alors les trois cas suivants, voir Figure 2.6 :

Singularités équatoriales consécutives :



Singularités conjuguées :



Singularités non équatoriales non conjuguées :

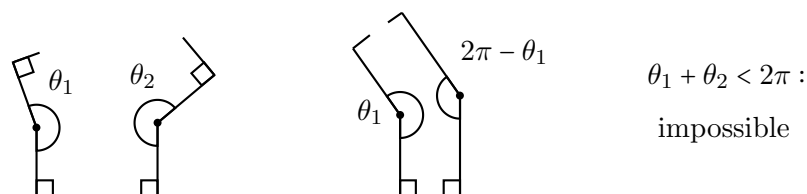


FIGURE 2.6 – Dégénérescences possibles entre deux singularités dans un polygone. A gauche :  $\theta_1 + \theta_2 > 2\pi$ , dégénérescence possible, nouvelle singularité d'angle  $\theta_1 + \theta_2 - 2\pi$ . Au milieu :  $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$ , dégénérescence à l'infini. A droite :  $\theta_1 + \theta_2 < 2\pi$ , dégénérescence impossible.

- si  $\theta_1 + \theta_2 > 2\pi$ , alors la longueur du côté peut tendre vers 0. Le polygone dégénère obtenu est d'angle  $(\theta_1 + \theta_2 - 2\pi)/2$ , donc la métrique dégénérée correspondante admet une singularité équatoriale d'angle  $\theta_1 + \theta_2 - 2\pi$ ,
- si  $\theta_1 + \theta_2 < 2\pi$ , pas de dégénérescence possible (le polygone s'écrase sur un point),
- si  $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$ , le polygone dégénère en un segment (d'aire nulle) si la longueur du côté tend vers 0. On verra dans la suite qu'une telle dégénérescence correspond à un point à l'infini pour la structure hyperbolique construite sur l'espace de modules.

## 2.2 Polyèdres et groupes dans $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ : quelques outils

Les travaux décrits dans ce chapitre sont basés sur la géométrie hyperbolique réelle. On rappelle dans cette section les notions et outils spécifiques à ce contexte qui seront utilisés. Dans toute la suite du chapitre,  $\mathbb{H}^n$  désignera l'espace hyperbolique réel de dimension  $n$ .

Les polyèdres de  $\mathbb{H}^n$  sont les principaux objets géométriques utilisés dans l'étude des espaces de modules des métriques symétriques : la première étape de cette étude est en effet de décrire ces espaces de modules comme des polyèdres hyperboliques, quotientés par des isométries de  $\mathbb{H}^n$ . On commence donc par rappeler les principales notions et propriétés liées aux polyèdres hyperboliques.

Les deux résultats fondamentaux utilisés ensuite dans ce chapitre sont le théorème de Poincaré, qui permet de décrire ces espaces de modules comme des orbifolds hyperboliques, et l'algorithme de Vinberg, qui nous permet d'identifier explicitement ces orbifolds et de les comparer avec des groupes "classiques" du type  $O(q, \mathbb{Z})$ , où  $q$  est une forme quadratique de signature  $(n, 1)$ .

Le théorème de Poincaré est présenté dans le cas général section 1.3. Dans cette partie, on décrit donc seulement la vérification des hypothèses dans le cas réel. Les polyèdres qui apparaissent dans ce chapitre admettent seulement des sommets idéaux (voir définition 2.2.6) comme points à l'infini, on se restreint donc à ce type de polyèdres. Une version du théorème de Poincaré pour plusieurs polyèdres, qui sera utilisée dans la suite de ce chapitre, est aussi décrite.

On détaille ensuite l'algorithme de Vinberg, qui permet de déterminer, sous certaines conditions, un domaine fondamental pour le sous-groupe de réflexions d'un groupe d'isométries entières  $O(q, \mathbb{Z})$ , où  $q$  est une forme quadratique de signature  $(n, 1)$ .

### 2.2.1 Polyèdres hyperboliques

Les résultats de cette section sont principalement tirés de [Rat06]. On considèrera seulement des polyèdres bordés par des hyperplans hyperboliques, et admettant un nombre fini de faces.

**Définitions** Considérons l'espace  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni d'une forme quadratique  $q$  de signature  $(n, 1)$ , noté  $\mathbb{R}^{n,1}$ . La forme bilinéaire associée à  $q$  est notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $v \in \mathbb{R}^{n,1}$  un vecteur positif pour  $q$  :  $\langle v, v \rangle > 0$ . Son orthogonal  $\overline{H}_v = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle v, x \rangle = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^{n,1}$  qui contient des vecteurs négatifs.  $\overline{H}_v$  donne donc, après passage au quotient, un hyperplan de  $\mathbb{H}^n$  noté  $H_v$ , de polaire  $v$ .  $H_v$  sépare l'espace hyperbolique en deux demi-espaces.

Pour pouvoir décrire ces demi-espaces en termes des coordonnées dans  $\mathbb{R}^{n,1}$ , il faut fixer la nappe de l'hyperboloïde  $\{q(x) = -1\}$  avec laquelle on veut travailler. Supposons qu'une réduction de Gauss de la forme quadratique  $q$  s'écrive  $q(x) = -l_0(x)^2 + l_1(x)^2 + \dots + l_n(x)^2$ , où les  $l_j$  sont des formes linéaires indépendantes. Soit  $Q_{sup}^- = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x \rangle < 0, l_0(x) > 0\}$  le cône supérieur des vecteurs négatifs. Les demi-espaces hyperboliques délimités par  $H_v$  peuvent alors être représentés par les ensembles

$$H_v^- = \overline{H}_v / \mathbb{R}_+^*, \text{ où } \overline{H}_v^- = \{x \in Q_{sup}^- \mid \langle v, x \rangle \leq 0\}$$

et

$$H_v^+ = \overline{H}_v^+ / \mathbb{R}_+^*, \text{ où } \overline{H}_v^+ = \{x \in Q_{sup}^- \mid \langle v, x \rangle \geq 0\}$$



Dans la suite, on oubliera souvent la distinction entre  $\overline{H}_v$  et  $H_v$ , et de même pour  $\overline{H}_v^\pm$  et  $H_v^\pm$ .

**Définition 2.2.1.** Un polyèdre convexe  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{H}^n$  est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces bordés par des hyperplans :

$$\mathcal{P} = \bigcap_{j=1}^m H_{v_j}^-$$

où les  $v_j$  sont des vecteurs positifs de  $\mathbb{R}^{n,1}$ . La dimension de  $\mathcal{P}$  est la dimension minimale des sous-espaces totalement géodésiques de  $\mathbb{H}^n$  contenant  $\mathcal{P}$ .

Dans la suite,  $\mathcal{P}$  désigne un polyèdre de dimension  $n$ . Un hyperplan  $H_{v_j}$  est dit *essentiel* pour  $\mathcal{P}$  si  $H_{v_j} \cap \mathcal{P}$  contient un ouvert de  $H_{v_j}$ . Si  $H_{v_j}$  est essentiel, alors l'intersection  $H_{v_j} \cap \mathcal{P}$  est la *face* de  $\mathcal{P}$  portée par  $H_{v_j}$ . Toute face de  $\mathcal{P}$  est un polyèdre convexe de dimension  $n-1$ . L'ensemble des *facettes* de  $\mathcal{P}$  est construit par récurrence sur la codimension : les facettes de codimension 1 de  $\mathcal{P}$  sont les faces de  $\mathcal{P}$ , et les facettes de codimension  $k+1$  sont les faces des facettes de codimension  $k$ . Les facettes de  $\mathcal{P}$  de codimension 2 sont appelées *arêtes* de  $\mathcal{P}$ .

Toute arête de  $\mathcal{P}$  est sur exactement deux faces (voir [Rat06] p.203), donc  $\mathcal{P}$  est bien un polytope au sens de la section 1.3.

L'espace  $\mathbb{H}^n \cup \partial_\infty \mathbb{H}^n$  admet une topologie (voir section 1.1.3), et il est naturel de considérer l'adhérence  $\overline{\mathcal{P}}^\infty$  de  $\mathcal{P}$  dans cet espace. Les points à l'infini de  $\mathcal{P}$  sont les points de  $\overline{\mathcal{P}}^\infty \cap \partial_\infty \mathbb{H}^n$ .  $\mathcal{P}$  est compact si et seulement si il n'admet pas de points à l'infini.

**Angles dièdres** Etant donnés deux hyperplans  $H$  et  $H'$  de  $\mathbb{H}^n$ , l'une des trois situations suivantes est vérifiée :

- $H$  et  $H'$  se coupent dans  $\mathbb{H}^n$  : l'angle entre  $H$  et  $H'$  est alors constant.
- $H$  et  $H'$  ne se coupent pas dans  $\mathbb{H}^n$ , mais se coupent dans  $\partial_\infty \mathbb{H}^n$  : ils sont *parallèles*.
- $H$  et  $H'$  sont disjoints dans  $\mathbb{H}^n \cup \partial_\infty \mathbb{H}^n$  : ils sont dits *ultraparallèles*. Dans ce cas,  $H$  et  $H'$  admettent une perpendiculaire commune.

Une partie de la géométrie d'un polyèdre  $\mathcal{P}$  est donnée par les angles dièdres entre les hyperplans (qui sont tous supposés essentiels). La proposition suivante permet de déterminer ces angles à partir de la donnée des polaires :

**Proposition 2.2.2** ([Rat06] §3.2). Soient  $H$  et  $H'$  deux hyperplans, de polaires  $v$  et  $v'$ , qui définissent deux demi-espaces  $H_v^-$  et  $H_{v'}^-$ . Notons

$$\delta = \frac{\langle v, v' \rangle}{\sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle v', v' \rangle}}$$

Alors :

- si  $|\delta| < 1$ ,  $H$  et  $H'$  s'intersectent dans  $\mathbb{H}^n$ . L'angle entre les hyperplans est donné par  $\arccos(|\delta|) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . L'angle dièdre entre les deux demi-espaces  $H_v^-$  et  $H_{v'}^-$  est  $\arccos(-\delta)$ .
- Si  $|\delta| = 1$ , alors  $H$  et  $H'$  sont parallèles.
- Si  $|\delta| > 1$ , alors  $H$  et  $H'$  sont ultraparallèles, et la distance entre les deux hyperplans est  $\operatorname{arcosh}(|\delta|)$ .

**Polyèdres de Coxeter** Parmi les polyèdres les plus simples, on trouve les polyèdres de Coxeter :

**Définition 2.2.3.** Soit  $\mathcal{P} = \bigcap_{j=1}^m H_j^-$  un polyèdre de  $\mathbb{H}^n$ .  $\mathcal{P}$  est un *polyèdre de Coxeter* si quels que soient  $H_i$  et  $H_j$  des hyperplans bordant  $\mathcal{P}$  qui s'intersectent dans  $\mathbb{H}^n$ , l'angle dièdre  $\alpha_{ij}$  entre  $H_i^-$  et  $H_j^-$  est de la forme  $\pi/k_{ij}$ , où  $k_{ij} \geq 2$  est un entier.

Les polyèdres de Coxeter peuvent être représentés par un graphe, appelé *diagramme de Coxeter*. Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre de Coxeter. Le diagramme de Coxeter de  $\mathcal{P}$  a pour sommets les hyperplans (essentiels) bordant  $\mathcal{P}$ . Etant donnés deux tels hyperplans  $H_i$  et  $H_j$ , l'arête entre les sommets correspondants est donnée par les conventions suivantes :

- si  $H_i$  et  $H_j$  s'intersectent dans  $\mathbb{H}^n$  avec un angle dièdre  $\alpha_{ij} = \pi/2$  : pas d'arête,
- si  $H_i$  et  $H_j$  s'intersectent et  $\alpha_{ij} = \pi/3$  (respectivement  $\pi/4$ ) : arête simple (respectivement double),
- si  $H_i$  et  $H_j$  s'intersectent et  $\alpha_{ij} = \pi/k_{ij}$  avec  $k_{ij} \geq 5$  : arête avec l'étiquette  $k_{ij}$ ,
- si  $H_i$  et  $H_j$  sont parallèles : arête épaisse (ou arête simple avec l'étiquette  $\infty$ ),
- si  $H_i$  et  $H_j$  sont ultraparallèles : arête épaisse en pointillés.

La Figure 2.7 donne un exemple de diagramme de Coxeter.

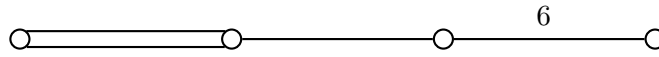


FIGURE 2.7 – Exemple de diagramme de Coxeter.

**Links** Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre de  $\mathbb{H}^n$ . La géométrie locale de  $\mathcal{P}$  au voisinage d'une facette  $E \subset \mathcal{P}$  est décrite par l'objet suivant ([Rat06] p.214) :

**Définition 2.2.4.** Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^n$  un polyèdre hyperbolique, et  $p$  un point de  $\mathcal{P}$ . Soit  $S_p$  une  $(n-1)$ -sphère centrée en  $p$  qui n'intersecte que les faces de  $\mathcal{P}$  qui contiennent  $p$ . L'intersection  $\mathcal{P} \cap S_p$  est un polyèdre sphérique. Le *link* de  $p$  est le polyèdre de la sphère unité  $S^{n-1}$  donné par  $\mathcal{P} \cap S_p$ , après changement d'échelle.

Cette définition peut être étendue aux points à l'infini de  $\mathcal{P}$ , voir [Rat06] p.217.

**Définition 2.2.5.** Soit  $p$  un point à l'infini de  $\mathcal{P}$ , et soit  $\Sigma_p$  une horosphère basée en  $p$  qui n'intersecte que les faces de  $\mathcal{P}$  incidentes à  $p$ . Le link de  $p$  dans  $\mathcal{P}$  est le polyèdre euclidien  $\mathcal{P} \cap \Sigma_p$  (unique à similitude près).

Noter qu'il existe toujours une horosphère qui n'intersecte que les faces incidentes à  $p$ , puisque les polyèdres considérés ici admettent seulement un nombre fini de faces.

On peut alors distinguer deux types de points à l'infini pour  $\mathcal{P}$ , suivant la topologie du link.

**Définition 2.2.6** ([Rat06] p.219). Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre hyperbolique, et  $p$  un point à l'infini de  $\mathcal{P}$ .  $p$  est un *sommet idéal* de  $\mathcal{P}$  si son link dans  $\mathcal{P}$  est compact.

Si  $p$  est un sommet idéal de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}$  admet une "pointe" infinie vers  $p$ , qui est de volume fini : si  $\Sigma$  est une horosphère en  $p$  qui n'intersecte que les faces incidentes à  $p$ , et si  $B$  est l'horoboule délimitée par  $\Sigma$ , alors le volume de  $\mathcal{P} \cap \Sigma$  est fini, voir [Rat06] p.222.

**Condition suffisante de volume fini** La remarque précédente permet d'obtenir une condition suffisante pour qu'un polyèdre  $\mathcal{P}$  soit de volume fini. Cette condition sera utilisée tout au long du chapitre pour montrer que les polyèdres étudiés sont de volume fini.

**Proposition 2.2.7.** *Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^n$  un polyèdre hyperbolique. Si  $\mathcal{P}$  admet un nombre fini de faces et de points à l'infini, alors tous ces points à l'infini sont des sommets idéaux et  $\mathcal{P}$  est de volume fini.*

*Démonstration.* Si tous les points à l'infini de  $\mathcal{P}$  sont des sommets idéaux, i.e. de link compact, alors le volume de  $\mathcal{P}$  est fini. En effet, pour tout sommet  $p_j$  muni d'une horoboule  $B_j$  qui n'intersecte que les faces incidentes à  $p_j$ , le volume de la pointe  $\mathcal{P} \cap B_j$  est fini.  $\mathcal{P}$  se décompose en une partie compacte et un nombre fini de pointes, donc il est de volume fini.

Soit donc  $p \in \mathcal{P}$  un point à l'infini. On se place dans le modèle du demi-espace de Poincaré avec  $p$  comme point à l'infini. Les faces de  $\mathcal{P}$  qui passent par  $p$  sont donc verticales, les autres sont des hémisphères.  $\mathcal{P}$  admet un nombre fini de faces, donc la projection verticale des faces hémisphériques de  $\mathcal{P}$  sur l'espace à l'infini  $\mathbb{R}^{n-1}$  forme une partie bornée  $B$ . Soit  $S$  une horosphère en  $p$  qui n'intersecte que les faces verticales de  $\mathcal{P}$ , et  $L(p) = S \cap \mathcal{P}$  le link de  $p$ . Pour tout point  $x$  de  $L(p)$ , si la projection  $\pi(x)$  de  $x$  sur  $\mathbb{R}^{n-1}$  est hors de  $B$ , alors  $\pi(x)$  est un point à l'infini de  $\mathcal{P}$ . Or  $\mathcal{P}$  admet seulement un nombre fini de points à l'infini, donc la projection de  $L(p)$  sur le bord est incluse dans  $B$ .  $L(p)$  est donc borné, et par conséquent compact.  $\square$

## 2.2.2 Le théorème de Poincaré, version réelle

Dans cette partie, on souhaite appliquer le théorème de Poincaré à des polyèdres hyperboliques réels, munis d'identifications de faces (voir section 1.3). La référence principale dans ce cas est l'article d'Epstein et Petronio [EP94], ainsi que les livres [Mas88] et [Rat06].

Tous les polyèdres considérés dans ce chapitre sont bordés par des hyperplans hyperboliques. Ils ne sont en général pas compacts, mais n'ont qu'un nombre fini de points à l'infini, et tous ces points sont des *sommets idéaux*, voir définition 2.2.6 (l'intersection d'une horosphère suffisamment haute basée en un point à l'infini avec le polyèdre est compacte). Dans ce cadre, les hypothèses du théorème de Poincaré (pavage des arêtes et complétude de l'espace  $Z$ ) peuvent être reformulées pour rendre leur vérification plus aisée.

### 2.2.2.1 Vérification des hypothèses

Dans toute la suite, on reprend les notations de la section 1.3. Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  un polyèdre hyperbolique réel bordé par des hyperplans, admettant un nombre fini de sommets idéaux, et muni d'identifications de faces.

**Cycles d'arêtes** L'angle dièdre à l'intersection de deux hyperplans de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est constant, donc l'hypothèse de pavage autour des arêtes est très simple à vérifier dans ce contexte. Pour toute arête  $e \subset \mathcal{P}$ , la transformation de cycle  $t_e$  est une rotation autour du sous-espace de codimension 2 portant  $e$ , d'angle  $\theta$  égal à la somme des angles dièdres apparaissant dans le cycle (voir [EP94] p.129, lemme 3.12). Les copies de  $\mathcal{P}$  pavent un voisinage de  $e$  si et seulement si  $\theta$  est de la forme  $2\pi/k$ ,  $k \geq 1$ .

**Complétude de  $Z$**  La complétude de l'espace  $Z$  peut se traduire par l'existence d'*horosphères cohérentes* pour le polyèdre  $\mathcal{P}$  (voir par exemple [EP94] p.152, Théorème 6.3). Soient  $p_1, \dots, p_m$  les sommets idéaux de  $\mathcal{P}$ , et  $S_1, \dots, S_m$  des horosphères centrées en les  $p_j$ .  $\{S_1, \dots, S_m\}$  forme un système d'horosphères cohérentes pour  $\mathcal{P}$  si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout  $1 \leq j \leq m$  :

- les  $S_j$  sont deux à deux disjointes,
- $S_j$  ne rencontre que les faces de  $\mathcal{P}$  qui contiennent  $p_j$ ,
- si  $F$  est une face de  $\mathcal{P}$  contenant  $p_j$ , d'identification de face associée  $\gamma_F$ , alors l'horosphère  $\gamma_F(S_j)$  appartient à l'ensemble  $\{S_1, \dots, S_m\}$ .

On donne les arguments principaux montrant la complétude de  $Z$  si un système d'horosphères cohérentes existe. Pour chaque sommet à l'infini  $p_j$ , on considère le sous-ensemble de  $Z$  minimal formé par les copies de  $\mathcal{P}$  qui passent par  $p_j$ , dans le sens suivant : lorsqu'on développe  $Z$  sur  $\mathbb{H}^n$  en envoyant  $p_j$  à l'infini, on considère seulement les copies de  $\mathcal{P}$  qui contiennent le point à l'infini, et sont image de  $\mathcal{P}$  par une suite finie d'identifications de faces associées à des faces verticales, voir [EP94] p.151. Ce sous-espace de  $Z$  est noté  $Z_j$ . Considérons la restriction à  $Z_j$  de l'application développante  $D_Z : Z \rightarrow \mathbb{H}^n$ . L'existence d'horosphères cohérentes pour  $\mathcal{P}$  assure que les links euclidiens  $\mathcal{P} \cap S_i$  des sommets  $p_i$  qui apparaissent dans le cycle du sommet à l'infini  $p_j$  sont tous développés sur  $S_j$ . Ils sont munis d'identifications de faces qui vérifient les conditions de cycle, et le théorème de Poincaré appliqué à  $\mathbb{R}^{n-1}$  assure que les copies de  $\mathcal{P}$  formant  $Z_j$  pavent l'horoboule délimitée par  $S_j$ . On peut faire de même pour tout sommet à l'infini de toute copie  $\{g\} \times \mathcal{P}$  de  $\mathcal{P}$  dans  $Z$ .

Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $Z$  qui ne converge pas, alors quitte à extraire elle reste à partir d'un certain rang dans un  $Z_j$ , au dessus du relevé de l'horosphère  $S_j$ . En effet,  $\mathcal{P}$  admet un nombre fini de sommets à l'infini, donc la projection de la suite sur l'espace quotient  $\mathcal{P}/\{\gamma_F\}$  admet une sous-suite qui reste dans le quotient d'une horoboule  $S_j$ , et la construction des  $S_i$  assure qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que les différents relevés de  $S_j$  à  $Z$  sont à distance plus grande que  $\varepsilon$ . Ce sous-ensemble de  $Z$  est homéomorphe à l'horoboule délimitée par  $S_j$  dans  $\mathbb{H}^n$ , qui est complète, d'où une contradiction. Donc  $Z$  est complet.

**Horosphères cohérentes** L'existence d'horosphères cohérentes peut se voir simplement sur les relevés à  $\mathbb{R}^{n,1}$  des sommets idéaux du polyèdre. Dans le modèle de l'hyperboloïde, une horosphère centrée en un point  $p = [x_0, \dots, x_n]$  (en coordonnées homogènes) est l'intersection de l'hyperboloïde avec un plan affine défini par

$$\{x \in \mathbb{H}^n \mid \langle x, P \rangle = -1\}$$

où  $P$  est un relevé de  $p$  à  $\mathbb{R}^{n,1}$ , dans la partie supérieure du cône. Le choix du relevé  $P$  détermine la hauteur de l'horosphère. L'image d'une telle horosphère par une isométrie  $\gamma$  est donc l'horosphère centrée en  $\gamma(p)$

$$\{x \in \mathbb{H}^n \mid \langle x, \gamma(P) \rangle = -1\}$$

Ceci permet de caractériser simplement l'existence d'horosphères cohérentes :

**Proposition 2.2.8.** *Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^n$  un polyèdre muni d'identifications de faces  $\{\gamma_F \mid F \text{ face de } \mathcal{P}\}$ , qui vérifient les conditions de cycle. Soient  $p_1, \dots, p_m$  les sommets idéaux de  $\mathcal{P}$ .  $\mathcal{P}$  admet des horosphères cohérentes si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : il existe des relevés  $P_1, \dots, P_m$  des sommets idéaux de  $\mathcal{P}$  à  $\mathbb{R}^{n,1}$ , tels que si  $F$  est une face de  $\mathcal{P}$  passant par le sommet idéal  $p_i$ , et si  $j$  est tel que  $\gamma_F(p_i) = p_j$ , alors  $\gamma_F(P_i) = P_j$ .*

Un système d'horosphères cohérentes en les  $p_j$  est alors donné par les  $H_j = \{ x \in \mathbb{H}^n \mid \langle x, \lambda P_j \rangle = -1 \}$ , où  $\lambda > 0$  est choisi suffisamment grand pour que l'horosphère  $H_j$  n'intersecte que les faces passant par le sommet idéal  $p_j$ , et que les  $H_j$  soient deux à deux disjointes.

Les polyèdres que l'on étudiera dans ce chapitre seront tous décrits explicitement comme quotients de polyèdres de  $\mathbb{R}^{n,1}$  par les scalaires, la propriété 2.2.8 est donc bien adaptée pour vérifier l'existence d'horosphères cohérentes, et donc la complétude de  $Z$ . C'est ce que l'on utilisera en pratique. Cependant, la complétude de  $Z$  peut être vérifiée aussi, de manière équivalente, via l'étude des transformations de cycles de sommets à l'infini (définies de la même façon que les transformations de cycles d'arêtes) :  $Z$  est complet si et seulement si toutes ces transformations sont non loxodromiques. Elles préservent bien alors les horosphères centrées au sommet idéal correspondant.

**Cas particulier : les polyèdres de Coxeter** Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^n$  un polyèdre de Coxeter : tous les angles dièdres entre deux faces de  $\mathcal{P}$  sont de la forme  $\pi/k$ , où  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . On le munit d'identifications de faces les plus simples possible : pour toute face  $F$  de  $\mathcal{P}$ ,  $\gamma_F$  est la réflexion par rapport à l'hyperplan portant  $F$ . Ce système d'identifications de faces vérifie alors les hypothèses du théorème.

Soient  $F$  et  $F'$  deux faces de  $\mathcal{P}$  dont l'intersection est une arête de codimension 2, et d'angle dièdre  $\theta = \pi/k$ . Les réflexions  $\gamma_F$  et  $\gamma_{F'}$  fixent l'arête, donc le cycle correspondant est le suivant :

$$F \cap F' \xrightarrow{\gamma_{F'}} F' \cap F \xrightarrow{\gamma_F} F \cap F'$$

La transformation de cycle est donc  $\gamma_F \cdot \gamma_{F'}$  car c'est bien l'identité sur l'arête  $F \cap F'$ . C'est une rotation d'angle  $2\theta = 2\pi/k$ . Les conditions de cycles sont donc vérifiées.

Les réflexions préservent les horosphères centrées en un point à l'infini appartenant à leur miroir, donc il existe bien des horosphères cohérentes.

**Théorème 2.2.9** (Théorème de Poincaré, version Coxeter). *Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^n$  un polyèdre de Coxeter. Alors le groupe  $\Gamma$  engendré par les réflexions par rapport aux faces de  $\mathcal{P}$  est discret et  $\mathcal{P}$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma$ .  $\Gamma$  admet la présentation suivante :*

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \mid (\gamma_i \cdot \gamma_j)^{k_{ij}}, \forall 1 \leq i, j \leq m \rangle,$$

où  $k_{i,j}$  est tel que l'angle dièdre entre les faces  $F_i$  et  $F_j$  est  $\pi/k_{i,j}$  ( $k_{i,j} = \infty$  si  $F_i$  et  $F_j$  sont parallèles ou ultraparallèles).

$\Gamma$  est donc ce qu'on appelle un groupe de Coxeter.

### 2.2.2.2 Le cas de plusieurs polyèdres

Le théorème de Poincaré peut être appliqué à une famille de polyèdres munie d'identifications de faces, avec très peu de modifications (voir [EP94]). Tout revient en effet à recoller ces différents polyèdres les uns aux autres pour former un "gros" polytope (c'est l'espace  $Y$  de [EP94], p137), qui est naturellement muni d'identifications de faces. La version classique du théorème s'applique alors.

La version pour plusieurs polyèdres peut être avantageuse pour deux raisons. D'abord, il est inutile de vérifier au départ que le recollement de la famille de polyèdres se fait sans chevauchement : c'est donné a posteriori par la conclusion du théorème de Poincaré. D'autre part, elle permet d'éviter de travailler avec des polytopes non convexes dans  $\mathbb{H}^n$ .

Les polyèdres convexes sont parfaitement adaptés pour faire de l'algèbre linéaire puisqu'ils sont simplement décrits par un système d'inégalités linéaires. On peut alors appliquer directement le théorème de Poincaré à une famille de polyèdres convexes, sans avoir besoin de chercher un recollement convexe de ces polyèdres (s'il en existe un), et sans travailler avec des polytopes non convexes.

Dans les sections 2.4.1.4 et 2.4.1.5, l'étude de l'espace de modules des métriques fournit naturellement des familles de polyèdres convexes, munies d'identifications de faces. On utilisera donc la version du théorème adaptée à plusieurs polyèdres.

Soit  $\mathcal{F} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n\}$  une famille finie de polyèdres de  $\mathbb{H}^n$  munie d'identifications de faces  $\{\gamma_F \mid F \text{ face de } \mathcal{P}, \mathcal{P} \in \mathcal{F}\}$  : pour tout  $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$  et toute face  $F$  de  $\mathcal{P}$ , il existe  $\mathcal{P}' \in \mathcal{F}$  et une face  $F'$  de  $\mathcal{P}'$  telle que  $\gamma_F|_F : F \rightarrow F'$  préserve la structure cellulaire,  $\gamma_{F'} = \gamma_F^{-1}$ , et l'image de  $\mathcal{P}$  par  $\gamma_F$  est à l'extérieur de  $\mathcal{P}'$ . On suppose dans la suite que les  $\mathcal{P}_i$  ont un nombre fini de faces et de points à l'infini. En particulier, tous leurs points à l'infini sont des sommets idéaux (cf. proposition 2.2.7).

Les hypothèses à vérifier pour une famille de polyèdres sont semblables à celles de la version classique. Les cycles d'arêtes se calculent de la même façon. La somme des angles dièdres le long d'un cycle d'arêtes doit être de la forme  $2\pi/k$  : la transformation de cycle  $t$  correspondante est alors une rotation d'angle  $2\pi/k$  et vérifie la relation de cycle  $t^k = id$ . La complétude de  $Z$  se vérifie par l'existence d'horosphères cohérentes pour la famille de polyèdres  $\mathcal{F}$ , centrées en les sommets à l'infini de tous les polyèdres  $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ .

La seule différence est l'ajout d'une condition de connexité sur l'espace obtenu en quotientant l'union disjointe des polyèdres par les identifications de faces. L'hypothèse suivante doit donc être vérifiée : quels que soient  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  des éléments de la famille, on peut trouver une face  $F$  de  $\mathcal{P}$ , une face  $F'$  de  $\mathcal{P}'$  et une suite finie d'identifications de faces reliant  $F$  à  $F'$ .

La conclusion du théorème est légèrement modifiée, notamment pour définir le groupe engendré par les identifications de faces. La première étape consiste à recoller les différents polyèdres  $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ . Soit  $G$  le graphe dont les sommets sont les éléments de  $\mathcal{F}$ , et dont les arêtes correspondent aux identifications de faces  $\gamma_F : F \subset \mathcal{P} \rightarrow F' \subset \mathcal{P}'$  (le graphe est non orienté : les arêtes pour  $\gamma_F$  et  $\gamma_F^{-1}$  sont identifiées). Par hypothèse,  $G$  est connexe, donc il admet un arbre couvrant  $T$ . L'arbre  $T$  décrit comment recoller les polyèdres  $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$  : on définit l'espace  $Y$  comme le quotient de l'union disjointe  $\sqcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{F}} \mathcal{P}$  par les identifications de faces correspondant aux arêtes de  $T$ .  $Y$  peut être développé dans  $\mathbb{H}^n$  : étant donné un élément  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{F}$  choisi comme polyèdre de base, on peut recoller pas à pas les autres polyèdres de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{P}_0$  en suivant les arêtes de  $T$ . L'espace recollé  $\mathcal{P}_r$  n'est a priori pas forcément plongé dans  $\mathbb{H}^n$  : le plongement (de l'intérieur de  $Y$ , au sens de la définition 4.11 de [EP94]) sera en fait une conséquence du théorème de Poincaré.

Une fois choisis un arbre  $T$  et un développement de  $Y$  dans  $\mathbb{H}^n$ , on peut construire le groupe  $\Gamma$  engendré par les identifications de faces (voir [EP94] p.137 pour une définition abstraite). Heuristiquement, l'espace recollé  $\mathcal{P}_r$  peut être vu comme un polyèdre, et les identifications de faces entre les polyèdres  $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$  induisent des identifications de faces pour  $\mathcal{P}_r$ . Elles sont construites à partir des identifications de faces  $\gamma_F$  de la façon suivante : soient  $F \subset \mathcal{P}$  et  $F' \subset \mathcal{P}'$  deux faces reliées par l'isométrie  $\gamma_F$ . Notons  $\tau$  et  $\tau'$  les isométries de recollement de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  dans  $\mathcal{P}_r$  :  $\mathcal{P}_r$  contient les copies  $\tau(\mathcal{P})$  et  $\tau'(\mathcal{P}')$ . Alors  $\gamma_F$  est remplacée par l'isométrie

$$\delta_F = \tau' \cdot \gamma_F \cdot \tau^{-1}$$

qui est bien une identification de faces entre  $\tau(F)$  et  $\tau'(F')$ . Noter que les identifications

de faces correspondant aux arêtes de l'arbre  $T$  sont remplacées par l'identité. Le groupe  $\Gamma$  est le groupe engendré par les  $\delta_F$ , pour tout  $F \subset \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ .

Le groupe  $\Gamma$  ainsi défini ne dépend pas des choix effectués pour sa construction, à conjugaison près. Un choix différent du polyèdre de base  $\mathcal{P}_0$  donne un groupe  $\Gamma'$ , conjugué de  $\Gamma$  par une isométrie. Le choix de l'arbre  $T$  ne modifie pas le groupe  $\Gamma$ , mais donne des identifications de faces différentes, donc une présentation différente après application du théorème de Poincaré.

Dans ce contexte, le théorème du polyèdre de Poincaré s'écrit donc :

**Théorème 2.2.10.** *Soit  $\mathcal{F} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m\}$  une famille finie de polyèdres hyperboliques. On suppose que les  $\mathcal{P}_i$  ont un nombre fini de faces, que tous leurs points à l'infini sont des sommets idéaux, et que  $\mathcal{F}$  est munie d'un système d'identifications de faces  $\{\gamma_F \mid F \text{ face de } \mathcal{P}_i, i = 1, \dots, m\}$  comme ci-dessus. Si les identifications de faces vérifient la condition de connexité, les conditions de cycles, et s'il existe un système d'horosphères cohérentes pour  $\mathcal{F}$ , alors :*

- le groupe  $\Gamma$  construit ci-dessus est discret, et  $\mathcal{P}_r$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma$ ,
- une présentation de  $\Gamma$  pour les générateurs  $\{\delta_F\}$  est donnée par les relations obtenues en remplaçant les  $\gamma_F$  par les  $\delta_F$  dans les relations de paires et les relations de cycles.

### 2.2.3 L'algorithme de Vinberg

La référence principale pour cette partie est l'article de Vinberg [Vin75].

**Présentation de l'algorithme** Dans cette partie, la forme quadratique  $q$  de signature  $(n, 1)$  est supposée entière : la matrice qui la représente est à coefficients entiers. Le groupe  $O^+(q, \mathbb{Z})$  des isométries entières pour  $q$  qui préservent les deux nappes de l'hyperboloïde  $\{q(x) = -1\}$  est alors un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Soit  $G := \text{Ref}(O^+(q, \mathbb{Z}))$  le sous-groupe engendré par les réflexions appartenant à  $O^+(q, \mathbb{Z})$ . Etant donné un polyèdre fondamental  $\mathcal{P}$  pour  $G$  dans  $\mathbb{H}^n$ , et  $S$  le groupe d'automorphismes de  $\mathcal{P}$ , on a

$$O^+(q, \mathbb{Z}) = G \rtimes S', \quad \text{où } S' \text{ est un sous-groupe de } S.$$

Lorsqu'il termine, l'algorithme de Vinberg décrit dans la suite permet de trouver un polyèdre fondamental explicite pour le sous-groupe de réflexions  $G$ . C'est un polyèdre de Coxeter, bordé par les miroirs de certaines réflexions de  $G$ . Ceci donne une présentation de Coxeter pour  $G$ .

L'algorithme se déroule en trois étapes principales, décrites dans [Vin75] :

Étape 1 : choix d'un point  $p_0 \in \mathbb{H}^n$  (en pratique, souvent choisi pour avoir un "gros" stabilisateur, voir l'étape 2).

Étape 2 : construction d'un polyèdre fondamental pour  $G_{p_0}$ , le stabilisateur de  $p_0$  dans  $G$ . Ce polyèdre peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{P}_{p_0} = \bigcap_{j=1}^m H_j^-$$

où les  $H_j^-$  sont des demi-espaces bordés par des miroirs d'éléments de  $G$ . Les hyperplans  $H_j^-$  correspondants sont tous supposés essentiels : pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathcal{P}_{p_0} \neq \bigcap_{j=1, j \neq i}^m H_j^-$ .

Étape 3 : construction pas à pas de demi-espaces  $H_j^-$  pour obtenir  $\mathcal{P} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} H_j^-$ . Supposons construit le polyèdre  $\mathcal{P}^{(k)} = \bigcap_{j=1}^k H_j^-$ ,  $k \geq m$ . Le demi-espace  $H_{k+1}^-$ , et l'hyperplan correspondant  $H_{k+1}$ , sont alors choisis tels que :

- $H_{k+1}$  est le miroir d'une réflexion appartenant à  $G$ ,
- $H_{k+1}^-$  est le demi-espace bordé par  $H_{k+1}$  contenant  $p_0$ ,
- $H_{k+1}^-$  est *opposé* à tous les  $H_j^-$  pour  $1 \leq j \leq k$  :  $\langle v_{k+1}, v_j \rangle \leq 0$  pour tout  $1 \leq j \leq k$ , où  $v_j$  désigne la polaire associée au demi-espace  $H_j^-$ ,
- parmi les hyperplans  $H$  vérifiant les conditions précédentes,  $H_{k+1}$  minimise la distance hyperbolique  $d(p_0, H)$ .

On pose alors  $\mathcal{P}^{(k+1)} = \bigcap_{j=1}^{k+1} H_j^-$ , et on revient au début de l'étape 3.

Résultat : Le polyèdre  $\mathcal{P} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} H_j^-$  est un domaine fondamental pour  $G$ .

L'algorithme de Vinberg ne termine pas forcément en un nombre fini d'étapes. Il existe cependant des critères de terminaison de l'algorithme. Celui qui nous sera utile dans la suite est le suivant : si  $\mathcal{P}^{(k)}$  est de volume fini pour un certain  $k \geq m$ , alors l'algorithme termine et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(k)}$ .

**Quelques remarques pratiques** La mise en place effective de l'algorithme repose sur quelques remarques qui permettent d'effectuer les différentes étapes.

La condition cristallographique : l'application de l'algorithme de Vinberg nécessite de pouvoir déterminer les réflexions de  $G$  vérifiant certaines conditions. Dans le cas où  $G$  est le groupe de réflexions de  $O^+(q, \mathbb{Z})$ , les polaires d'éléments de  $G$  vérifient une condition arithmétique, utile pour déterminer réflexions pouvant apparaître aux étapes 2 et 3 de l'algorithme. Soit donc  $R_v \in G$  une réflexion de polaire  $v$ .  $R_v$  est à coefficients entiers, donc  $v$  peut être choisie *primitive*, c'est-à-dire à coefficients entiers et premiers entre eux. Il existe seulement deux polaires primitives, opposées l'une de l'autre. Notons  $e_j$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n,1}$  :  $e_j$  est à coefficients entiers, donc  $R_v(e_j)$  aussi. Donc d'après la définition de  $R_v$ ,

$$\forall 1 \leq i, j \leq n+1, \quad 2 \cdot \frac{\langle v, e_j \rangle}{\langle v, v \rangle} v_i \in \mathbb{Z}$$

Le coefficient  $2\langle v, e_j \rangle / \langle v, v \rangle$  est rationnel. Mais  $v$  est supposée primitive, donc le seul diviseur commun des  $v_i$  est 1 : ce coefficient est donc en fait entier. C'est la condition cristallographique :

$$(2.2) \quad \forall 1 \leq j \leq n+1, \quad 2 \cdot \frac{\langle v, e_j \rangle}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z}$$

Distance à un hyperplan : la distance entre deux points  $x$  et  $y$  de l'espace hyperbolique est donnée par

$$\cosh^2(d(x, y)) = \frac{\langle X, Y \rangle^2}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle} \text{ où } X, Y \in \mathbb{R}^{n,1} \text{ sont des relevés de } x \text{ et } y.$$

Soit  $x \in \mathbb{H}^n$ , et  $v \in \mathbb{R}^{n,1}$  la polaire d'un hyperplan hyperbolique  $H_v$ . La distance de  $x$  à  $H_v$  est égale à la distance  $d(x, \pi_v(x))$ , où  $\pi_v(x)$  est la projection orthogonale de  $x$  sur l'hyperplan  $H_v$ . Pour tout relevé  $X \in \mathbb{R}^{n,1}$  de  $x$ , la projection orthogonale usuelle  $\pi_v(X) = X - \frac{\langle X, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \in \mathbb{R}^{n,1}$  est un relevé de  $\pi_v(x)$ . Donc

$$\cosh^2(d(x, H_v)) = \frac{\langle X, \pi_v(X) \rangle^2}{\langle X, X \rangle \langle \pi_v(X), \pi_v(X) \rangle} = \frac{\langle \pi_v(X), \pi_v(X) \rangle^2}{\langle X, X \rangle \langle \pi_v(X), \pi_v(X) \rangle} = 1 - \frac{\langle X, v \rangle^2}{\langle X, X \rangle \langle v, v \rangle}$$



Finalement :

$$\sinh^2(d(x, H_v)) = \frac{\langle X, v \rangle^2}{\langle X, X \rangle \langle v, v \rangle}$$

Dans l'algorithme de Vinberg, ordonner les hyperplans par distance croissante à  $p_0$  (de relevé  $P_0$ ) revient donc à les ordonner de manière croissante pour la quantité

$$\frac{\langle P_0, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle}$$

Symétries du diagramme de Coxeter : si le polyèdre  $\mathcal{P}$  obtenu admet des symétries, elles se traduisent par des automorphismes du diagramme de Coxeter, et réciproquement. Si une telle symétrie est entière, alors elle préserve les normes des polaires primitives. En particulier, si le diagramme de Coxeter de  $\mathcal{P}$ , muni des normes des polaires primitives associées, n'admet pas de symétries, alors le groupe  $G = \text{Ref}(O^+(q, \mathbb{Z}))$  est égal à  $O^+(q, \mathbb{Z})$ .

La section 2.4.2.1 présente un exemple détaillé d'application de l'algorithme de Vinberg.

Dans la suite du chapitre, pour chaque forme quadratique  $q$ , toutes les isométries  $A \in O(q, \mathbb{Z})$  rencontrées préserveront les nappes de l'hyperboloïde correspondant. Sauf en cas d'ambiguïté, on oublie alors l'exposant  $+$  de  $O^+(q, \mathbb{Z})$  :  $O(q, \mathbb{Z})$  représentera alors exactement le groupe des isométries de  $\mathbb{H}^n$ .

## 2.3 L'espace de modules des métriques plates sur $\mathbb{S}^2$ à 6 singularités d'angles égaux

Cette section a pour objet l'étude des métriques plates symétriques sur  $\mathbb{S}^2$  à 6 singularités coniques de même angle  $\theta$ , non ordonnées. D'après la formule de Gauss-Bonnet (2.1),  $\theta = 4\pi/3$ . Soit  $(M, d, \sigma)$  une telle métrique. Les singularités sont de même angle, donc peuvent toutes être échangées par  $\sigma$ . Quatre types de métriques apparaissent donc naturellement, suivant le nombre de paires de singularités conjuguées par l'involution  $\sigma$ . Une métrique avec  $k$  paires de singularités conjuguées,  $0 \leq k \leq 3$ , sera appelée *métrique de type  $k$* .

Le but de cette partie est d'étudier l'espace de modules  $\mathcal{M}$  des métriques symétriques à 6 singularités coniques distinctes de même angle, modulo la relation d'équivalence de la définition 2.1.3. Pour  $0 \leq k \leq 3$ , notons  $\mathcal{M}_k$  l'espace de modules des métriques de type  $k$ . On montre que les  $\mathcal{M}_k$  sont en bijection avec des quotients de  $\mathbb{H}^3$  privé d'une famille d'hyperplans, par un réseau de la forme  $O(q_k, \mathbb{Z})$  pour une certaine forme quadratique  $q_k$ . Le tiré en arrière de la structure hyperbolique permet de définir une topologie sur les  $\mathcal{M}_k$ , et donc une topologie sur  $\mathcal{M}$  pour laquelle les  $\mathcal{M}_k$  sont les composantes connexes. Les complétions métriques des  $\mathcal{M}_k$  sont les orbifolds arithmétiques  $\mathbb{H}^3/O(q_k, \mathbb{Z})$ , et les points ajoutés dans la complétion correspondent à des métriques dégénérées (voir section 2.1.5), i.e. pour lesquelles deux singularités (ou plus) coïncident.

Dans un deuxième temps, on considère l'espace des métriques obtenu lorsqu'on admet ces dégénérescences. Pour obtenir cet espace de modules "total", il suffit de recoller les complétés des composantes  $\mathcal{M}_k$  suivant des hypersurfaces correspondant aux métriques dégénérées. Le résultat est à nouveau un orbifold hyperbolique, non arithmétique.

On étudie enfin les coïncidences entre les singularités qui peuvent se produire dans ce contexte, et on montre que la construction précédente donne une description des espaces de modules des différents types de métriques dégénérées comme orbifolds hyperboliques de dimension inférieure.

### 2.3.1 Des métriques aux polygones

D'après la section 2.1.4, à chaque métrique symétrique peut être associée un polygone euclidien, obtenu en développant un hémisphère de la métrique dans  $\mathbb{R}^2$ , éventuellement après découpage suivant un système de géodésiques. On applique donc les résultats de la section 2.1.4 pour déterminer les polygones associés à chaque type de métriques symétriques à 6 singularités.

**Métriques de type 0** Soit  $(M, d, \sigma)$  une métrique de type 0 : toutes les singularités  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , sont sur l'équateur  $\mathcal{C}$ . D'après la proposition 2.1.7, un hémisphère de  $(M, d, \sigma)$  est donc isométrique par une application développante à un hexagone dont tous les angles valent  $2\pi/3$ , voir Figure 2.8. Un tel hexagone sera dit *hexagone de type 0*.

**Définition 2.3.1.**  $\mathcal{I}_0$  est l'ensemble des classes d'équivalence, au sens de la définition 2.1.8, d'hexagones de type 0 : ce sont des classes de similitudes dans ce cas (il n'y a pas de singularités non équatoriales).

D'après la proposition 2.1.9, l'espace de modules  $\mathcal{M}_0$  des métriques symétriques de type 0 est en bijection avec  $\mathcal{I}_0$ .

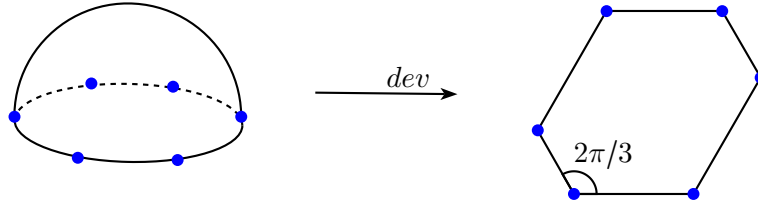


FIGURE 2.8 – Hexagone de type 0 obtenu en développant un hémisphère d’une métrique de type 0.

**Métriques de type 1** Soit maintenant  $(M, d, \sigma)$  une métrique de type 1 : il y a quatre singularités sur l’équateur  $\mathcal{C}$ , et une paire de singularités conjuguées. Étant donnée  $l$  une géodésique symétrique entre les deux singularités conjuguées, on peut ouvrir un hémisphère de  $(M, d, \sigma)$  suivant  $l$ . L’espace obtenu est isométrique à un hexagone dont tous les angles font  $2\pi/3$ , auquel on ôte un triangle isocèle orthogonal au bord, voir Figure 2.9. Un tel polygone sera appelé *polygone de type 1*.

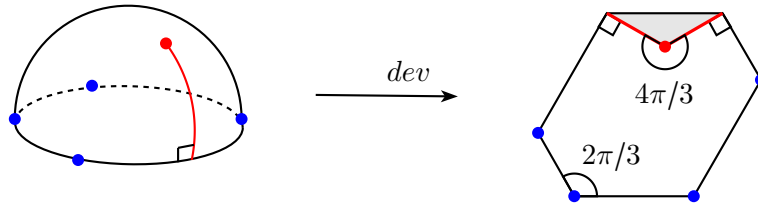


FIGURE 2.9 – Polygone de type 1 obtenu en développant un hémisphère après découpe suivant la géodésique  $l$ .

**Définition 2.3.2.**  $\mathcal{I}_1$  est l’ensemble des classes de polygones de type 1 à similitude et découpe suivant une autre géodésique près, voir définition 2.1.8.

D’après la proposition 2.1.9, l’espace de modules  $\mathcal{M}_1$  des métriques symétriques de type 1 est en bijection avec  $\mathcal{I}_1$ . Les différentes géodésiques existant dans une telle métrique (ou polygone) seront étudiées plus en détail au paragraphe 2.3.2.3.

**Métriques de type 2** Les métriques de type 2 admettent deux singularités équatoriales, et deux paires de singularités conjuguées. Pour développer une telle métrique, il faut choisir deux géodésiques disjointes entre les singularités conjuguées. Suivant la position des singularités équatoriales entre les géodésiques, on voit apparaître deux types de polygones : les *polygones de type 2(i)*, lorsque les géodésiques de découpe ne séparent pas les singularités équatoriales, et les *polygones de type 2(ii)* lorsque les singularités équatoriales sont séparées, voir Figure 2.10.

En général, une même métrique peut être représentée par des polygones de type différent, suivant les géodésiques choisies pour la découpe.

**Définition 2.3.3.**  $\mathcal{I}_2$  est l’ensemble des classes de polygones de type 2(i) et 2(ii) à similitude et changement de géodésiques de découpe près, voir définition 2.1.8.

L’espace de modules  $\mathcal{M}_2$  des métriques de type 2 est en bijection avec  $\mathcal{I}_2$  d’après la proposition 2.1.9. L’étude de l’influence du choix des géodésiques sur les polygones obtenus sera faite section 2.3.2.4.

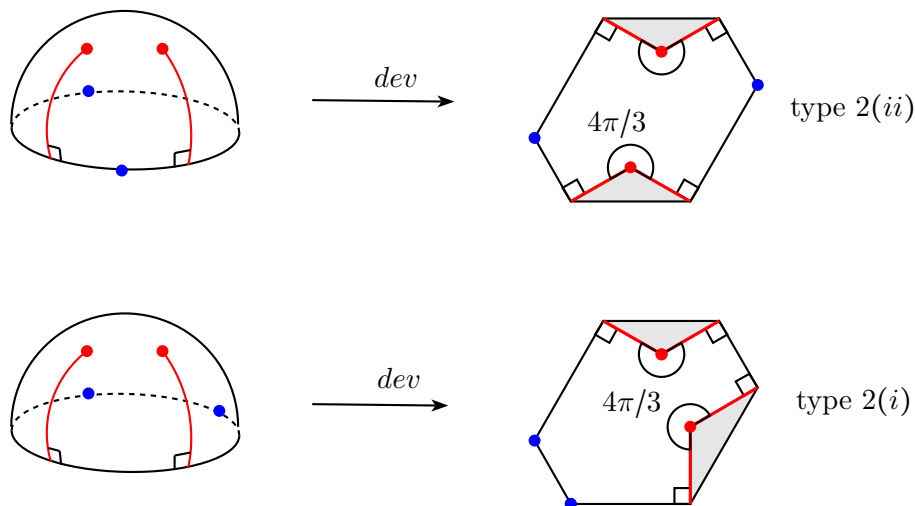


FIGURE 2.10 – Polygones de type  $2(i)$  et  $2(ii)$  obtenus en développant une métrique de type 2.

**Métriques de type 3** Une métrique de type 3 admet trois paires de singularités conjuguées, et aucune singularité équatoriale. Les polygones obtenus sont appelés *polygones de type 3*, voir Figure 2.11. L'espace  $\mathcal{I}_3$  est défini comme l'ensemble des classes de polygones de type 3, à similitude et changements de géodésiques de découpe près. L'espace de modules  $\mathcal{M}_3$  des métriques de type 3 est en bijection avec  $\mathcal{I}_3$ , d'après la proposition 2.1.9.

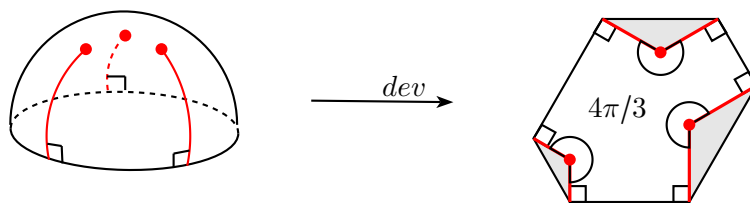


FIGURE 2.11 – Polygone de type 3 obtenu en développant une métrique de type 3.

### 2.3.2 Description des composantes

Les polygones obtenus par développement permettent de décrire explicitement les composantes  $\mathcal{M}_k$  de l'espace de modules des métriques plates symétriques sur  $\mathbb{S}^2$  à six singularités d'angles égaux, grâce aux bijections entre les  $\mathcal{M}_k$  et les espaces de polygones  $\mathcal{I}_k$ . On montre dans cette partie que chaque composante  $\mathcal{M}_k$  est identifiée à un ouvert d'un orbifold de Coxeter hyperbolique de dimension 3 à bord (ou à un quotient d'un tel orbifold), et que la complétion métrique de  $\mathcal{M}_k$  est exactement l'orbifold correspondant. Les orbifolds qui apparaissent sont ceux obtenus par Allcock, Carlson et Toledo dans [ACT07] : on retrouve donc leurs résultats par une méthode relativement combinatoire, qui n'utilise pas la théorie de Hodge.

Le paramétrage des composantes est inspiré de la méthode décrite au début de l'article [Thu98] de Thurston. On présente dans un premier temps cette méthode, avant de décrire chacune des composantes.

### 2.3.2.1 L'exemple de Thurston

Considérons l'ensemble des hexagones du plan euclidien non dégénérés, dont les côtés sont parallèles à ceux de l'hexagone régulier standard de sommets  $\{e^{2ik\frac{\pi}{6}} \mid k = 0, \dots, 5\}$ , modulo les homothéties du plan. Ces hexagones peuvent être vus comme un triangle équilatéral auquel on a ôté trois petits triangles équilatéraux, un à chaque sommet, voir Figure 2.12. Un hexagone est donc défini par trois paramètres : la longueur  $n$  des côtés du triangle équilatéral, et les longueurs  $x_1, x_2, x_3$  des côtés des petits triangles ôtés, placés comme sur la Figure 2.12.

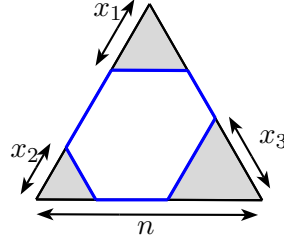


FIGURE 2.12 – Définition des paramètres décrivant un hexagone.

Chaque hexagone définit donc un unique quadruplet de paramètres. Réciproquement, sous quelles conditions un quadruplet  $(n, x_1, x_2, x_3)$  définit un hexagone non dégénéré ? Il faut et il suffit pour cela que toutes les longueurs des côtés de l'hexagone potentiel soient strictement positives, ce qui donne le système d'inégalités suivant :

$$(2.3) \quad \begin{cases} 0 < x_1, & 0 < x_2, & 0 < x_3 \\ x_1 + x_2 < n, & x_1 + x_3 < n, & x_2 + x_3 < n \end{cases}$$

Si ces conditions sont vérifiées, le quadruplet  $(n, x_1, x_2, x_3)$  détermine un unique hexagone. L'ensemble des hexagones considérés est donc en bijection avec le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^4$  défini par le système (2.3). Toutes les inéquations sont linéaires, donc ce système définit l'intérieur d'un polyèdre de  $\mathbb{R}^4$ , noté  $P_T$ .

On étudie l'espace de modules des hexagones à homothéties près, il faut donc quotienter  $P_T$  par l'action des scalaires positifs (il est clair qu'une homothétie entre deux hexagones se traduit par une homothétie des paramètres). Pour définir une structure hyperbolique sur l'espace de modules, il suffit alors de trouver une forme quadratique de signature  $(3, 1)$  pour laquelle les points de  $P_T$  sont strictement négatifs : l'image projective de  $P_T$  sera un polyèdre hyperbolique. Une telle forme quadratique est obtenue en considérant l'aire des hexagones. On définit l'aire unité comme l'aire d'un triangle équilatéral de côté 1 : un triangle équilatéral de côté  $n$  est d'aire  $n^2$ . L'aire d'un hexagone  $S$  donné par les paramètres  $(n, x_1, x_2, x_3)$  est donc

$$\mathcal{A}(S) = n^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -q_0(n, x_1, x_2, x_3)$$

où  $q_0$  est la forme lorentzienne standard sur  $\mathbb{R}^4$ . L'aire d'un hexagone non dégénéré est strictement positive, donc les points de  $P_T$  sont négatifs pour  $q_0$ . L'espace de modules des hexagones est donc en bijection avec un polyèdre hyperbolique (ouvert)  $\mathcal{P}_T \subset \mathbb{H}^3$ , qui est le projectivisé de  $P_T$ .  $\mathcal{P}_T$  est obtenu comme l'intersection de 6 demi-espaces  $H_{v_i}^-$  de polaires  $v_i$  (voir notations section 2.2.1) données par

$$(2.4) \quad \begin{aligned} v_1 &= (0, -1, 0, 0), & v_2 &= (0, 0, -1, 0), & v_3 &= (0, 0, 0, -1) \\ v_4 &= (1, 1, 1, 0), & v_5 &= (1, 1, 0, 1), & v_6 &= (1, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

Les angles dièdres entre les faces sont aisément calculables d’après la proposition 2.2.2 : le polyèdre  $\mathcal{P}_T$  est un polyèdre de Coxeter, donné par le diagramme Figure 2.13. (La numérotation des sommets correspond à celle des polaires.)

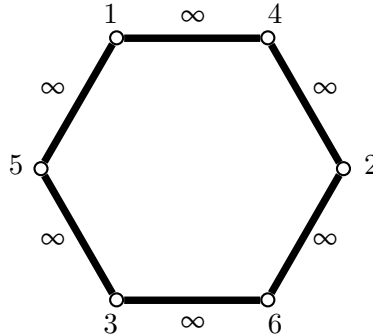


FIGURE 2.13 – Diagramme de Coxeter du polyèdre  $\mathcal{P}_T \subset \mathbb{H}^3$ .

Les facettes de  $\mathcal{P}_T$  ont une interprétation naturelle en termes d’hexagones dégénérés (voir section 2.1.5), puisqu’elles correspondent à des paramètres pour lesquels un ou plusieurs côtés de l’hexagone sont de longueur nulle. Les faces (codimension 1) représentent les dégénérescences en pentagone, les arêtes (codimension 2) représentent les dégénérescences en quadrilatère, et les sommets correspondent aux dégénérescences en triangle (si le sommet est dans  $\mathbb{H}^3$ ) ou en segment (sommet à l’infini, puisque dans ce cas l’aire du polygone est nulle).  $\mathcal{P}_T$  admet donc deux sommets finis, donnés en coordonnées homogènes par  $[1, 0, 0, 0]$  et  $[1, 1/2, 1/2, 1/2]$ , et trois sommets à l’infini  $[1, 1, 0, 0]$ ,  $[1, 0, 1, 0]$  et  $[1, 0, 0, 1]$ . En particulier,  $\mathcal{P}_T$  est de volume fini d’après la proposition 2.2.7, et non compact.

*Remarque 2.3.4.* Dans cet exemple, les polygones considérés sont marqués, et les seules conditions sont les prescriptions des angles. L’espace de modules est donc un des espaces de Bavard et Ghys [BG92]. On retrouve bien le polyèdre  $\mathcal{P}_T$  dans la liste des orthoschèmes de Coxeter (dimension 3, type III).

Dans la suite, on utilise une variante du paramétrage de Thurston pour décrire les composantes  $\mathcal{M}_k$  de l’espace de modules  $\mathcal{M}$ . Les polygones sont étudiés modulo homothéties, mais aussi isométries et changements de géodésiques de découpe.

### 2.3.2.2 Métriques de type 0

**Construction d’un polyèdre** Une métrique de type 0 peut être décomposée en deux hémisphères isométriques à un hexagone de type 0 (hexagone dont tous les angles sont de  $2\pi/3$ , voir section 2.3.1), recollés suivant leur bord.  $\mathcal{M}_0$  est en bijection avec  $\mathcal{I}_0$ , l’ensemble des classes de similitudes d’hexagones de type 0. On étudie donc  $\mathcal{I}_0$ . Noter que l’on commence par l’étude des classes d’isométrie d’hexagones, le quotient par les homothéties sera effectué seulement à la fin.

Un hexagone de type 0 est dit “en position standard” si son barycentre est à l’origine et ses côtés parallèles aux côtés de l’hexagone standard décrit au paragraphe précédent. Comme indiqué Figure 2.12, un tel hexagone est décrit par 4 paramètres  $(n, x_1, x_2, x_3)$ . On cherche des conditions sur ces paramètres pour obtenir une bijection entre  $\mathcal{I}_0$  et l’ensemble des paramètres (après quotient par les scalaires). Le système d’inéquations (2.3) est nécessaire pour assurer la non-dégénérescence des hexagones, mais il n’est plus suffisant : des paramètres différents peuvent représenter deux hexagones isométriques.

Une classe d'isométrie d'hexagones de type 0 admet (au plus) 12 représentants en position standard. Ces représentants diffèrent par un élément du groupe diédral  $D_6$ , engendré par la rotation d'ordre 6 et la symétrie par rapport à l'axe vertical. Heuristiquement, il y a 6 choix possibles pour le côté horizontal supérieur de l'hexagone, et deux choix d'orientation. La symétrie verticale a pour effet d'échanger les deux paramètres  $x_2$  et  $x_3$ . En revanche, la rotation modifie le triangle utilisé pour le paramétrage, voir Figure 2.14.

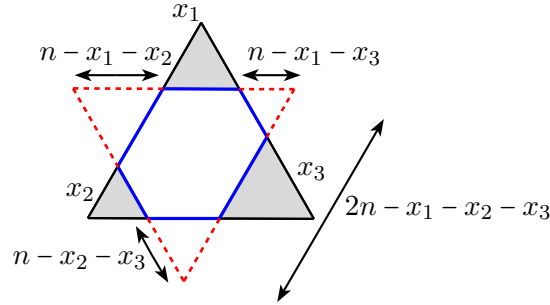


FIGURE 2.14 – Après rotation, le triangle de paramétrage est modifié.

Pour trouver un paramétrage unique pour chaque classe d'hexagones, on peut imposer les conditions suivantes :

- le côté horizontal supérieur de l'hexagone est de longueur minimale parmi les côtés (cette condition fixe alors le triangle de paramétrage),
- l'orientation est déterminée par la condition  $x_2 \leq x_3$ .

Ceci se traduit par les inégalités suivantes :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3, \quad x_1 \leq x_3, \quad x_1 \leq n - x_1 - x_2, \quad x_1 \leq n - x_1 - x_3, \quad x_1 \leq n - x_2 - x_3$$

Sauf cas d'égalité, ces conditions déterminent un paramétrage unique étant donnée une classe d'isométrie d'hexagones. En les combinant avec le système (2.3) et en omettant les conditions superflues, on obtient le système suivant :

$$(2.5) \quad P_0 \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \quad \text{hexagones non dégénérés} \\ x_1 \leq x_2 & (2) \\ x_2 \leq x_3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq n & (4) \end{array} \right\} \quad \text{unicité du paramétrage d'une classe}$$

Ce système définit un polyèdre de  $\mathbb{R}^4$ , noté  $P_0$ . Il a quatre faces, que l'on note  $F_j^0$ ,  $1 \leq j \leq 4$  :  $F_j^0$  est la face correspondant à l'inégalité (j) du système (2.5) (l'exposant 0 fait référence au type des métriques étudiées). Noter que la face  $F_1^0$  est exclue du polyèdre, puisque l'inégalité (1) est stricte.

*Remarque 2.3.5.* On appellera *face fermée* de  $P_0$  toute face donnée par une inégalité large, et *faces ouvertes* les faces données par une inégalité stricte.

L'étude précédente montre que l'application

$$\psi_0 : \begin{array}{ll} P_0 / \mathbb{R}_{>0} & \rightarrow \mathcal{I}_0 \\ [(n, x_1, x_2, x_3)] & \mapsto [\text{hexagone de paramètres } (n, x_1, x_2, x_3)] \end{array}$$

est injective sur l'intérieur de  $P_0$  (modulo les scalaires). Il reste à traiter le bord de  $P_0$ , qui correspond à des hexagones dont certains côtés sont de même longueur.

**Changements de paramétrage** Chaque face fermée de  $P_0$  correspond à un cas d'égalité entre les longueurs de deux côtés du polygone, qui induit une ambiguïté pour la définition du paramétrage. Cette ambiguïté est associée à un changement de paramétrage naturel, qui consiste à choisir le deuxième côté comme côté de référence lors de la mise en place du paramétrage. Ces changements de paramétrage, notés  $\tau_j^0$ , sont linéaires en les paramètres.

Considérons par exemple la face  $F_3^0 = \{x_2 = x_3\}$  : l'ambiguïté porte sur le choix de l'orientation du polygone, et le changement de paramétrage associé correspond au choix de  $x_3$  au lieu de  $x_2$ .  $x_1$  est toujours choisi comme le côté de longueur minimale.  $\tau_3^0$  est donc défini par

$$\tau_3^0 : \begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} n \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ ou sous forme matricielle, } \tau_3^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair, géométriquement et algébriquement, que  $\tau_3^0$  est une involution et identifie la face  $F_3^0$  avec elle-même.

On fait de même pour  $\tau_4^0$ . La face  $F_4^0$  représente les polygones tels que  $x_1 = n - x_2 - x_3$ . L'ambiguïté porte donc sur le choix du côté horizontal supérieur. Etant donné un hexagone paramétré par  $(n, x_1, x_2, x_3) \in P_0$ , le changement de paramétrage  $\tau_4^0$  correspond donc au choix du côté de longueur  $n - x_2 - x_3$  (opposé au côté de longueur  $x_1$ ) comme côté supérieur horizontal, donc  $\tau_4^0(x_1) = n - x_2 - x_3$ . Ce choix modifie le triangle de paramétrage (voir Figure 2.14) : il est maintenant de longueur  $\tau_4^0(n) = 2n - x_1 - x_2 - x_3$ . Il reste à déterminer  $\tau_4^0(x_2)$  et  $\tau_4^0(x_3)$ , qui doivent vérifier la relation  $\tau_4^0(x_2) \leq \tau_4^0(x_3)$ . Mais puisque  $(n, x_1, x_2, x_3) \in P_0$ ,  $x_2 \leq x_3$ , donc  $n - x_1 - x_3 \leq n - x_1 - x_2$ . Donc  $\tau_4^0(x_2) = n - x_1 - x_3$  et  $\tau_4^0(x_3) = n - x_1 - x_2$ .  $\tau_4^0$  est donc une transformation linéaire des paramètres, donnée sous forme matricielle par

$$\tau_4^0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'action sur les polygones montre que  $\tau_4^0$  est une involution, et qu'elle identifie  $F_4^0$  avec elle-même.

Un raisonnement identique donne l'involution  $\tau_2^0$ , qui envoie  $F_2^0$  sur elle-même :

$$\tau_2^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etant donné un point  $p \in F_j^0$ ,  $\tau_j^0(p)$  est encore un paramétrage de la classe d'isométrie d'hexagones  $\psi_0(p)$  qui vérifie le système d'inégalités (2.5) définissant  $P_0$ . L'ensemble des classes de polygones  $I_0$  est donc en bijection avec le quotient de  $P_0$  par les  $\tau_j^0$ .

**Polyèdre hyperbolique** Comme dans l'exemple de Thurston, l'opposé de l'aire d'un hexagone est la forme quadratique lorentzienne standard  $q_0$  sur  $\mathbb{R}^4$ . Les points de  $P_0$  sont tous négatifs pour  $q_0$  par construction. Le quotient par les homothéties donne donc un polyèdre hyperbolique, noté  $\mathcal{P}_0$ . Les inéquations définissant  $\mathcal{P}_0$  permettent de déterminer



les polaires à chacun des hyperplans portant ses faces, et donc le diagramme de Coxeter correspondant :  $\mathcal{P}_0$  est un simplexe de Coxeter, de diagramme donné par la Figure 2.15.

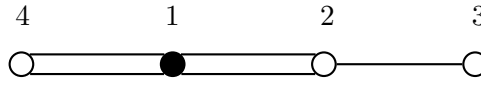


FIGURE 2.15 – Diagramme de Coxeter du polyèdre  $\mathcal{P}_0$ . Le sommet noir correspond à la face ouverte de  $\mathcal{P}_0$ .

$\mathcal{P}_0$  admet un unique sommet à l'infini, correspondant à la dégénérescence d'un polygone en segment, dans la direction du côté de longueur  $x_3$ , donné en coordonnées homogènes par  $[1, 0, 0, 1]$ . Il est donc non cocompact, et de volume fini d'après la proposition 2.2.7. Allcock, Carlson et Toledo donnent dans leur article une représentation graphique très parlante du polyèdre dans le modèle du demi-espace de Poincaré. On reproduit leur dessin Figure 2.16, en ajoutant seulement le numéro des faces du polyèdre correspondant à notre numérotation.

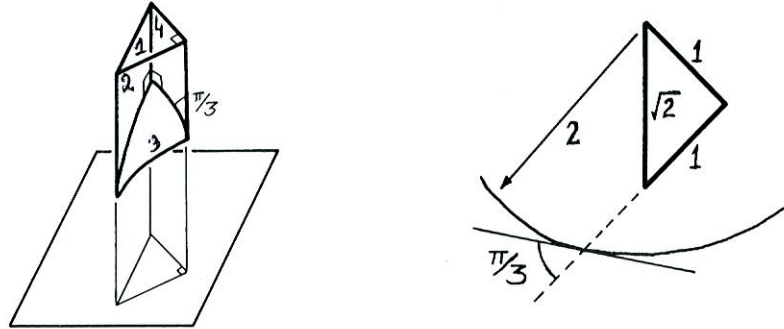


FIGURE 2.16 – Représentation du polyèdre  $\mathcal{P}_0$  dans le modèle du demi-espace de Poincaré, tirée de l'article [ACT07]. Le point à l'infini est choisi pour être le sommet idéal de  $\mathcal{P}_0$ . A gauche : polyèdre en perspective (la cheminée est tronquée pour que la section soit visible). A droite : projection sur le plan à l'infini, avec les longueurs euclidiennes.

Les changements de paramétrage  $\tau_j^0$  préservent l'aire des polygones : ce sont des isométries pour  $q_0$ . On peut donc les voir comme des isométries hyperboliques. Dans ce cas précis, ce sont les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans portant les faces  $F_j^0$ .

**Structure d'orbifold hyperbolique** L'étude précédente montre que l'espace de modules  $\mathcal{M}_0$  est en bijection avec le quotient de  $\mathcal{P}_0$  par les  $\tau_j^0$ ,  $j = 2, 3, 4$ . Les  $\tau_j^0$  sont toutes des réflexions par rapport aux faces de  $\mathcal{P}_0$ , donc ce sont des identifications de faces au sens du théorème de Poincaré (section 1.3). Pour compléter, soit  $\tau_1^0$  la réflexion par rapport à l'hyperplan portant la face  $F_1^0$  de  $\mathcal{P}_0$ . Posons

$$\Gamma_0 = \langle \tau_j^0, j = 1, \dots, 4 \rangle$$

Les  $\tau_j^0$  sont les réflexions par rapport aux faces de  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_0$  est un polyèdre de Coxeter. La version simple du théorème de Poincaré (théorème 2.2.9) montre alors que  $\Gamma_0$  est discret, et que l'adhérence de  $\mathcal{P}_0$  dans  $\mathbb{H}^3$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma_0$ . Finalement :

**Proposition 2.3.6.** *L'espace de modules des métriques de type 0 est en bijection avec l'orbifold hyperbolique  $\mathbb{H}^3/\Gamma_0$ , de diagramme de Coxeter 2.15, privé de l'hypersurface correspondant au sommet noir du diagramme.*

**Identification du groupe  $\Gamma_0$**  Le groupe  $\Gamma_0$  peut être identifié comme un groupe d'isométries explicite, grâce à l'algorithme de Vinberg (voir section 2.2.3). Les  $\tau_j^0$  sont des isométries à coefficients entiers, donc  $\Gamma_0 < O(q_0, \mathbb{Z})$ . L'algorithme de Vinberg peut s'appliquer à  $O(q_0, \mathbb{Z})$  pour déterminer un domaine fondamental de son groupe de réflexions  $Ref(O(q_0, \mathbb{Z}))$ . Les calculs sont effectués dans [Vin75] : l'algorithme termine, et le polyèdre a pour diagramme de Coxeter celui de la Figure 2.15. Ce diagramme n'admet aucun automorphisme, donc  $O(q_0, \mathbb{Z}) = Ref(O(q_0, \mathbb{Z})) = \Gamma_0$ . L'orbifold  $\mathbb{H}^3/\Gamma_0$  est alors arithmétique d'après la définition 1.2.6.

Finalement, on a montré :

**Proposition 2.3.7.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_0$  des métriques de type 0 est en bijection avec l'orbifold arithmétique de Coxeter  $\mathbb{H}^3/O(q_0, \mathbb{Z})$ , privé de l'hypersurface correspondant au sommet noir du diagramme de la Figure 2.15.*

Noter que les points de l'hypersurface ôtée représentent des métriques dégénérées, pour lesquelles deux singularités équatoriales (ou plus, si le point se trouve sur une arête ou un sommet) coïncident, voir section 2.3.4.

### 2.3.2.3 Métriques de type 1

Une métrique de type 1 peut être développée en un polygone de type 1 (hexagone de type 0 auquel on a ôté un triangle isocèle), voir Figure 2.9.  $\mathcal{M}_1$  est en bijection avec  $\mathcal{I}_1$ , l'ensemble des classes de polygones de type 1 à similitude et changement de géodésique de découpe près. La première étape consiste donc à étudier ces changements de géodésiques. Le reste du raisonnement ressemble à celui effectué pour les métriques de type 0.

La Figure 2.17 représente un polygone de type 1 en position standard : la base du triangle isocèle ôté est portée par le côté horizontal supérieur de l'hexagone. Les paramètres  $(n, x_1, x_2, x_3)$  sont définis comme indiqués sur la figure. En particulier,  $x_1$  représente la longueur de la base du triangle ôté.

**Etude des géodésiques** On s'intéresse seulement aux géodésiques entre les deux singularités conjuguées qui sont invariantes par la symétrie, et donc orthogonales à l'équateur. Les images de ces géodésiques sont les segments issus de la singularité non équatoriale, et orthogonaux aux différents côtés du polygone, voir Figure 2.17. (Il n'y a qu'une singularité équatoriale, donc il n'existe pas de géodésiques discontinues, comme Figure 2.5 par exemple.) Il donc existe au plus quatre géodésiques symétriques : la géodésique de découpe  $L_0$ , de longueur  $\ell_0$ , et potentiellement une pour chaque autre composante de l'équateur privé des singularités, notées  $L_1, L_2, L_3$ , de longueurs  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ .

Pour un polygone de type 1 donné, on peut toujours construire les segments  $L_j$  comme les segments orthogonaux aux droites portant les côtés équatoriaux du polygone, et passant par la singularité non équatoriale. Si le point d'intersection entre  $L_j$  et la droite correspondante est dans le polygone, alors  $L_j$  représente bien une géodésique pour la métrique, et on dira que c'est une géodésique symétrique du polygone. Dans le cas contraire (voir par exemple le segment  $L_2$  Figure 2.17), le segment ne représente rien pour la métrique,

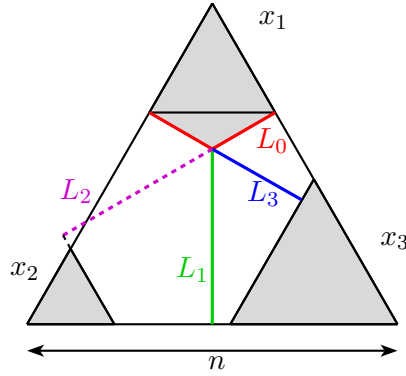


FIGURE 2.17 – Paramétrage d'un polygone de type 1, et géodésiques potentielles entre les singularités conjuguées.  $L_0$  est la géodésique de découpe.

et il n'y a pas de géodésique symétrique passant entre les deux singularités équatoriales correspondantes.

Les longueurs des segments  $L_j$  (qu'ils soient ou non des géodésiques pour la métrique) sont aisément calculables en fonction des paramètres du polygone :

$$(2.6) \quad \ell_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} x_1, \quad \ell_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( n - \frac{4}{3} x_1 \right), \quad \ell_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( n - x_2 - \frac{2}{3} x_1 \right), \quad \ell_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( n - x_3 - \frac{2}{3} x_1 \right)$$

Un changement de géodésique de découpe se traduit par une opération de type "couper-coller" sur les polygones, comme vu section 2.1.4. La Figure 2.18 illustre deux de ces changements de géodésiques. Les paramètres des polygones obtenus après modification sont tous calculables à partir des paramètres  $(n, x_1, x_2, x_3)$  du polygone initial.

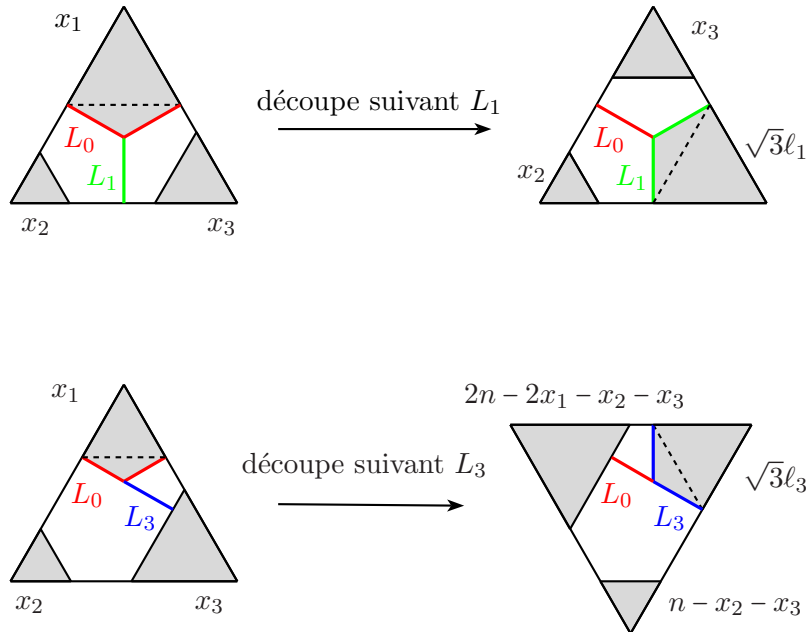


FIGURE 2.18 – Polygones et paramétrages obtenus après découpe suivant une autre géodésique, ici  $L_1$  ou  $L_3$ .

Considérons par exemple la découpe suivant la géodésique  $L_1$ . Pour obtenir le polygone correspondant, il suffit de découper le polygone de départ suivant  $L_1$ , et de recoller les

deux morceaux obtenus suivant les côtés correspondant à  $L_0$ . L'angle au niveau de la singularité non équatoriale est bien  $4\pi/3$ . Toutes les longueurs paramétrant ce nouveau polygone sont connues : les petits triangles sont de taille  $x_2$ ,  $x_3$  et  $\sqrt{3}l_1 = \frac{3}{2}n - 2x_1$ , et le côté du grand triangle est de longueur  $2n - 2x_1$ .

La découpe suivant la géodésique  $L_3$  (ou  $L_2$ ) se fait de la même façon. Noter cependant que dans ce cas, le triangle de paramétrage est modifié. Les longueurs des côtés des petits triangles ôtés sont  $2n - 2x_1 - x_2 - x_3$ ,  $n - x_2 - x_3$  et  $\sqrt{3}l_3 = \frac{3}{2}(n - x_3) - x_1$ , et la longueur des côtés du grand triangle est  $3n - 2x_1 - x_2 - 2x_3$ .

**Construction d'un polyèdre** Pour décrire  $\mathcal{M}_1$ , on paramètre l'espace de polygones  $\mathcal{I}_1$ . On cherche les conditions sur les paramètres qui assurent l'unicité du paramétrage pour une classe de polygones donnée. Il y a trois types de conditions :

1. les conditions (2.3) de l'exemple de Thurston, qui assurent que les polygones ne sont pas dégénérés,
2. les conditions permettant d'isoler un représentant d'une classe d'isométrie de polygones,
3. les conditions pour déterminer la géodésique de découpe.

Une classe d'isométrie de polygones de type 1 a seulement deux représentants en position standard, qui diffèrent par la symétrie d'axe vertical. Une condition du type  $x_2 \leq x_3$  assure (sauf cas d'égalité) de trouver un unique représentant pour la classe d'isométrie.

Pour le troisième type de conditions, il est naturel de demander que la géodésique de découpe soit la plus courte des géodésiques existantes. L'étude des longueurs dans le polygone montre en effet que le segment le plus court parmi les  $L_j$  est toujours une géodésique pour la métrique. Quel que soit le nombre de géodésiques parmi les segments  $L_j$ , cette condition se traduit donc par  $l_0 \leq l_j$  pour  $j = 1, 2$  ou  $3$ . Elle assure de plus que le triangle isocèle ôté au niveau de la singularité non équatoriale soit strictement inclus dans l'hexagone.

Après suppression des inégalités superflues, on obtient le système suivant :

$$(2.7) \quad P_1 \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \\ 0 < x_2 & (2) \\ x_2 + x_3 < n & (3) \\ x_2 \leq x_3 & (4) \\ 2x_1 \leq n & (5) \\ \frac{4}{3}x_1 + x_3 \leq n & (6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{polygone non dégénéré} \\ \text{symétrie du polygone} \\ L_0 \text{ géodésique la plus courte} \end{array}$$

Le polyèdre de  $\mathbb{R}^4$  ainsi défini est noté  $P_1$ , et ses faces sont notées  $F_j^1$  (où  $F_j^1$  est la face correspondant à l'inégalité (j) dans le système (2.7)). Les faces  $F_1^1$ ,  $F_2^1$  et  $F_3^1$  sont exclues du polyèdre, puisque les inégalités associées sont strictes. L'application

$$\psi_1 : \begin{array}{ll} P_1/\mathbb{R}_{<0} & \rightarrow \mathcal{I}_1 \\ [(n, x_1, x_2, x_3)] & \mapsto [\text{polygone de type 1 de paramètres } (n, x_1, x_2, x_3)] \end{array}$$

est injective sur l'intérieur de  $P_1$  (modulo les scalaires) par construction. Il faut quotienter par les changements de paramétrage associés aux faces fermées de  $P_1$  pour obtenir une bijection.

**Changements de paramétrage** Pour  $j = 4, 5, 6$ , la face  $F_j^1$  de  $P_1$  est fermée (voir la remarque 2.3.5), et on note  $\tau_j^1$  le changement de paramétrage associé.

Les  $\tau_j^1$  sont construits de la même façon que pour les métriques de type 0. A chaque face fermée correspond une modification naturelle du paramétrage (changement d'orientation du polyèdre, ou découpe suivant une autre géodésique). Une fois la modification effectuée, on obtient un nouveau polygone dont on connaît toutes les longueurs. La longueur des côtés du grand triangle donne  $\tau_j^1(n)$ . Les longueurs des côtés des trois petits triangles correspondent à  $\tau_j^1(x_1)$ ,  $\tau_j^1(x_2)$  et  $\tau_j^1(x_3)$ , et sont choisis tels que  $\tau_j^1(x_1)$  soit la longueur de la base du triangle ôté, et tels que  $\tau_j^1(x_2) \leq \tau_j^1(x_3)$ . Sous forme matricielle, ces changements de paramétrage sont donnés par :

$$\tau_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_5^1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_6^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -2 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque  $j = 4, 5, 6$ ,  $\tau_j^1$  est une involution qui préserve globalement la face  $F_j^1$ .

**Polyèdre hyperbolique** L'aire d'un polygone de type 1 est égale à l'aire de l'hexagone de type 0 correspondant, moins l'aire du petit triangle ôté, qui est 1/3 de l'aire d'un triangle équilatéral de côté  $x_1$ . L'opposé de l'aire donne à nouveau une forme quadratique de signature (3, 1) :

$$q_1(n, x_1, x_2, x_3) = -n^2 + \frac{4}{3}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Les points de  $P_1$  sont négatifs pour  $q_1$ , et en quotientant par les homothéties on obtient un polyèdre hyperbolique, noté  $\mathcal{P}_1$ . Le calcul des polaires permet de construire le diagramme de  $\mathcal{P}_1$ , donné Figure 2.19. Ce n'est pas un polyèdre de Coxeter : l'angle entre les faces  $F_6^1$  et  $F_4^1$  (respectivement  $F_5^1$ ) vaut  $\alpha = \arccos(\sqrt{6}/4)$  (resp.  $\pi - \alpha$ ).

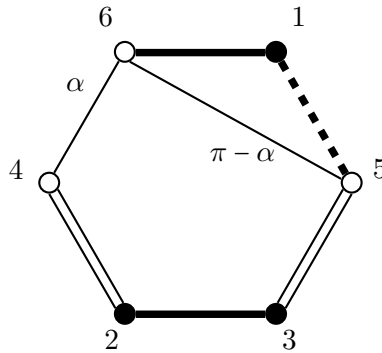


FIGURE 2.19 – Diagramme du polyèdre hyperbolique  $\mathcal{P}_1$ . Les sommets noirs correspondent aux faces ouvertes de  $\mathcal{P}_1$ .

$\mathcal{P}_1$  admet un unique point à l'infini, correspondant aux polygones dégénérés en segments dans la direction de  $x_3$ . Il est donc non compact, et de volume fini d'après la proposition 2.2.7.

Les changements de paramétrage  $\tau_j^1$  préservent l'aire des polygones, ce sont donc des isométries pour la forme quadratique  $q_1$ . Pour les faces  $F_1^1$ ,  $F_2^1$  et  $F_3^1$ , exclues de  $\mathcal{P}_1$ , on

définit comme précédemment  $\tau_j^1$  comme la réflexion par rapport à l'hyperplan portant la face.  $\mathcal{M}_1$  est donc en bijection avec le quotient de  $\mathcal{P}_1$  par les  $\tau_j^1$ , pour  $j = 1, \dots, 6$ .

**Théorème de Poincaré** On voudrait voir l'espace de modules  $\mathcal{M}_1$  comme un orbifold hyperbolique, non complet, puisque certains miroirs de réflexions sont exclus. Les isométries  $\tau_j^1$  sont des identifications de faces naturelles pour le polyèdre  $\mathcal{P}_1$ , par construction : elles identifient deux faces isométriques (dans le cas des  $\tau_j^1$ , une face est toujours identifiée à elle-même), et envoient le polyèdre à l'extérieur de lui-même. Le théorème de Poincaré est donc adapté. Noter que dans ce cas,  $\tau_4^1$  et  $\tau_5^1$  sont les réflexions par rapport aux faces de  $\mathcal{P}_1$  correspondantes, mais que ce n'est pas le cas de  $\tau_6^1$  (elle agit sur la face  $F_6^1$  comme une réflexion par rapport à un axe).

La vérification du reste des hypothèses de Poincaré est aisée : la seule face qui intersecte les autres avec des angles qui ne sont pas sous-multiples de  $\pi$ , et dont l'isométrie associée n'est pas une réflexion, est la face  $F_6^1$ . Il suffit donc de considérer les arêtes portées par cette face :

- $F_6^1 \cap F_1^1$  : les deux faces sont parallèles, donc il n'y a pas d'arête à étudier.
- $F_6^1 \cap F_2^1$  : on obtient le cycle d'arêtes suivant

$$F_6^1 \cap F_2^1 \xrightarrow{\tau_2^1} F_2^1 \cap F_6^1 \xrightarrow{\tau_6^1} F_6^1 \cap F_3^1 \xrightarrow{\tau_3^1} F_3^1 \cap F_6^1 \xrightarrow{\tau_6^1} F_6^1 \cap F_2^1$$

Tous les angles dièdres correspondant sont de  $\pi/2$ , donc la somme fait  $2\pi$ .

- $F_6^1 \cap F_4^1$  : on obtient le cycle d'arêtes suivant

$$F_6^1 \cap F_4^1 \xrightarrow{\tau_4^1} F_4^1 \cap F_6^1 \xrightarrow{\tau_6^1} F_6^1 \cap F_5^1 \xrightarrow{\tau_5^1} F_5^1 \cap F_6^1 \xrightarrow{\tau_6^1} F_6^1 \cap F_4^1$$

L'angle du cycle d'arête est donc  $(\pi - \alpha) + (\pi - \alpha) + \alpha + \alpha = 2\pi$ , où  $\alpha = \arccos(\sqrt{6}/4)$ . Les conditions de cycles sont donc bien vérifiées.

Le polyèdre  $\mathcal{P}_1$  admet un unique point à l'infini, donné en coordonnées homogènes par  $[1, 0, 0, 1]$ . Il est à l'intersection des faces  $F_1^1, F_2^1, F_3^1$  et  $F_6^1$ , donc il suffit de voir (cf. section 2.2.2 et propriété 2.2.8) que les identifications de faces correspondantes préservent le relevé (non homogène)  $(1, 0, 0, 1)$ . C'est bien le cas, donc il existe des horosphères cohérentes. Toutes les hypothèses du théorème sont donc vérifiées.

Soit  $\Gamma_1$  le groupe défini par

$$\Gamma_1 = \langle \tau_j^1, j = 1, \dots, 6 \rangle$$

Le théorème de Poincaré s'applique, donc  $\Gamma_1$  est discret, et l'adhérence de  $\mathcal{P}_1$  dans  $\mathbb{H}^3$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma_1$ .

**Proposition 2.3.8.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_1$  des métriques de type 1 est en bijection avec l'orbifold hyperbolique  $\mathbb{H}^3/\Gamma_1$ , privé des hypersurfaces correspondant aux sommets noirs du diagramme 2.19.*

**Identification du groupe** Le but de ce paragraphe est d'identifier le groupe  $\Gamma_1$  avec le groupe des isométries entières d'une forme quadratique définie sur  $\mathbb{Z}$ , comme fait pour  $\Gamma_0$ . Ceci permet d'obtenir directement l'arithméticité de l'orbifold  $\mathcal{M}_1$ .

Pour construire une forme quadratique à coefficients entiers à partir de  $q_1$ , le changement de coordonnée  $x'_1 = \frac{2}{3}x_1$  apparaît naturellement. On a en effet

$$\begin{aligned} q_1(n, x_1, x_2, x_3) &= -n^2 + \frac{4}{3}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -n^2 + 3\left(\frac{2}{3}x_1\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= -n^2 + 3x_1'^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

Dans ces coordonnées, on obtient donc la forme quadratique entière

$$q'_1(n, x'_1, x_2, x_3) = -n^2 + 3x_1'^2 + x_2^2 + x_3^2$$

La forme matricielle des isométries  $\tau_j^1$  pour ces nouvelles coordonnées est obtenue en conjuguant par la matrice diagonale  $B = \text{diag}(1, 2/3, 1, 1)$ . Les polaires des faces  $F_1^1, \dots, F_5^1$  sont entières et de norme 1 ou 2 dans ces coordonnées, donc les matrices des réflexions  $\tau_j^1$  sont entières pour  $1 \leq j \leq 5$ . On vérifie de plus que  $\tau_6^1$  est aussi de matrice entière dans ces coordonnées. Notons  $\Gamma'_1 = B\Gamma_1 B^{-1}$  :

$$\Gamma'_1 < O(q'_1, \mathbb{Z})$$

Montrons alors l'égalité entre les deux groupes. Le groupe  $O(q'_1, \mathbb{Z})$  est le groupe d'isométries entières d'une forme quadratique entière de signature  $(3, 1)$ , donc l'algorithme de Vinberg (voir section 2.2.3) permet de chercher un domaine fondamental du groupe des réflexions  $\text{Ref}(O(q'_1, \mathbb{Z}))$ . Allcock, Carlson et Toledo donnent le résultat de l'algorithme dans [ACT07] : l'algorithme termine, et le polyèdre obtenu est un polyèdre de Coxeter, de diagramme donné Figure 2.20.

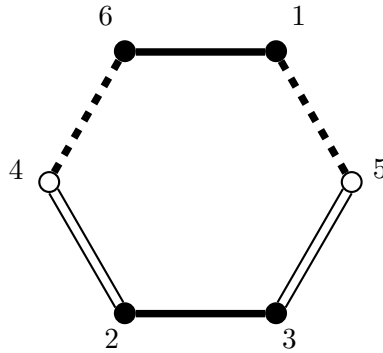


FIGURE 2.20 – Diagramme de Coxeter d'un domaine fondamental du groupe de réflexions  $\text{Ref}(O(q'_1, \mathbb{Z}))$ .

Ce polyèdre admet un unique automorphisme entier non trivial, donc  $\text{Ref}(O(q'_1, \mathbb{Z}))$  est d'indice 2 dans  $O(q'_1, \mathbb{Z})$ .

Le polyèdre  $\mathcal{P}_1$  est "presque de Coxeter" : seule la face  $F_6^1$  donne des angles qui ne sont pas de la forme  $\pi/k$ . Ceci incite à considérer le double du polyèdre recollé suivant la face  $F_6^1$ ,  $\mathcal{P}_1 \cup \tau_6^1(\mathcal{P}_1)$ . Les polaires de  $\tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  sont les vecteurs  $\tau_6^1(v)$ , où  $v$  est une polaire de  $\mathcal{P}_1$ . Les inégalités définissant  $\tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  sont donc aisément calculables. Les deux polyèdres à

recoller sont donnés par les inégalités suivantes (la face de recollement est encadrée) :

$\mathcal{P}_1$	$\tau_6^1(\mathcal{P}_1)$
$0 < x_1$	$\frac{2}{3}x_1 + x_3 < n$
$0 < x_2$	$x_2 + x_3 < n$
$x_2 + x_3 < n$	$0 < x_2$
$x_2 \leq x_3$	$2x_1 \leq n$
$2x_1 \leq n$	$x_2 \leq x_3$
$\frac{4}{3}x_1 + x_3 \leq n$	$n \leq \frac{4}{3}x_1 + x_3$

Cette opération fait disparaître la face problématique  $F_6^1$ . Notons  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  le polyèdre convexe défini par les autres inégalités des deux polyèdres  $\mathcal{P}_1$  et  $\tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  (dans  $\mathbb{R}^4$ ) :

$$(2.8) \quad \mathcal{P}_{1,\text{double}} \begin{cases} 0 < x_1 & (1) \\ 0 < x_2 & (2), \tau_6^1((3)) \\ x_2 + x_3 < n & (3), \tau_6^1((2)) \\ x_2 \leq x_3 & (4), \tau_6^1((5)) \\ 2x_1 \leq n & (5), \tau_6^1((4)) \\ \frac{2}{3}x_1 + x_3 < n & \tau_6^1((1)) \end{cases}$$

On vérifie que l'union  $\mathcal{P}_1 \cup \tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  est bien le polyèdre  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  par double inclusion :

- chaque composante est incluse dans  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  car le système d'inégalités (2.8) est vérifié par tout point de  $\mathcal{P}_1 \cup \tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  : tout point de  $\mathcal{P}_1$  vérifie  $\frac{2}{3}x_1 + x_3 < n$  (car  $0 < x_1$  et  $\frac{4}{3}x_1 + x_3 \leq n$  impliquent l'inégalité voulue), et de même tout point de  $\tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  vérifie  $0 < x_1$ .
- tout point de  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  est dans l'un des deux polyèdres de départ, suivant que  $\frac{4}{3}x_1 + x_3$  est supérieur ou inférieur à  $n$ .

Donc  $\mathcal{P}_{1,\text{double}} = \mathcal{P}_1 \cup \tau_6^1(\mathcal{P}_1)$ . Le calcul des polaires montre que c'est un polyèdre de Coxeter, dont le diagramme est celui de la Figure 2.20. Il est muni d'identifications de faces, provenant de celles de  $\mathcal{P}_1$  et de  $\tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  (les conjugués des  $\tau_j^1$  par l'isométrie de recollement  $\tau_6^1$ ). Exceptée la face  $\tau_6^1(F_1^1)$ , les faces de  $\tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  sont portées par les mêmes hyperplans que les faces de  $\mathcal{P}_1$ , comme indiqué sur le système (2.8). Elles ne donnent donc pas de nouvelles réflexions. Le groupe engendré par ces identifications de faces est alors

$$\Gamma_{1,\text{double}} = \langle \tau_1^1, \dots, \tau_5^1, \tau_6^1 \cdot \tau_1^1 \cdot (\tau_6^1)^{-1} \rangle$$

Ce sont toutes des réflexions par rapport aux faces, donc d'après la version simple du polyèdre du Poincaré,  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma_{1,\text{double}}$ .  $\Gamma_{1,\text{double}}$  est donc conjugué à  $\text{Ref}(O(q'_1, \mathbb{Z}))$  par la matrice de changement de coordonnée  $B$  (son conjugué est inclus dans  $\text{Ref}(O(q'_1, \mathbb{Z}))$ ), et a le même domaine fondamental, donc le même covolume).

Finalement, notons que  $\tau_6^1$  n'appartient pas à  $\Gamma_{1,\text{double}}$ . Puisque  $\text{Ref}(O(q'_1, \mathbb{Z}))$  est d'indice 2 dans  $O(q'_1, \mathbb{Z})$ , on en déduit que  $\Gamma_1 = \langle \Gamma_{1,\text{double}}, \tau_6^1 \rangle$  est conjugué à  $O(q'_1, \mathbb{Z})$ . On a donc montré :



**Proposition 2.3.9.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_1$  des métriques de type 1 est en bijection avec l'orbifold arithmétique  $\mathbb{H}^3/O(q'_1, \mathbb{Z})$ , privé des hypersurfaces correspondant aux sommets noirs du diagramme 2.19. Son double est l'orbifold de Coxeter de diagramme de Coxeter 2.20, privé des hypersurfaces correspondant aux sommets noirs.*

Le polyèdre  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  est dessiné dans [ACT07], dans le modèle du demi-espace de Poincaré avec le sommet idéal de  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  pour point à l'infini. On reproduit cette figure, en ajoutant le numéro des faces en accord avec notre étude, voir Figure 2.21.  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  est obtenu en recollant  $\mathcal{P}_1$  à sa copie  $\tau_6^1(\mathcal{P}_1)$  suivant la face  $F_6^1$ . On ajoute aussi sur le dessin la face de recollement entre les deux copies, et sa projection sur le plan à l'infini.

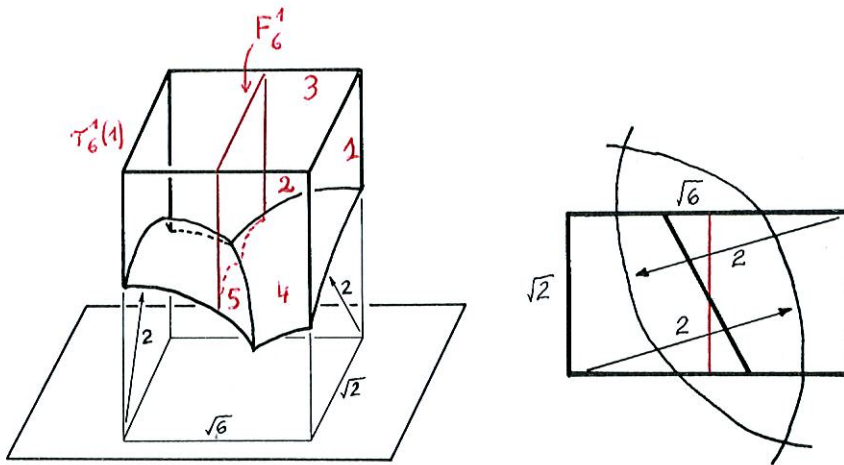


FIGURE 2.21 – Représentation du polyèdre  $\mathcal{P}_{1,\text{double}}$  dans le modèle du demi-espace de Poincaré, tirée de l'article [ACT07]. On ajoute les numéros des faces de  $\mathcal{P}_1$ , ainsi que la face de recollement  $F_6^1$ .

#### 2.3.2.4 Métriques de type 2

Le développement d'une métrique de type 2 dans le plan donne deux types de polygones, suivant le choix des géodésiques de découpe, cf. Figure 2.10. Une même métrique peut être représentée par des polygones de type différent. Cependant, si on fixe les géodésiques de découpe comme étant les plus courtes, une métrique admet un seul type de représentant (sauf cas d'égalité entre les longueurs de certaines géodésiques). On commence donc par construire deux polyèdres, paramétrant chacun des types 2(i) et 2(ii). Le recollement des deux composantes "artificielles" se fait via des changements de paramétrages qui permettent de passer d'un type de découpe à l'autre.

**Polyèdres hyperboliques** La Figure 2.22 donne les polygones de type 2(i) et 2(ii) en position standard.

Pour chaque type de polygone, comme dans les sections précédentes, on cherche des conditions sur les paramètres  $(n, x_1, x_2, x_3)$  pour que chaque classe de polygones (à isométries, homothéties et changement de géodésiques de découpe près) soit représentée par un unique quadruplet. On retrouve les trois familles de conditions :

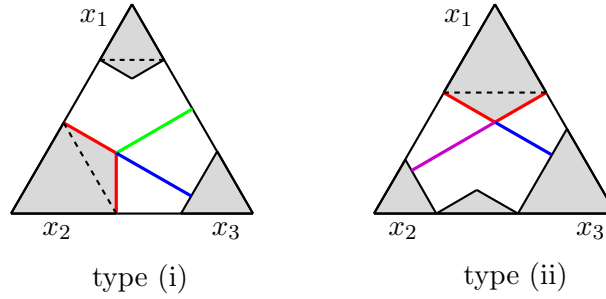
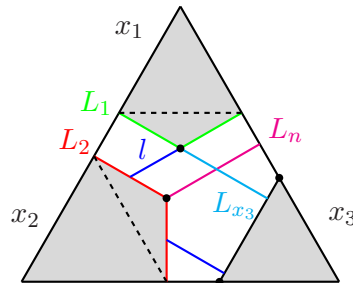


FIGURE 2.22 – Polygones de type 2(i) et 2(ii) en position standard.

- les inégalités (2.3) pour la non dégénérescence des polygones,
- celles qui permettent d’isoler un représentant d’une classe d’isométrie : la condition  $x_1 \leq x_2$  est suffisante pour le cas 2(i), il en faut deux pour le cas 2(ii) (par exemple  $n - x_2 - x_3 \leq x_1$  et  $x_2 \leq x_3$ ),
- celles qui déterminent suivant quelles géodésiques on découpe : dans les deux cas, les géodésiques de découpe pour chaque paire de singularités non équatoriales doivent être les plus courtes.

Il y a dans ce cas des métriques de type 2 plusieurs singularités non équatoriales, donc il peut exister des géodésiques symétriques qui intersectent les géodésiques de découpe (géodésiques discontinues dans le polygone, voir section 2.1.4 p.48). On vérifie cependant que si les géodésiques de découpe sont les plus courtes parmi les géodésiques “continues” du polygone, alors les géodésiques “discontinues” sont toujours de longueur supérieure à la géodésique de découpe entre les deux singularités correspondantes. Considérons par exemple le cas de la géodésique  $l$  donnée Figure 2.23.

FIGURE 2.23 – La géodésique symétrique  $l$  est plus longue que la géodésique de découpe  $L_1$ , si  $L_1$  et  $L_2$  sont les géodésiques “continues” les plus courtes.

La géodésique discontinue  $l$  est de longueur  $\frac{\sqrt{3}}{2}(2n - 2x_2 - x_3 - \frac{2}{3}x_1)$ . Mais par hypothèse, la géodésique de découpe  $L_2$  est plus courte que la géodésique  $L_n$ , et  $L_1$  est plus courte que  $L_{x_3}$ . Ceci se traduit par les inégalités  $2x_2 \leq n$  et  $\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(n - x_3 - \frac{2}{3}x_1)$ . On en déduit donc que

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(2n - 2x_2 - x_3 - \frac{2}{3}x_1)$$

donc la géodésique discontinue est bien de longueur supérieure à  $L_1$ . Il en est de même pour les autres géodésiques discontinues.

Il suffit donc d’étudier les géodésiques qui n’intersectent pas les géodésiques de découpe. Les longueurs des géodésiques continues issues de la singularité associée à  $x_1$  sont données

en (2.6), et on en déduit de même les longueurs des géodésiques issues de l'autre singularité. En combinant ces conditions, on arrive à deux systèmes d'inéquations, définissant deux polyèdres  $P_{2,i}$  et  $P_{2,ii}$  de  $\mathbb{R}^4$  :

$$(2.9) \quad \begin{array}{l} \text{polygones de type 2(i)} \\ P_{2,i} \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \\ 0 < x_3 & (2) \\ x_1 \leq x_2 & (3) \\ 2x_2 \leq n & (4) \\ \frac{4}{3}x_2 + x_3 \leq n & (5) \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{polygones de type 2(ii)} \\ P_{2,ii} \left\{ \begin{array}{ll} x_2 + x_3 < n & (1') \\ n - x_2 - x_3 \leq x_1 & (2') \\ x_2 \leq x_3 & (3') \\ \frac{4}{3}x_1 + x_3 \leq n & (4') \end{array} \right. \end{array}$$

Noter que dans le cas 2(i), toutes les dégénérescences ne sont pas écartées : si  $x_1 = x_2 = n/2$ , le polygone (et donc la métrique) est dégénéré car deux singularités coïncident. L'arête correspondante est donc exclue de  $\mathcal{P}_{2,i}$ . Comme précédemment, les faces de  $P_{2,i}$  sont notées  $F_j^{2,i}$ ,  $1 \leq j \leq 5$ , et celles de  $P_{2,ii}$  sont notées  $F_j^{2,ii}$ ,  $1 \leq j \leq 4$ .

Pour chacun des cas, (l'opposé de) l'aire des polygones est à nouveau une forme quadratique de signature (3,1), donnée par les formules :

$$q_{2,i} = -n^2 + \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_2^2 + x_3^2$$

$$q_{2,ii} = -n^2 + \frac{4}{3}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{3}(n - x_2 - x_3)^2$$

En passant au quotient par les homothéties, on obtient donc deux polyèdres hyperboliques  $\mathcal{P}_{2,i}$  et  $\mathcal{P}_{2,ii}$ . Le calcul des polaires (pour les formes quadratiques correspondantes) donne les diagrammes de Coxeter suivants, voir Figure 2.24. Aucun des deux polyèdres n'est de Coxeter.

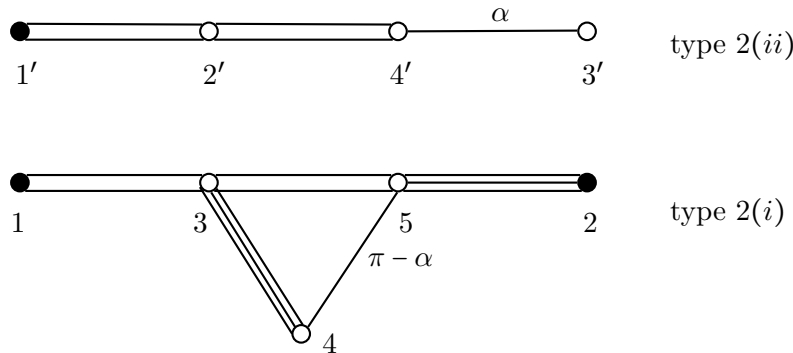


FIGURE 2.24 – Diagrammes de Coxeter pour les polyèdres  $\mathcal{P}_{2,i}$  et  $\mathcal{P}_{2,ii}$ , où  $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ . Les faces correspondant aux sommets noirs et l'arête entre  $F_3^{2,i}$  et  $F_4^{2,i}$  sont exclues des polyèdres.

**Changements de paramétrage** A chaque face fermée de  $\mathcal{P}_{2,i}$  ou  $\mathcal{P}_{2,ii}$  correspond, comme dans les cas précédents, un changement de paramétrage linéaire. Le calcul des différents changements de paramétrage se fait exactement comme dans les sections précédentes. La Figure 2.25 résume les opérations type “couper-coller” correspondant aux découpes suivant une autre géodésique.

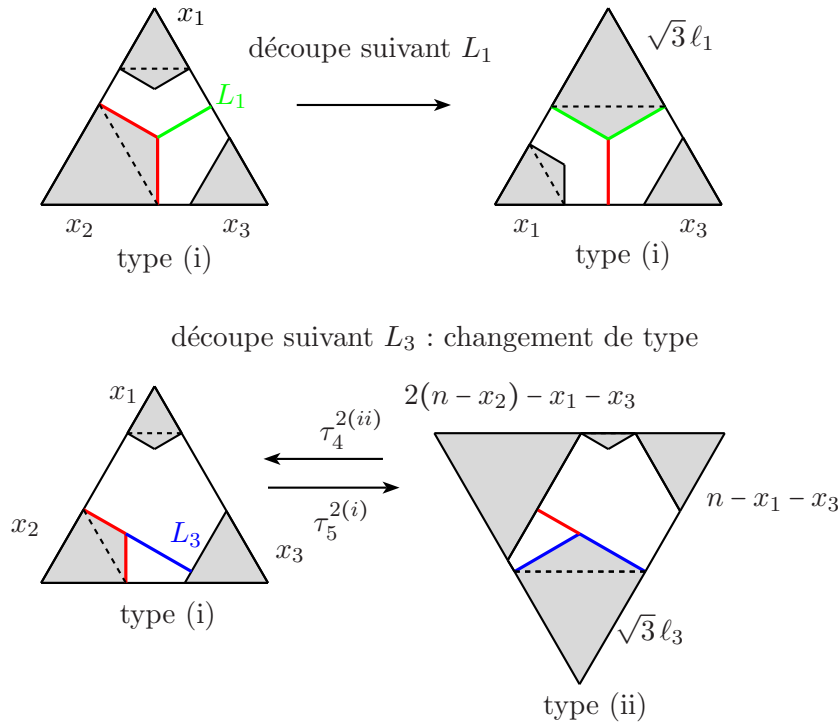


FIGURE 2.25 – Changements de paramétrage lorsque la géodésique de découpe est modifiée.

Le calcul montre que  $\tau_3^{2,i}$  et  $\tau_4^{2,i}$  sont des réflexions par rapport aux faces  $F_3^{2,i}$  et  $F_4^{2,i}$  de  $\mathcal{P}_{2,i}$ . Le cas de  $\tau_5^{2,i}$  est plus intéressant : lors de la découpe suivant la géodésique  $L_3$ , le polygone obtenu n'est plus du même type.  $\tau_5^{2,i}$  est une isométrie de  $(\mathbb{R}^4, q_{2,i})$  sur  $(\mathbb{R}^4, q_{2,ii})$ , et c'est l'inverse de  $\tau_4^{2,ii}$ . Les deux induisent une isométrie entre les faces  $F_5^{2,i}$  et  $F_4^{2,ii}$  : elles identifient les métriques qui admettent deux développements de types différents.

Les deux autres changements de paramétrages pour  $\mathcal{P}_{2,ii}$  sont des réflexions par rapport aux faces. La liste des matrices correspondantes est donnée en annexe, Table A.1.

**Orbifold hyperbolique** Comme dans les cas précédents, les changements de paramétrage fournissent des identifications de faces naturelles pour les polyèdres étudiés, ce qui permet d'appliquer le théorème de Poincaré. Par convention, les isométries associées aux faces ouvertes des polyèdres sont juste les réflexions par rapport aux faces.

Dans le cas des métriques de type 2, il faut appliquer le théorème à deux polyèdres distincts et définis dans des espaces différents. D'après la section 2.2.2.2, il est équivalent d'étudier le polyèdre obtenu en recollant les deux composantes via une identification de faces, et en modifiant le reste des identifications de faces en accord avec le recollement. Dans le cas des métriques de type 2, il n'existe qu'une seule identification de face entre les deux, donc on considère le polyèdre  $\mathcal{P}_{2,i} \cup \tau_4^{2,ii}(\mathcal{P}_{2,ii})$ . On obtient un polyèdre convexe, noté  $\mathcal{P}_2$ , défini par les inégalités suivantes dans  $(\mathbb{R}^4, q_{2,i})$  (où l'arête  $x_1 = x_2 = n/2$  est exclue) :

$$(2.10) \quad \mathcal{P}_2 \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1), \tau_4^{2,ii}((1')) \\ 0 < x_3 & (2) \\ x_1 \leq x_2 & (3) \\ 2x_2 \leq n & (4), \tau_4^{2,ii}((3')) \\ x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2}(n - x_3) & \tau_4^{2,ii}((2')) \end{array} \right.$$

C'est un polyèdre de Coxeter, dont le diagramme est donné Figure 2.26. Il admet un unique sommet à l'infini, correspondant aux polygones dégénérés en segment dans la direction de  $x_3$  (pour les deux types de polygones).

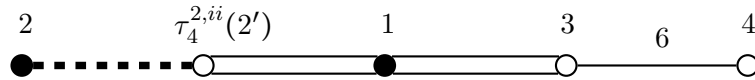


FIGURE 2.26 – Diagramme de Coxeter du polyèdre  $\mathcal{P}_2$ . Les faces correspondant aux sommets noirs et l'arête d'angle  $\pi/6$  sont exclues.

Le polyèdre  $\mathcal{P}_2$  est dessiné dans l'article [ACT07], dans le demi-espace de Poincaré avec le sommet idéal de  $\mathcal{P}_2$  comme point à l'infini. On reproduit ici leur dessin Figure 2.27, en ajoutant les numéros des faces correspondant au système (2.10). On ajoute aussi sur le dessin la face de recollement entre les deux polyèdres  $\mathcal{P}_{2,i}$  et  $\mathcal{P}_{2,ii}$ .

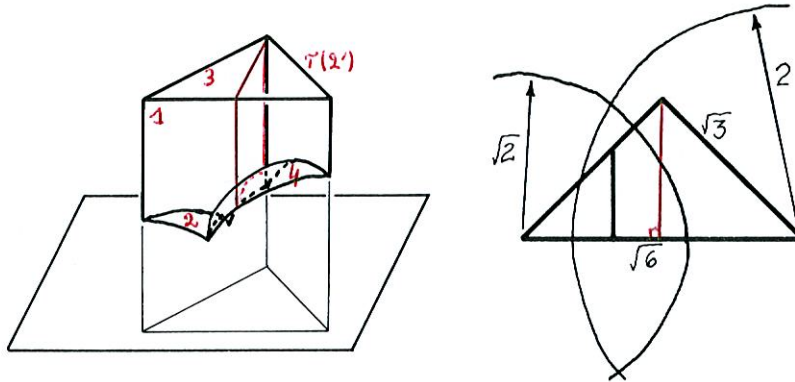


FIGURE 2.27 – Dessin de  $\mathcal{P}_2$  tiré de [ACT07]. Les numéros de faces, ainsi que la face de recollement entre  $\mathcal{P}_{2,i}$  et  $\mathcal{P}_{2,ii}$  sont ajoutés.

Les identifications de faces du polyèdre sont  $\tau_1^{2,i}, \dots, \tau_4^{2,i}$ , et  $\tau_4^{2,ii} \cdot \tau_2^{2,ii} \cdot \tau_4^{2,ii-1}$  pour la dernière face. Ce sont toutes des réflexions par rapport aux faces du polyèdre, donc la version simple du théorème de Poincaré s'applique. Notons  $\Gamma_2$  le groupe engendré par les réflexions par rapport aux faces de  $\mathcal{P}_2$ . On a alors :

**Proposition 2.3.10.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_2$  des métriques de type 2 est en bijection avec l'orbifold de Coxeter  $\mathbb{H}^3/\Gamma_2$ , de diagramme donné Figure 2.26, privé des faces correspondant aux sommets noirs et de l'arête d'angle  $\pi/6$ .*

**Identification du groupe** Le groupe  $\Gamma_2$  est, comme dans les autres cas, conjugué à un groupe d'isométries entières. Considérons le changement de coordonnées  $x'_1 = \frac{2}{3}x_1$ ,

$x'_2 = \frac{2}{3}x_2$ . Dans ces coordonnées, la forme quadratique  $q_{2,i}$  s'écrit sous la forme

$$q'_2 = -n^2 + 3x_1'^2 + 3x_2'^2 + x_3^2$$

Dans ces coordonnées, les réflexions par rapport aux faces du polyèdre  $\mathcal{P}_2$  ont des coefficients entiers. Donc  $\Gamma_2$  est conjugué à un sous-groupe de  $O(q'_2, \mathbb{Z})$ .

L'algorithme de Vinberg appliqué à  $O(q'_2, \mathbb{Z})$  termine, et donne un polyèdre de Coxeter dont le diagramme est celui de la Figure 2.26. Ce diagramme n'admet pas d'automorphismes, donc  $O(q'_2, \mathbb{Z})$  est égal à son groupe de réflexions, et  $\Gamma_2$  est conjugué à  $O(q'_2, \mathbb{Z})$ .

**Proposition 2.3.11.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_2$  est homéomorphe à l'orbifold de Coxeter arithmétique  $\mathbb{H}^3/O(q'_2, \mathbb{Z})$  privé des faces correspondant aux sommets noirs et de l'arête d'angle  $\pi/6$ .*

### 2.3.2.5 Métriques de type 3

Le cas des métriques de type 3 se traite de manière similaire. La Figure 2.28 donne un polygone de type 3 en position standard.

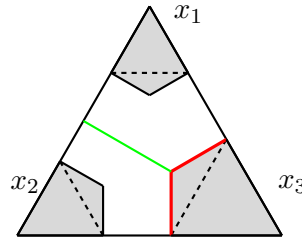


FIGURE 2.28 – Polygone de type 3 en position standard.

Les mêmes types de conditions permettent d'assurer l'unicité du paramétrage d'une classe de polygones, à isométrie, homothétie et changement de géodésiques de découpe près. Pour isoler un représentant d'une classe d'isométrie, on choisit les conditions  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . Pour les géodésiques, la condition reste la même : pour chaque singularité, la géodésique de découpe est la plus courte des géodésiques symétriques existant entre les deux singularités conjuguées. Comme pour le type 2, il suffit de considérer les géodésiques qui n'intersectent pas les géodésiques de découpe. La combinaison de ces conditions donne le système d'inégalités suivant :

$$(2.11) \quad \mathcal{P}_3 \begin{cases} 0 < x_1 & (1) \\ x_1 \leq x_2 & (2) \\ x_2 \leq x_3 & (3) \\ 2x_3 \leq n & (4) \end{cases}$$

Noter que l'arête  $x_2 = x_3 = n/2$  donne des polygones dégénérés, donc elle est exclue du polyèdre. La forme quadratique provenant de l'aire des polygones est la suivante :

$$q_3 = -n^2 + \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{4}{3}x_3^2$$

Après passage au quotient par les homothéties, on obtient donc un polyèdre de  $\mathbb{H}^3$ , noté  $\mathcal{P}_3$ . Le calcul des polaires permet de construire son diagramme de Coxeter, donné Figure 2.29 : c'est un simplexe de Coxeter.

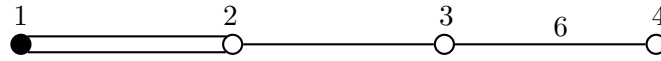


FIGURE 2.29 – Diagramme de Coxeter du polyèdre  $\mathcal{P}_3$ . La face correspondant au sommet noir et l'arête d'angle  $\pi/6$  sont exclues du polyèdre.

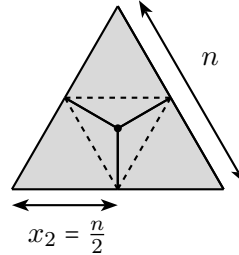


FIGURE 2.30 – Polygone de type 3 dégénéré en polygone d'aire nulle, correspondant au point à l'infini  $[1, 1/2, 1/2, 1/2]$ .

$\mathcal{P}_3$  admet un unique sommet à l'infini,  $[1, 1/2, 1/2, 1/2]$  en coordonnées homogènes. Ce sommet correspond aux polygones tels que les triangles ôtés remplissent l'hexagone de départ, voir Figure 2.30.

Une représentation du polyèdre  $\mathcal{P}_3$  dans le modèle du demi-espace de Poincaré, avec le sommet idéal de  $\mathcal{P}_3$  comme point à l'infini, est donnée Figure 2.31. Elle est largement inspirée des figures de l'article [ACT07] (mais le dessin donné dans [ACT07] pour  $\mathcal{P}_3$  est différent, car le point à l'infini choisi n'est plus le sommet idéal de  $\mathcal{P}_3$ ).

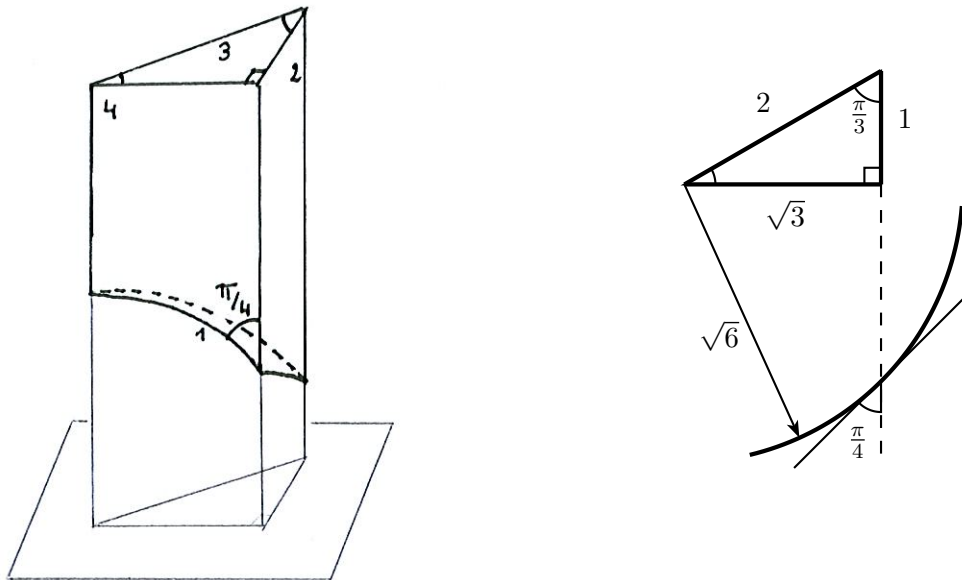


FIGURE 2.31 – Polyèdre  $\mathcal{P}_3$  dans le demi-espace de Poincaré, et projection sur le plan à l'infini.

Les changements de paramétrage associés à chaque face se calculent de la même façon que précédemment (voir Table A.2 en annexe pour la liste des matrices) : ce sont tous des réflexions par rapport aux faces de  $\mathcal{P}_3$ , donc la version simple du théorème de Poincaré

(théorème 2.2.9) s'applique. Notons  $\Gamma_3$  le groupe engendré par ces réflexions : l'espace de modules  $\mathcal{M}_3$  est en bijection avec le simplexe de Coxeter  $\mathbb{H}^3/\Gamma_3$ , privé des faces et arêtes correspondant aux métriques dégénérées.

L'identification du groupe  $\Gamma_3$  se fait à nouveau à l'aide de la forme quadratique entière

$$q'_3 = -n^2 + 3x'_1{}^2 + 3x'_2{}^2 + 3x'_3{}^2$$

obtenue après le changement de coordonnées  $x'_j = \frac{2}{3}x_j$ . Dans ces coordonnées, les matrices des réflexions par rapport aux faces de  $\mathcal{P}_3$  sont entières, donc  $\Gamma_3$  est conjugué à un sous-groupe de  $O(q'_3, \mathbb{Z})$ .

L'algorithme de Vinberg appliqué à  $O(q'_3, \mathbb{Z})$  termine et donne le simplexe de Coxeter de la Figure 2.29, qui n'admet pas d'automorphismes. On a donc finalement :

**Proposition 2.3.12.** *L'espace de modules des métriques de type 3 est en bijection avec l'orbifold de Coxeter arithmétique  $\mathbb{H}^3/O(q'_3, \mathbb{Z})$ , de diagramme donné Figure 2.29, privé de la face correspondant au sommet noir et à l'arête d'angle  $\pi/6$ .*

### 2.3.2.6 Conclusion

Chaque composante  $\mathcal{M}_k$  de l'espace de modules des métriques plates symétriques à 6 singularités est en bijection avec un ouvert d'un orbifold hyperbolique arithmétique de la forme  $\mathbb{H}^3/O(q_k, \mathbb{Z})$ . Ces bijections permettent de définir une topologie sur l'espace de modules  $\mathcal{M}$ , pour laquelle les  $\mathcal{M}_k$  sont les composantes connexes de  $\mathcal{M}$ . Les  $\mathcal{M}_k$  ne sont pas complètes : les points à ajouter pour obtenir une complétion métrique correspondent aux métriques pour lesquelles deux singularités ou plus coïncident. Les métriques obtenues par ces dégénérescences seront étudiées section 2.3.4, et on verra que l'étude menée précédemment permet d'obtenir une description de l'espace de modules des métriques dégénérées.

### 2.3.3 Recollement des composantes

Les différents types de métriques forment les composantes connexes de l'espace de modules  $\mathcal{M}$ . Ces métriques ont six singularités disjointes. Considérer les métriques dégénérées, où deux singularités ou plus coïncident, permet de relier naturellement ces différentes composantes. En effet, étant donnée une métrique de type  $k$ , deux singularités équatoriales consécutives peuvent se rapprocher, jusqu'à coïncider, puis se séparer en deux singularités conjugués pour donner une métrique de type  $k+1$ , comme indiqué Figure 2.32.

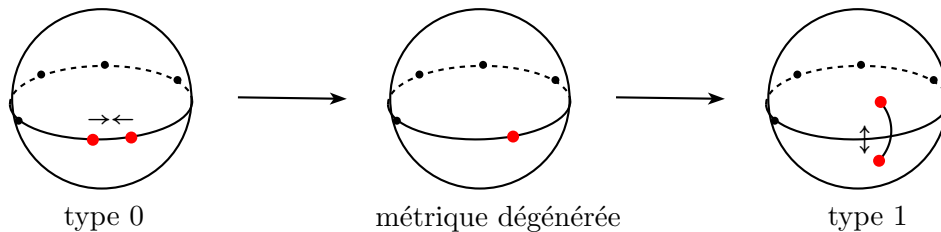


FIGURE 2.32 – Exemple de métrique dégénérée à la jonction entre deux types. Les deux singularités d'angles  $4\pi/3$  coïncident en une singularité d'angle  $2\pi/3$ .

Les métriques dégénérées correspondent aux points des faces ouvertes des polyèdres  $\mathcal{P}_k$  : elles donnent une manière naturelle de recoller les quatre composantes de l'espace



de modules, suivant leurs dégénérescences communes. Soit  $\mathcal{M}_t$  l'espace de modules des métriques à 6 singularités d'angles égaux, éventuellement dégénérées en métriques à 5 singularités ou moins (voir section 2.3.4 quelles métriques sont obtenues à partir de ces dégénérescences). Le procédé de recollement décrit dans la suite permet alors d'obtenir une structure hyperbolique sur  $\mathcal{M}_t$ .

Les faces ouvertes des  $\mathcal{P}_k$  sont isométriques par paires, suivant le schéma donné Figure 2.33. Ceci peut être vérifié via leur description algébrique, mais vient simplement du fait qu'elles représentent les mêmes métriques dégénérées, vues comme provenant d'un type ou d'un autre.

Pour le recollement des métriques de type 2, il est pratique de considérer séparément les deux composantes (artificielles du point de vue des métriques)  $\mathcal{P}_{2,i}$  et  $\mathcal{P}_{2,ii}$ . L'espace de modules des métriques de type 2 est obtenu en quotientant l'union disjointe  $\mathcal{P}_{2,i} \sqcup \mathcal{P}_{2,ii}$  par l'identification donnée par  $\tau_5^{2,i}$  et son inverse. De même, on considère le polyèdre  $\mathcal{P}_1$  pour le recollement, en gardant en tête qu'il doit être quotienté par l'isométrie  $\tau_6^1$ .

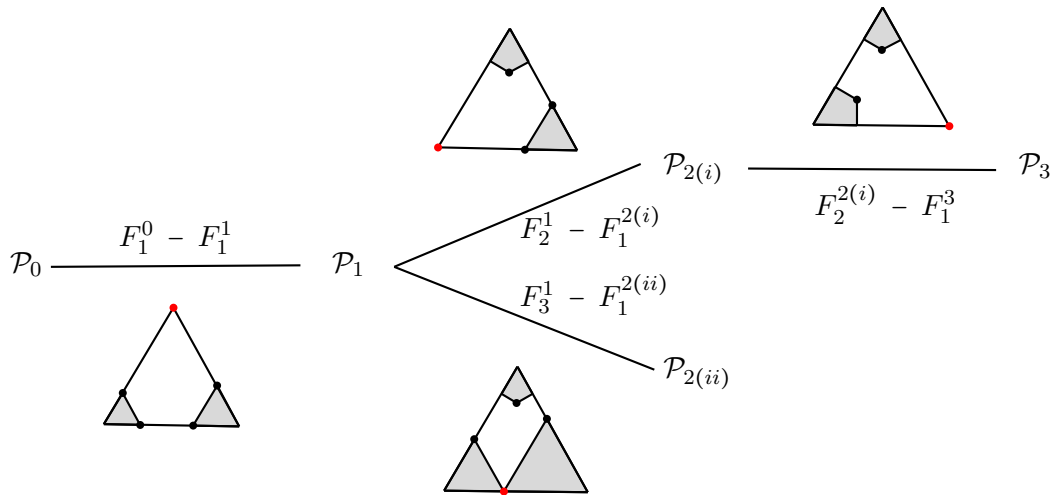


FIGURE 2.33 – Schéma de recollement des différentes composantes. Les polygones dégénérés faisant le lien entre les composantes sont indiqués, ainsi que les faces isométriques suivant lesquelles les polyèdres sont recollés.

### 2.3.3.1 Isométries de recollement

Les isométries permettant le recollement des composantes de l'espace de modules peuvent être données explicitement. Elles doivent identifier les points correspondants aux mêmes métriques dégénérées, et envoyer le polyèdre de départ à l'extérieur du polyèdre d'arrivée (condition nécessaire pour avoir des identifications de faces au sens de Poincaré). Ces conditions les définissent de manière unique.

Chaque isométrie de recollement entre les types  $k$  et  $k + 1$ , notée  $r_{k,k+1}$ , est obtenue comme la composition de trois applications :

- un changement de paramétrage, pour que les paramètres de la métrique de type  $k$  dégénérée vérifient les conditions définissant  $\mathcal{P}_{k+1}$ ,
- une réflexion par rapport à l'hyperplan de recollement dans le polyèdre d'arrivée, pour que l'image de  $\mathcal{P}_k$  soit à l'extérieur de  $\mathcal{P}_{k+1}$ ,

- une dilatation suivant l'axe de la polaire à l'hyperplan de recollement, pour obtenir une isométrie de  $(\mathbb{R}^4, q_k)$  vers  $(\mathbb{R}^4, q_{k+1})$ .

Considérons par exemple l'isométrie  $r_{1,2(i)}$  entre les polyèdres  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_{2,i}$  : les métriques dégénérées correspondantes sont données Figure 2.34. On note  $(n, x_1, x_2, x_3)$  les paramètres pour les métriques de type 1, et  $(\bar{n}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  ceux des métriques de type 2( $i$ ).

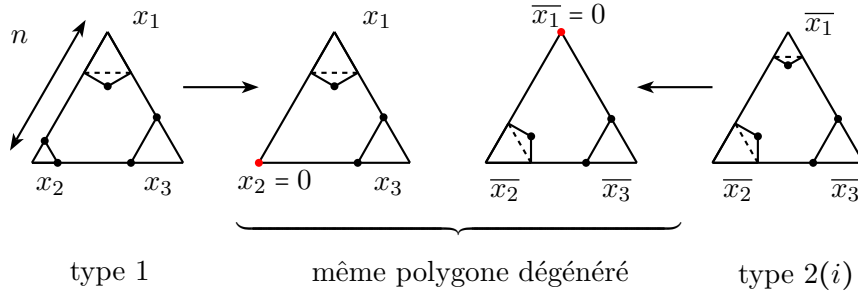


FIGURE 2.34 – Deux singularités équatoriales d'une métrique de type 1 coïncident, pour donner une métrique de type 2( $i$ ).

Les points de  $\mathcal{P}_1$  vérifient la relation  $x_2 \leq x_3$ , donc les deux singularités qui coïncident sont forcément celles à distance  $x_2$ . La face de recollement pour  $\mathcal{P}_1$  est donc  $F_2^1 = \{x_2 = 0\}$ . Pour les métriques de type 2( $i$ ), les deux singularités conjuguées qui coïncident sont forcément celles associées au triangle de longueur  $\bar{x}_1$ , puisqu'on a la condition  $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$ . Donc la face de recollement pour  $\mathcal{P}_{2,i}$  est  $F_1^{2,i} = \{\bar{x}_1 = 0\}$ . Le reste des paramètres est modifié de manière équivalente. Restreinte aux faces de recollement,  $r_{1,2(i)}$  agit donc de la façon suivante :

$$r_{1,2(i)}((n, x_1, 0, x_3)) = (n, 0, x_1, x_3) = (\bar{n}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

Sur l'orthogonal des hyperplans de recollement,  $r_{1,2(i)}$  agit comme une réflexion et une dilatation.  $r_{1,2(i)}$  doit être une isométrie de  $(\mathbb{R}^4, q_1)$  vers  $(\mathbb{R}^4, q_{2,i})$ , et on a :

$$q_1(n, x_1, x_2, x_3) = -n^2 + \frac{4}{3}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad q_{2,i}(n, x_1, x_2, x_3) = -n^2 + \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_2^2 + x_3^2$$

Le facteur de dilatation doit donc être  $\sqrt{3}/2$ . On obtient finalement

$$r_{1,2(i)} : (\mathbb{R}^4, q_1) \rightarrow (\mathbb{R}^4, q_{2,i}), \quad (n, x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(n, -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2, x_1, x_3\right)$$

Le reste des isométries de recollement se calcule de la même façon. Noter que l'isométrie de recollement  $r_{k+1,k}$  est simplement l'inverse de  $r_{k,k+1}$ .

### 2.3.3.2 Résultat du recollement

Les quatre composantes  $\mathcal{M}_k$  de l'espace de modules sont donc munies d'identifications de faces naturelles qui permettent de les recoller les unes aux autres. On peut alors vérifier les hypothèses du théorème de Poincaré, pour donner une structure d'orbifold à l'espace de modules total  $\mathcal{M}_t$  des métriques symétriques à 6 singularités d'angles égaux.

Dans le cas étudié, le recollement des polyèdres suivant les identifications de faces se fait aisément et donne un polyèdre convexe, muni d'identifications de faces. On vérifie donc les hypothèses du théorème de Poincaré après avoir effectué le recollement. Noter

qu'il n'y a pas de choix à faire pour le recollement : il existe au plus une identification de faces entre chaque paire de polyèdres.

La forme quadratique  $q_0$  associée aux métriques de type 0, définie par

$$q_0(n, x_1, x_2, x_3) = -n^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

est la plus simple de celles apparaissant dans le problème. Le recollement des composantes est donc effectué (avant de quotienter par les scalaires) dans l'espace  $(\mathbb{R}^4, q_0)$ . Etant donné un polyèdre  $P$  et une isométrie  $r$ , les vecteurs polaires du polyèdre  $r(P)$  sont simplement les  $r(v)$ , où  $v$  est un vecteur polaire de  $P$ . Il est donc facile d'obtenir la description de l'image de chaque polyèdre dans  $(\mathbb{R}^4, q_0)$ . Le tableau suivant récapitule les composantes du recollement. Les inégalités encadrées correspondent aux faces recollées deux à deux.

$P_0$	$r_{1,0}(P_1)$	$r_{1,0} \circ r_{2i,1}(P_{2i})$
$0 \leq x_1$	$x_1 \leq 0$	$x_2 \leq 0$
$x_1 \leq x_2$	$0 \leq x_2$	$0 \leq x_3$
$x_2 \leq x_3$	$x_2 + x_3 \leq n$	$x_1 \leq x_2$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq n$	$x_2 \leq x_3$	$0 \leq \sqrt{3}x_1 + n$
	$0 \leq \sqrt{3}x_1 + n$	$x_3 \leq n + \frac{2\sqrt{3}}{3}x_1$
	$x_3 \leq n + \frac{2\sqrt{3}}{3}x_1$	
$r_{1,0} \circ r_{2ii,1}(P_{2ii})$	$r_{1,0} \circ r_{2i,1} \circ r_{3,2i}(P_3)$	
$n \leq x_2 + x_3$	$x_3 \leq 0$	
$x_2 \leq x_3$	$x_2 \leq x_3$	
$x_1 + x_2 + x_3 \leq n$	$x_1 \leq x_2$	
$x_3 \leq n + \frac{2\sqrt{3}}{3}x_1$	$0 \leq \sqrt{3}x_1 + n$	

Les inégalités correspondant aux faces recollées disparaissent, et le reste des inégalités définit le polyèdre suivant, noté  $P_t$  :

$$(2.12) \quad P_t \begin{cases} x_1 \leq x_2 & (1) \\ x_2 \leq x_3 & (2) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq n & (3) \\ 0 \leq \sqrt{3}x_1 + n & (4) \\ x_3 \leq n + \frac{2\sqrt{3}}{3}x_1 & (5) \end{cases}$$

Tout point de  $P_t$  appartient à l'une des composantes recollées (on le voit en prenant un point  $p \in P_t$  et en distinguant les cas : si  $x_1 \geq 0$  alors  $p \in P_0$  ; si  $x_1 \leq 0$  et  $n \leq x_2 + x_3$  alors  $x \in P_{2ii}$ , etc), et chaque point d'une composante vérifie aussi les autres inégalités définissant  $P_t$ . Ceci montre que l'union des cinq composantes est exactement le polyèdre convexe  $P_t$ .

Par construction, les points de  $P_t$  sont négatifs pour la forme quadratique  $q_0$ , donc le passage au quotient par les scalaires donne un polyèdre hyperbolique  $\mathcal{P}_t$ . Les faces de  $\mathcal{P}_t$  sont notées  $F_j^t$ ,  $1 \leq j \leq 5$ .  $\mathcal{P}_t$  n'est pas un polyèdre de Coxeter : les faces  $F_5^t$  et  $F_2^t$  (respectivement  $F_5^t$  et  $F_4^t$ ) font un angle de  $\arccos(\sqrt{6}/4)$  (respectivement  $\pi - \arccos(\sqrt{6}/4)$ ). Ce sont les seules arêtes dont l'angle dièdre n'est pas un sous-multiple de  $\pi$ .

$\mathcal{P}_t$  est muni d'identifications de faces, provenant des identifications de faces des polyèdres de départ. Ce sont toutes des réflexions par rapport aux faces  $F_j^t$  de  $\mathcal{P}_t$ , sauf celle associée à la face  $F_5^t$ . Cette face est formée par les images des faces  $F_6^1$ ,  $F_5^{2,i}$  et  $F_4^{2,ii}$  des composantes de départ, dont les isométries associées n'étaient pas des réflexions. On vérifie que les trois induisent la même isométrie sur la face  $F_5^t$  :

$$r_{1,0} \cdot \tau_6^1 \cdot r_{0,1} = r_{1,0} \cdot r_{2i,1} \cdot \tau_4^{2ii} \cdot r_{1,2ii} \cdot r_{0,1} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & -1 & -2 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & \sqrt{3} & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le reste des identifications de faces est donné en annexe, Table A.3. Comme pour les métriques de type 1, on vérifie que  $\mathcal{P}_t$  muni de ces identifications de faces vérifie les hypothèses du théorème de Poincaré, en étudiant simplement les cycles d'arêtes et les sommets à l'infini où la face  $F_5^t$  apparaît. Notons  $\Gamma_t$  le groupe engendré par les identifications de faces.

**Proposition 2.3.13.** *L'espace de modules des métriques plates sur  $\mathbb{S}^2$  à 6 singularités d'angles égaux, éventuellement dégénérées, est en bijection avec l'orbifold hyperbolique  $\mathbb{H}^3/\Gamma_t$ .*

Le diagramme de Coxeter de  $\mathcal{P}_t$ , ainsi que la forme des identifications de faces, incitent à considérer le double du polyèdre, obtenu en recollant  $\mathcal{P}_t$  et  $\tau_5^t(\mathcal{P}_t)$ . Le polyèdre obtenu est un polyèdre de Coxeter, de diagramme donné Figure 2.35. On retrouve bien le polyèdre obtenu par Allcock, Carlson et Toledo.

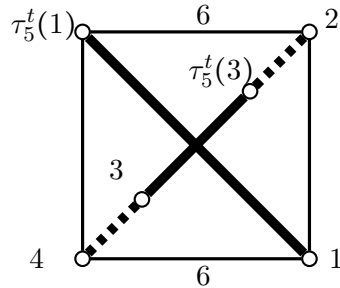


FIGURE 2.35 – Diagramme de Coxeter du double de l'espace de modules total  $\mathcal{M}_t$  des métriques plates à 6 singularités.

### 2.3.3.3 Le groupe $\Gamma_t$ n'est pas arithmétique

Le groupe  $\Gamma_t$  obtenu lors du recollement est engendré par des matrices dont les coefficients sont à valeurs dans l'anneau des entiers  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  du corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  :

$$\Gamma_t < O(q_0, \mathbb{Z}[\sqrt{3}])$$

Le polyèdre  $\mathcal{P}_t$  est de volume fini par construction, donc  $\Gamma_t$  est un réseau de  $O(q_0, \mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ . D'après la proposition 1.2.9, le plus petit corps sur lequel  $\Gamma_t$  est défini est donc donné par  $k = \mathbb{Q}(\text{tr}(\text{Ad}\Gamma_t))$ , le corps des traces de la représentation adjointe.  $k$  est contenu dans le corps engendré par les coefficients des éléments de  $\Gamma_t$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ . Pour montrer l'égalité, il suffit de trouver un élément de  $\text{Ad}\Gamma_t$  dont la trace n'est pas un rationnel.

Notons  $Q_0$  la matrice de la forme quadratique  $q_0 : Q_0 = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Le groupe de Lie  $O(q_0, \mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices réelles  $4 \times 4$   $M$  vérifiant la relation  ${}^tMQ_0M = Q_0$ . L'algèbre de Lie correspondante  $\mathfrak{o}(q_0)$  est donc définie par :

$${}^tMQ_0 + Q_0M = 0$$

Les éléments de l'algèbre de Lie sont alors de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

C'est un espace vectoriel de dimension 6, et on peut identifier la matrice  $M$  ci-dessus avec le vecteur  $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ . La représentation adjointe associée à  $\gamma \in \Gamma_t$  l'application linéaire obtenue par conjugaison :

$$\text{Ad}(\gamma) : \begin{array}{ccc} \mathfrak{o}(q_0) & \rightarrow & \mathfrak{o}(q_0) \\ M & \mapsto & \gamma M \gamma^{-1} \end{array}$$

Le calcul montre que

$$\text{tr}(\text{Ad}(\tau_2^t \cdot \tau_5^t \cdot \tau_3^t \cdot (\tau_5^t)^{-1})) = 6 + 4\sqrt{3}$$

On en déduit donc que  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ . D'après le critère d'arithméticité 1.2.10, l'arithméticité de  $\Gamma_t$  se lit sur les conjugués de la forme quadratique  $q_0$  par les conjugués de Galois de  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ . Le seul conjugué de Galois non trivial de  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  est  $\sigma : \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ .  $q_0$  est à coefficients entiers, donc  $q_0^\sigma = q_0 : q_0^\sigma$  est donc non définie, donc  $\Gamma_t$  n'est pas arithmétique.

### 2.3.4 Métriques dégénérées

On étudie dans cette section les métriques à 6 singularités d'angles égaux dégénérées. Pour une métrique non dégénérée, toutes les singularités sont d'angles  $4\pi/3$  (ou de courbure  $2\pi/3$ ). La somme de deux courbures est strictement inférieure à  $2\pi$ , donc d'après la section 2.1.5 (voir aussi [Thu98]), on peut faire tendre la distance entre deux singularités (équatoriales consécutives, ou non équatoriales) vers 0 en restant à distance finie dans l'espace de modules. La métrique dégénérée obtenue à la limite admet cinq singularités : quatre d'angle  $4\pi/3$ , et une d'angle  $2\pi/3$  d'après la formule de Gauss-Bonnet. En revanche, pour deux singularités d'angles  $4\pi/3$  et  $2\pi/3$ , la somme des courbures vaut  $2\pi$  : si la distance entre les deux singularités tend vers 0, le diamètre des métriques tend vers  $+\infty$  à aire fixée. Les métriques à la limite ne font donc pas partie du complété métrique de l'espace de modules (elles correspondent aux points à l'infini des orbifolds obtenus).

Les seules dégénérescences possibles pour des métriques à 6 singularités d'angles égaux sont donc obtenues lorsque une ou plusieurs paires de singularités coïncident deux à deux. On obtient une suite de dégénérescences possibles, décrites par la liste des angles des

singularités :

$\left(\frac{4\pi}{3}, \dots, \frac{4\pi}{3}\right)$	6 singularités, métriques non dégénérées
$\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$	5 singularités
$\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$	4 singularités
$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$	3 singularités

Les métriques qui nous intéressent dans cette partie sont celles obtenues après une seule collision entre deux singularités. Ce sont les métriques représentées par les faces exclues des polyèdres  $\mathcal{P}_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$ . On considère dans ces travaux seulement des métriques symétriques, invariantes par une isométrie involutive : pour ces métriques dégénérées, la singularité d'angle  $2\pi/3$  est donc forcément sur l'équateur, puisqu'il n'y a pas d'autre singularité de même angle.

On veut montrer dans cette section que la description des composantes  $\mathcal{M}_k$  donne aussi une description de l'espace de modules des métriques symétriques à 5 singularités d'angles  $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$  comme union disjointe d'orbifolds.

Il y a trois types de métriques à 5 singularités d'angles  $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ , suivant le nombre de paires de singularités d'angles  $4\pi/3$  conjuguées. Les trois types de polygones obtenus après développement de ces métriques sont représentés Figure 2.32. Noter que lorsqu'il y a une paire de singularités conjuguées, deux familles de polygones apparaissent, suivant que les singularités équatoriales sont séparées ou non par la géodésique de découpe.

La construction des polyèdres  $\mathcal{P}_k$  pour l'étude des métriques non dégénérées donne aussi les polyèdres candidats pour décrire l'espace de modules des métriques admettant une dégénérescence : ce sont les faces exclues des  $\mathcal{P}_k$ , de dimension 2. Il faut alors vérifier si les identifications de faces des  $\mathcal{P}_k$  induisent des identifications de faces pour ces polygones, et si les hypothèses du théorème de Poincaré sont vérifiées. On pourra alors en déduire une uniformisation de l'espace de modules des métriques à une dégénérescence comme (union disjointe) d'orbifolds hyperboliques privées de certaines hypersurfaces.

### 2.3.4.1 Métriques de type 0 et 1 dégénérées

Étudions le cas des métriques dégénérées équatoriales : elles correspondent à la face  $F_1^0$  du polyèdre  $\mathcal{P}_0$ , ou à la face  $F_1^1$  de  $\mathcal{P}_1$ . Les deux faces sont isométriques, donc on considère seulement  $F_1^0 \subset \mathcal{P}_0$ . On cherche d'abord la géométrie de  $F_1^0$  : il faut déterminer quelles faces de  $\mathcal{P}_0$  intersectent  $F_1^0$ , puis calculer les angles dièdres entre ces différentes faces dans l'hyperplan portant  $F_1^0$ , que l'on note  $H_1^0$ . La remarque suivante permet de calculer aisément les polaires des facettes bordant  $F_1^0$  dans  $H_1^0$  :

**Proposition 2.3.14.** *Soient  $H_0$  et  $H$  deux hyperplans de  $\mathbb{H}^n$  qui s'intersectent dans  $\mathbb{H}^n$ . Notons  $v$  une polaire de  $H$ . Alors  $H_0$  est une copie isométrique de  $\mathbb{H}^{n-1}$ ,  $H_0 \cap H$  est un hyperplan dans  $H_0$ , et une polaire de cet hyperplan est donnée par la projection de  $v$  sur l'hyperplan  $\overline{H_0} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  relevant  $H_0$ .*

*Démonstration.* Notons  $(\cdot, \cdot)$  la forme quadratique de Lorentz sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\overline{H}$  le relevé de  $H$  à  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $v_0$  une polaire de  $H_0$  et  $\pi_0(v)$  la projection de la polaire  $v$  sur  $\overline{H_0}$ . Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$

tel que  $v = \lambda v_0 + \pi_0(v)$ . Alors pour tout  $x \in \overline{H_0}$  :

$$\begin{aligned} x \in \overline{H_0} \cap \overline{H} &\Leftrightarrow \langle x, v \rangle = 0 \text{ car } v \text{ polaire de } \overline{H} \\ &\Leftrightarrow \langle x, \pi_0(v) \rangle = 0 \text{ car } x \in \overline{H_0} \text{ donc } \langle x, v_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\pi_0(v)$  est bien une polaire à  $\overline{H_0} \cap \overline{H}$  dans  $\overline{H_0}$ . Après projectivisation, on en déduit que c'est une polaire pour  $H \cap H_0$  dans  $H_0$ .  $\square$

$F_1^0$  est intersectée par les trois autres faces du polyèdre  $\mathcal{P}_0$ , et le calcul des polaires montre que c'est un triangle de Coxeter de diagramme donné Figure 2.36. C'est un triangle non compact de volume fini, qui admet un unique sommet idéal.

Noter que les intersections avec les faces  $F_2^0$  et  $F_4^0$  correspondent à des métriques doublement dégénérées, d'angles  $(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ , donc elles devront être exclues du triangle lorsqu'on considèrera l'espace de modules des métriques à une dégénérescence.

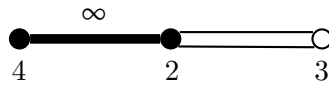


FIGURE 2.36 – Diagramme de Coxeter de la face  $F_1^0$  dans  $\mathcal{P}_0$ . Les numéros correspondent à la numérotation des faces de  $\mathcal{P}_0$ . Les sommets noirs représentent des métriques doublement dégénérées.

Le dessin de ce triangle dans le modèle du demi-espace de Poincaré, Figure 2.37, correspond bien au dessin de la face  $F_1^0$  de  $\mathcal{P}_0$  donné Figure 2.16, et de la face  $F_1^1$  de  $\mathcal{P}_1$  donné Figure 2.21.

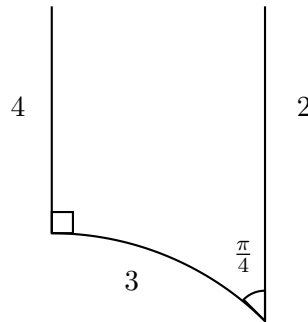


FIGURE 2.37 – Dessin de la face  $F_1^0$ .

Il faut ensuite vérifier si les identifications de faces de  $\mathcal{P}_0$  induisent des identifications de faces pour  $F_1^0$ , qui préservent l'hyperplan  $H_1^0$ . La face  $F_3^0$  est orthogonale à  $F_1^0$ , donc l'isométrie  $\tau_3^0$  préserve  $H_1^0$  et induit une réflexion par rapport à la géodésique portant  $F_3^0 \cap F_1^0$ . Les faces  $F_2^0$  et  $F_4^0$ , en revanche, font un angle de  $\pi/4$  avec  $F_1^0$ , donc les réflexions correspondantes ne préservent pas  $H_1^0$ . Mais l'angle de  $\pi/4$  assure que les éléments  $(\tau_1^0 \tau_2^0)^2$  (respectivement  $(\tau_1^0 \tau_4^0)^2$ ) préservent  $H_1^0$ , et induisent une réflexion par rapport à l'axe  $F_2^0 \cap F_1^0$  (respectivement  $F_4^0 \cap F_1^0$ ) sur  $H_1^0$ .

Le triangle de Coxeter  $F_1^0$  est donc muni d'identifications de faces provenant du groupe  $\Gamma_0$ , et ce sont toutes des réflexions de  $H_1^0$ . Le théorème de Poincaré (version simple) assure que le quotient de  $F_1^0$  par ces identifications de faces est bien un orbifold de Coxeter (privé de deux hypersurfaces), quotient de  $H_1^0$  par le groupe engendré par les trois réflexions  $\tau_3^0, (\tau_1^0 \tau_2^0)^2$  et  $(\tau_1^0 \tau_4^0)^2$ .

La seule isométrie de  $\Gamma_0$  qui stabilise la face  $F_1^0$  est  $\tau_1^0$ , la réflexion par rapport à  $H_1^0$ . On en déduit que le sous-groupe  $\Gamma_{d0,1}$  défini par

$$\Gamma_{d0,1} = \langle \tau_3^0, (\tau_1^0 \tau_2^0)^2, (\tau_1^0 \tau_4^0)^2, \tau_1^0 \rangle$$

est le stabilisateur de  $H_1^0$  dans  $\Gamma_0$ . Puisque  $\tau_1^0$  agit comme l'identité sur  $H_1^0$ , le sous-orbifold  $H_1^0/\Gamma_{d0,1} \subset \mathbb{H}^3/\Gamma_0$  (privé des arêtes correspondant à des métriques doublement dégénérées) est en bijection l'espace de modules des métriques dégénérées équatoriales.

Le raisonnement peut se poursuivre de même pour l'étude des métriques doublement (respectivement triplement) dégénérées obtenues à partir d'une métrique de type 0. On obtient donc une décomposition de l'orbifold  $\mathbb{H}^3/\Gamma_0$  en sous-orbifolds de dimension décroissante correspondant à l'espace de modules de métriques de type 0 admettant de plus en plus de dégénérescences.

Noter que les résultats sont identiques lorsqu'on considère les métriques dégénérées comme provenant du type 1 : l'espace de modules est alors en bijection avec le sous-orbifold  $H_1^1/Stab_{\Gamma_1}(H_1^1)$  de  $\mathbb{H}^3/\Gamma_1$  (privé des arêtes représentant des métriques doublement dégénérées), où  $H_1^1$  est l'hyperplan de  $\mathbb{H}^3$  portant la face  $F_1^1$  de  $\mathcal{P}_1$ .

### 2.3.4.2 Métriques de type 1 et 2 dégénérées

Les métriques dégénérées qui admettent une paire de singularités conjuguées peuvent provenir de métriques de type 1 (elles correspondent alors aux faces  $F_2^1$  et  $F_3^1$  de  $\mathcal{P}_1$ ) ou de type 2 (faces  $F_1^{2,i}$  de  $\mathcal{P}_{2,i}$  et  $F_1^{2,ii}$  de  $\mathcal{P}_{2,ii}$ , qui se recollent pour former la face  $F_1^2$  de  $\mathcal{P}_2$ ). Deux faces différentes apparaissent dans chaque cas, correspondant aux deux familles de polygones obtenues lors du développement de telles métriques. Ces faces sont bien entendu recollées lors du passage au quotient par les identifications de faces.

Le raisonnement du paragraphe précédent s'applique de la même façon. Considérons par exemple le cas des métriques de type 1. Les deux faces  $F_2^1$  et  $F_3^1$  admettent des identifications de faces provenant de  $\Gamma_1$ , qui vérifient les hypothèses du théorème de Poincaré. Leur quotient par les identifications est un quadrilatère de Lambert avec un sommet idéal : il admet trois angles droits, et le dernier sommet est à l'infini. Un dessin du quadrilatère est donné Figure 2.38. Les deux faces sont recollées via l'isométrie  $\tau_6^1$ , donc l'espace obtenu est exactement une des faces du polyèdre double  $\mathcal{P}_{1,double}$ , voir Figure 2.21. On retrouve aussi le dessin de la face  $F_1^2$  du polyèdre  $\mathcal{P}_2$  (voir Figure 2.27).

Seule la facette numéro 5 appartient à l'espace de modules des métriques considérées. Les trois autres sont exclues du quadrilatère car elles représentent des métriques doublement dégénérées.

L'orbifold de Coxeter ainsi obtenu est bien un sous-orbifold de  $\mathbb{H}^3/\Gamma_1$  et de  $\mathbb{H}^3/\Gamma_2$ , quotient de l'hyperplan portant la face  $F_2^1$  (respectivement  $F_2^2$ ) par son stabilisateur dans  $\Gamma_1$  (respectivement  $\Gamma_2$ ).

L'étude des métriques doublement et triplement dégénérées se fait de la même façon.

### 2.3.4.3 Métriques de type 2 et 3 dégénérées

Les métriques dégénérées communes aux métriques de type 2 et 3 correspondent aux faces  $F_2^2$  de  $\mathcal{P}_2$  et  $F_1^3$  de  $\mathcal{P}_3$ . Ce sont des métriques dégénérées admettant deux paires de singularités conjuguées. On vérifie de la même façon qu'elles sont munies d'identifications de faces provenant des groupes  $\Gamma_2$  (respectivement  $\Gamma_3$ ), qui vérifient le théorème de



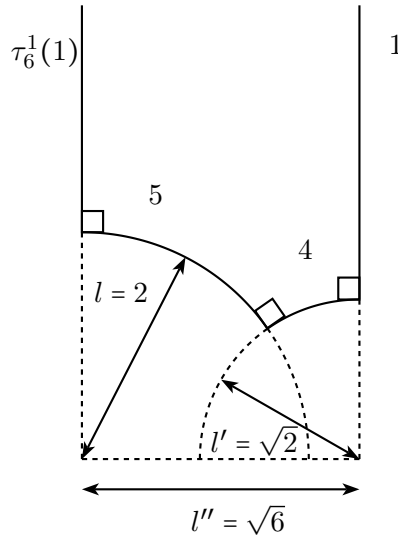


FIGURE 2.38 – Dessin de l’orbifold de Coxeter en bijection avec l’espace de modules des métriques dégénérées à une paire de singularités conjuguées. Les numéros correspondent à la numérotation des faces de  $\mathcal{P}_1$ . Les longueurs indiquées sont les longueurs euclidiennes dans le demi-plan de Poincaré.

Poincaré. L’orbifold obtenu est un triangle de Coxeter compact, et il peut être vu comme sous-orbifold de  $\mathbb{H}^3/\Gamma_2$  et  $\mathbb{H}^3/\Gamma_3$ . La Figure 2.39 donne son diagramme de Coxeter, et la Figure 2.40 une représentation dans le demi-espace de Poincaré.

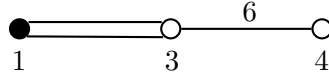


FIGURE 2.39 – Diagramme de Coxeter de l’espace de modules des métriques dégénérées à deux paires de singularités conjuguées. Les numéros correspondent à la numérotation des faces de  $\mathcal{P}_2$ .

Le côté du triangle correspondant au sommet noir du diagramme, ainsi que le point entre les deux côtés formant un angle de  $\pi/6$  sont exclus du triangle : ils représentent des métriques doublement ou triplement dégénérées.

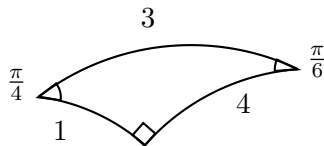


FIGURE 2.40 – Dessin de l’orbifold de Coxeter en bijection avec l’espace de modules des métriques dégénérées à deux paires de singularités conjuguées.

On obtient finalement une description de chaque orbifold  $\mathbb{H}^3/\Gamma_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , comme union d’espaces de modules de métriques de type  $k$  de plus en plus dégénérées, comme résumé dans la proposition suivante :

**Proposition 2.3.15.** *Les orbifolds  $\mathbb{H}^3/\Gamma_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , admettent une décomposition en sous-orbifolds non complets de dimension décroissante, tels que :*

- l'adhérence de l'union des composantes de dimension  $j$  est formée de l'union des composantes de dimension inférieure ou égale à  $j$ ,
- les sous-orbifolds de codimension  $j$  sont les composantes de l'espace de modules des métriques de type  $k$  avec  $j$  dégénérescences.

Cette structure stratifiée ressemble à celle décrite sur les espaces de modules de métriques (non symétriques) de [Thu98].

### 2.3.5 Conclusion

Les résultats sur les métriques à six singularités obtenus dans cette partie peuvent donc être résumés par le théorème suivant :

**Théorème 2.3.16.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}$  des métriques plates symétriques à 6 singularités distinctes d'angles égaux peut être muni d'une topologie telle que :*

- $\mathcal{M}$  admet quatre composantes connexes  $\mathcal{M}_k$ ,  $0 \leq k \leq 3$ , où  $\mathcal{M}_k$  est l'espace de modules des métriques de type  $k$ ,
- pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq 3$ ,  $\mathcal{M}_k$  admet une structure hyperbolique non complète :  $\mathcal{M}_k$  est homéomorphe à un orbifold hyperbolique de Coxeter (ou un quotient d'un orbifold de Coxeter, pour  $k = 1$ ) arithmétique non compact  $\mathbb{H}^3/\Gamma_k$ , privé de sous-orbifolds correspondant aux métriques dégénérées.

Les réseaux  $\Gamma_k$  sont de la forme  $O(q_k, \mathbb{Z})$ , où  $q_k$  est la forme quadratique donnée par la matrice diagonale  $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1, 3, \dots, 3)$  avec  $k$  coefficients "3" sur la diagonale. Leurs diagrammes de Coxeter sont donnés Figures 2.15, 2.19, 2.26, et 2.29 (voir aussi Figure 2.20 pour le double de l'orbifold  $\mathcal{M}_1$ ).

Les orbifolds  $\mathbb{H}^3/\Gamma_k$  se recollent naturellement suivant les sous-orbifolds correspondant à des dégénérescences communes. Le recollement donne une structure d'orbifold hyperbolique de volume fini, non compact et non arithmétique, à l'espace de modules  $\mathcal{M}_t$  des métriques à 6 singularités d'angles égaux éventuellement dégénérées.

Les orbifolds obtenus sont bien les mêmes que ceux des travaux d'Allcock, Carlson et Toledo sur les sextiques réelles [ACT07].

*Remarque 2.3.17.* La même méthode peut être appliquée au cas des métriques plates sur  $\mathbb{S}^2$  à 5 singularités d'angles égaux. J'ai effectué cette étude pendant ma thèse : l'espace de modules des métriques symétriques admet 3 composantes en bijection avec des orbifolds hyperboliques de Coxeter arithmétiques de dimension 2 (privé de certaines hypersurfaces). Le recollement naturel des différentes composantes suivant les sous-orbifolds correspondant aux métriques dégénérées donne un triangle de Coxeter non arithmétique.

L'étude de l'espace de modules des métriques plates symétriques à 6 (ou 5) singularités de même angle donne un exemple de construction de réseaux hyperboliques non arithmétiques. Il est alors naturel de chercher à généraliser cette approche aux espaces de modules suivants, par exemple à 8 ou 12 singularités de même angle (pour ces valeurs, l'espace de modules complexe étudié par Thurston est un orbifold). C'est l'une des motivations de la partie suivante de ce chapitre, sur les métriques à 8 singularités, qui a fait l'objet du travail de mes premières années de thèse. Cette étude est cependant moins concluante, puisque le recollement naturel des composantes ne donne pas un réseau non arithmétique comme espéré, mais un groupe non discret.

## 2.4 Le cas des métriques plates à 8 singularités : description des composantes

Dans la section précédente, l'étude des espaces de modules de métriques symétriques à 6 singularités d'angles égaux a permis de retrouver de façon élémentaire les résultats d'Allcock, Carlson et Toledo (qui utilisent la théorie géométrique des invariants) sur les sextiques réelles, voir [ACT07]. Leurs travaux sur les sextiques ont été adaptés par Chu [Chu06, Chu11] au cas des octiques réelles (voir l'introduction et le théorème 0.0.4) : avec le même type d'approche, il étudie les composantes de l'espace de modules des octiques réelles, et leur recollement (voir [Chu11], théorème 8.0.1 et corollaire 7.4.4). On résume brièvement ses résultats. Les composantes de l'espace de modules des octiques lisses réelles sont au nombre de cinq. Comme dans le cas des sextiques, elles admettent une structure incomplète d'orbifold hyperbolique de dimension 5, dont le complété métrique est un orbifold  $\mathbb{H}^5/\Gamma_j$  arithmétique non compact. Chaque composante est commensurable à un orbifold du type  $\mathbb{H}^5/O(q_j, \mathbb{Z})$ , où  $q_j$  est une forme quadratique de signature  $(5, 1)$ . Les diagrammes de Coxeter de ces groupes d'isométries sont calculés grâce à l'algorithme de Vinberg. Les composantes admettent un recollement naturel suivant les hypersurfaces correspondant aux octiques admettant des racines doubles, mais contrairement au cas des sextiques, ce recollement n'est pas concluant et ne permet pas de définir une structure d'orbifold sur l'espace de modules des octiques stables.

Dans cette partie, on utilise à nouveau la description "à la Thurston" en termes de métriques sur la sphère pour retrouver les résultats de Chu. Les outils géométriques utilisés permettent cependant d'obtenir des résultats plus fins sur les orbifolds et l'obstruction au recollement. Les groupes  $\Gamma_j$  sont décrits explicitement : pour chacun, on donne une partie génératrice explicite, et une présentation associée. Les indices de commensurabilité entre les groupes  $\Gamma_j$  et  $O(q_j, \mathbb{Z})$  sont aussi calculés explicitement. Enfin, l'obstruction au recollement est étudiée plus en détail : l'espace de modules des métriques symétriques à 8 singularités d'angles égaux, éventuellement dégénérées (voir section 2.1.5), peut être décrit comme le quotient d'une union de polyèdres hyperboliques par des identifications de faces explicites. L'obstruction de Chu est bien retrouvée : l'angle autour de certaines sous-variétés de codimension 2 dans le quotient est de  $3\pi/4$ , qui n'est pas un sous-multiple de  $\pi$ . On montre de plus que le groupe engendré par ces identifications de faces n'est pas discret dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^5)$ .

La description des composantes comme orbifolds hyperboliques se fait de manière semblable au cas de 6 singularités, mais les calculs sont plus compliqués. Les polyèdres obtenus ne sont plus de Coxeter, donc la vérification des hypothèses du théorème de Poincaré est plus laborieuse. Le calcul explicite des indices de commensurabilité entre les groupes  $\Gamma_j$  et  $O(q_j, \mathbb{Z})$  nécessite l'utilisation d'algorithmes classiques de théorie combinatoire des groupes, comme la méthode de Todd-Coxeter.

*Remarque 2.4.1.* Cette section reprend les notations de la section précédente sur les métriques à 6 singularités. Pour plus de lisibilité, le nombre de singularités n'est pas indiqué dans les notations. On considère donc les deux sections comme indépendantes du point de vue de la notation.

### 2.4.1 Paramétrage des composantes

D'après la formule de Gauss-Bonnet (2.1), si une métrique plate sur  $\mathbb{S}^2$  admet 8 singularités coniques d'angles égaux, alors elles sont d'angle  $3\pi/2$ . On s'intéresse dans cette partie aux métriques symétriques (voir définition 2.1.3) à 8 singularités d'angles égaux, étudiées à similitudes préservant la symétrie près. L'étude de cet espace de modules se base à nouveau sur le développement des métriques en polygones euclidiens, comme décrit section 2.1.4. Le paramétrage de ces espaces de polygones permet en retour d'obtenir une description de l'espace de modules des métriques.

Pour une métrique symétrique  $(M, d, \sigma)$ , les singularités coniques sont soit des points fixes de  $\sigma$ , soit échangées deux à deux par  $\sigma$ . Il y a donc cinq types naturels de métriques symétriques à 8 singularités d'angles égaux, suivant le nombre de paires de singularités échangées par l'involution  $\sigma$ . On notera à nouveau  $\mathcal{M}_k$  l'espace de modules des métriques symétriques avec  $k$  paires de singularités conjuguées et  $8 - 2k$  singularités équatoriales ( $0 \leq k \leq 4$ ), dites *métriques de type  $k$* .

#### 2.4.1.1 Développement des métriques et polygones

Soit  $(M, d, \sigma)$  une métrique de type  $k$ , et soient  $l_1, \dots, l_k$  des géodésiques symétriques (voir proposition 2.1.5) entre les paires de singularités conjuguées, deux à deux disjointes. D'après la proposition 2.1.7, un hémisphère de  $(M, d, \sigma)$  se développe, après ouverture suivant les géodésiques  $l_j$ , sur un octogone dont tous les angles font  $3\pi/4$  auquel on ôte  $k$  triangles isocèles orthogonaux au bord. Le polygone obtenu dépend du choix des  $l_j$ . La Figure 2.41 récapitule les familles de polygones obtenues en développant ces métriques. Un polygone issu du développement d'une métrique de type  $k$  est appelé *polygone de type  $k$* . Pour les métriques de type 2 et 3, plusieurs familles de polygones apparaissent, suivant la position des singularités équatoriales par rapport aux géodésiques de découpe.

Dans le cas des métriques de type 1 à 4, les géodésiques symétriques entre deux singularités conjuguées sont visibles sur le polygone obtenu après le développement : ce sont soit des segments orthogonaux au bord du polygone, et passant par la singularité correspondante (géodésiques "continues"), soit des unions de segments comme décrit section 2.1.4, lorsqu'elles intersectent les géodésiques de découpe. Un changement de géodésiques de découpe se traduit simplement par une opération de type "couper-coller" sur le polygone, voir Figure 2.5 : le polygone est ouvert suivant les nouvelles géodésiques, et les différents morceaux sont identifiés suivant les géodésiques initiales.

Pour chaque  $0 \leq k \leq 4$ , notons  $\mathcal{I}_k$  l'ensemble des classes de polygones de type  $k$  à similitudes et changement de géodésiques de découpe près. D'après la proposition 2.1.9, pour tout  $0 \leq k \leq 4$ , l'application suivante est une bijection :

$$\varphi_k : \begin{array}{l} \mathcal{I}_k \rightarrow \mathcal{M}_k \\ [S] \mapsto \left[ \begin{array}{l} \text{métrique obtenue en identifiant les côtés des } k \text{ triangles} \\ \text{ôtés et en collant deux copies de cette pyramide} \end{array} \right] \end{array}$$

Le paramétrage utilisé pour décrire ces polygones est semblable à celui de Thurston (voir section 2.3.2.1). Un octogone dont tous les angles valent  $3\pi/4$  peut être obtenu à partir d'un rectangle en ôtant un petit triangle isocèle en chaque sommet du rectangle, voir Figure 2.42. Il est donc décrit par 6 paramètres : les longueurs des côtés du rectangle de base, notées  $a$  et  $b$ , et les longueurs des côtés identiques des triangles isocèles ôtés, notées  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Les paramètres sont organisés comme indiqué Figure 2.42 : les  $x_i$

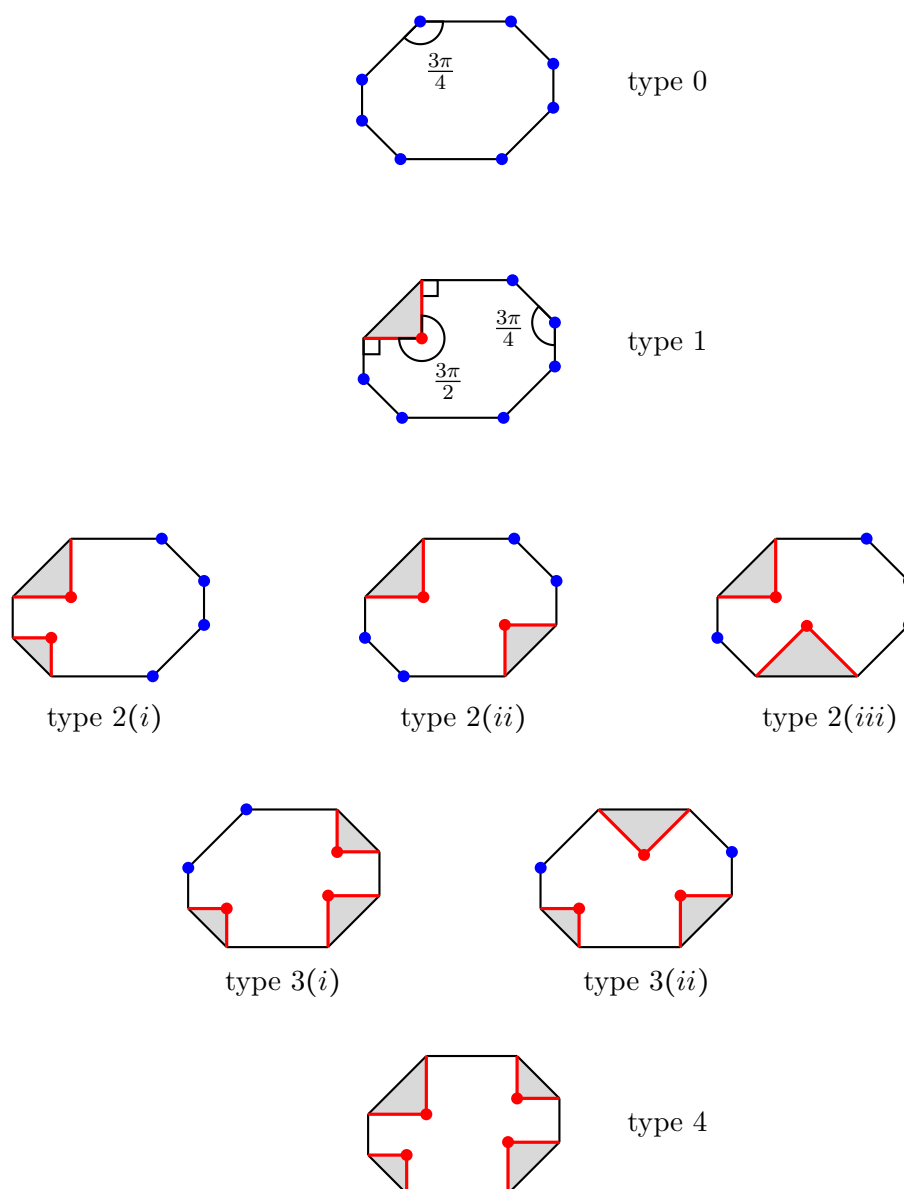
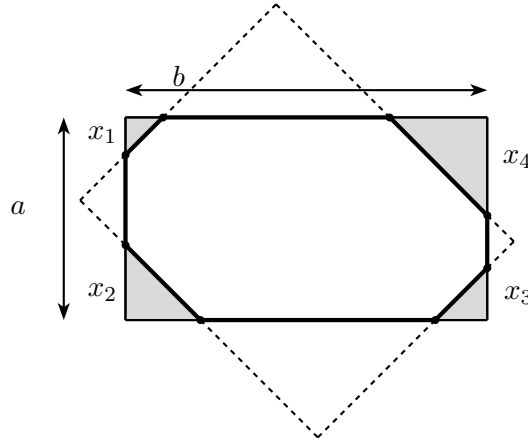


FIGURE 2.41 – Polygones obtenus après développement d’une métrique symétrique à 8 singularités d’angles égaux.

suivent l’ordre cyclique des sommets,  $a$  est la longueur du côté du rectangle portant les triangles de côté  $x_1$  et  $x_2$ , et  $b$  celle du côté portant les triangles de côté  $x_1$  et  $x_4$ . Noter qu’il existe deux rectangles pouvant donner un paramétrage pour l’octogone, le deuxième rectangle est dessiné en pointillés.

Pour chaque type  $0 \leq k \leq 4$ , on pourra alors déterminer des conditions linéaires sur les paramètres  $(a, b, x_1, \dots, x_4)$  pour obtenir une bijection entre l’espace des polygones  $\mathcal{I}_k$  et un (sous-ensemble d’un) polyèdre hyperbolique  $\mathcal{P}_k$  de  $\mathbb{H}^5$  quotienté par des identifications de faces naturelles. La proposition 2.1.9, ainsi que l’application du théorème de Poincaré, permettront alors d’identifier l’espace de modules  $\mathcal{M}_k$  des métriques de type  $k$  avec un orbifold hyperbolique (privé de certaines hypersurfaces).

Les conditions sur les paramètres  $a, b$  et  $x_i$  permettant de construire cette bijection

FIGURE 2.42 – Paramètres décrivant un octogone dont tous les angles font  $3\pi/4$ .

sont à nouveau de trois sortes :

- les conditions assurant la non-dégénérescence des métriques : tous les côtés des polygones doivent être de longueur strictement positive. Ceci se traduit par les inégalités suivantes :

$$(2.13) \quad \begin{cases} 0 < x_i \text{ pour } i = 1, \dots, 4 \\ x_1 + x_2 < a, \quad x_2 + x_3 < b, \quad x_3 + x_4 < a, \quad x_4 + x_1 < b \end{cases}$$

- les conditions permettant d'isoler un unique représentant d'une classe d'isométries de polygones (sauf cas d'égalité entre longueurs de certains côtés),
- pour les métriques de type 1 à 4, les conditions provenant du choix des géodésiques de découpe : ce sont les géodésiques symétriques les plus courtes entre les singularités conjuguées.

#### 2.4.1.2 Métriques de type 0

**Construction d'un polyèdre hyperbolique** Un octogone de type 0 est dit en position standard s'il est centré en l'origine, et s'il a deux côtés opposés horizontaux. Pour un tel octogone, on définit les paramètres  $a, b$  et  $x_i$  comme indiqué Figure 2.42. Une classe d'isométrie d'octogones de type 0 admet 16 représentants en position standard, qui diffèrent par un élément du groupe diédral  $D_8$  engendré par la rotation d'ordre 8 et la symétrie par rapport à l'axe horizontal. Il y a 8 choix pour le côté horizontal supérieur de l'octogone, et deux choix pour l'orientation du bord. Suivant le représentant choisi, le rectangle de paramétrage n'est pas le même : les paramètres obtenus avec le deuxième rectangle sont indiqués Figure 2.43.

Pour isoler un représentant d'une classe d'isométrie, il suffit de fixer un côté et une orientation. On choisit d'imposer les conditions suivantes :

- le côté associé au triangle ôté de longueur  $x_1$  est le plus court de l'octogone : cette condition fixe alors le rectangle de paramétrage, il reste deux possibilités d'orientation qui échangent les paramètres  $x_2$  et  $x_4$  ;
- la condition  $x_2 \leq x_4$  permet d'isoler un représentant de la classe d'isométrie.

Après suppression des inégalités redondantes, la combinaison de ces conditions avec les conditions de non dégénérescence (2.13) définit un polyèdre  $P_0$  de  $\mathbb{R}^6$ , délimité par 7

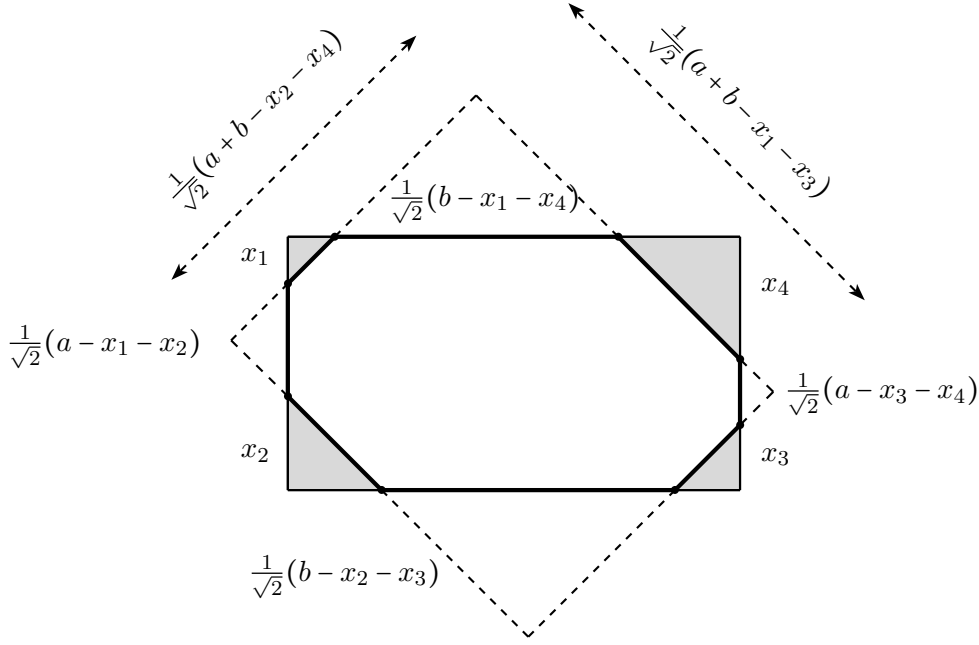


FIGURE 2.43 – Paramètres obtenus à partir de l'autre rectangle.

hyperplans :

$$(2.14) \quad P_0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \\ x_1 \leq x_2 & (2) \\ x_2 \leq x_4 & (3) \\ x_1 \leq x_3 & (4) \\ \sqrt{2}x_1 \leq a - x_3 - x_4 & (5) \\ \sqrt{2}x_1 \leq b - x_2 - x_3 & (6) \\ \sqrt{2}x_1 \leq b - x_1 - x_4 & (7) \end{array} \right.$$

*Remarque 2.4.2.* Les paramètres  $x_i$  représentent la longueur des côtés identiques des triangles isocèles ôtés au rectangle. Ce ne sont pas les longueurs des côtés de l'octogone : le côté du polygone correspondant à  $x_1$  est de longueur  $\sqrt{2}x_1$ , d'où les coefficients  $\sqrt{2}$  dans les inégalités.

Il reste à quotienter par les homothéties. La structure hyperbolique est obtenue grâce à la forme quadratique donnée par l'aire des polygones en fonction des paramètres. Étant donné un octogone  $S$  paramétré par  $(a, b, x_1, \dots, x_4)$ , l'aire de  $S$  est

$$\text{aire}(S) = ab - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2$$

Soit  $q_0$  la forme quadratique définie par

$$q_0(a, b, x_1, \dots, x_4) = -2ab + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Les points de  $P_0$  sont négatifs pour  $q_0$  par construction, et  $q_0$  est de signature  $(5, 1)$ , donc le quotient de  $P_0$  par les homothéties est un polyèdre hyperbolique de  $\mathbb{H}^5$ , noté  $\mathcal{P}_0$ . On notera  $F_j^0$  la face de  $\mathcal{P}_0$  associée à l'inégalité  $(j)$ .

Par construction, l'application

$$\begin{aligned} \psi_0 : \quad \mathcal{P}_0 &\rightarrow \mathcal{I}_0 \\ (a, b, x_1, \dots, x_4) &\mapsto [\text{polygone de type 0 de paramètres } (a, b, x_1, \dots, x_4)] \end{aligned}$$

est surjective, et est injective sur l'intérieur de  $\mathcal{P}_0$ . Les faces fermées de  $\mathcal{P}_0$  (données par des inégalités larges) représentent des métriques dans lesquelles certaines longueurs sont égales, et qui admettent donc plusieurs paramétrages. Pour obtenir une bijection, il faudra donc quotienter par les changements de paramétrage associés à chaque face fermée de  $\mathcal{P}_0$  (voir l'étude des métriques à 6 singularités, par exemple la section 2.3.2.2).

**Géométrie et combinatoire de  $\mathcal{P}_0$**  A partir de la forme quadratique  $q_0$  et des inégalités définissant  $\mathcal{P}_0$ , on peut déterminer les vecteurs polaires aux faces de  $\mathcal{P}_0$ , et donc les angles dièdres entre les faces. La matrice des angles dièdres du polyèdre est donnée dans l'annexe B.

$\mathcal{P}_0$  n'est pas un polyèdre de Coxeter : la plupart des angles ne sont pas de la forme  $\pi/k$ , certains sont même des multiples irrationnels de  $\pi$ . Les vérifications des hypothèses du théorème de Poincaré devront donc être faites avec soin pour vérifier que les angles "problématiques" se compensent bien dans les cycles d'arêtes.

La combinatoire de  $\mathcal{P}_0$  a un sens du point de vue de l'espace de modules. La face  $F_1^0$ , exclue du polyèdre, représente des métriques dégénérées, pour lesquelles deux singularités équatoriales coïncident.  $\mathcal{P}_0$  admet trois sommets à l'infini, qui correspondent aux façons pour un polygone de type 0 de dégénérer en segment (d'aire nulle, donc au bord de l'espace hyperbolique), dans la direction des paramètres  $a, b$  ou  $x_2$ , voir Figure 2.44. En coordonnées homogènes, ce sont les points  $[1, 0, 0, 0, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0, 0, 0, 0]$ ,  $[1, 1, 0, 1, 0, 1]$ . Les sommets finis de  $\mathcal{P}_0$  représentent les façons pour un polygone de type 0 de dégénérer en triangle.

$\mathcal{P}_0$  admet seulement un nombre fini de sommets à l'infini, il est donc de volume hyperbolique fini d'après la proposition 2.2.7.

**Changements de paramétrage** A chaque face  $F_j^0$  de  $\mathcal{P}_0$ , on peut associer une isométrie pour  $q_0$ , notée  $\tau_j^0$ , correspondant au changement de paramétrage associé à la face. Ces isométries sont des identifications de faces (au sens du théorème de Poincaré) pour le polyèdre.

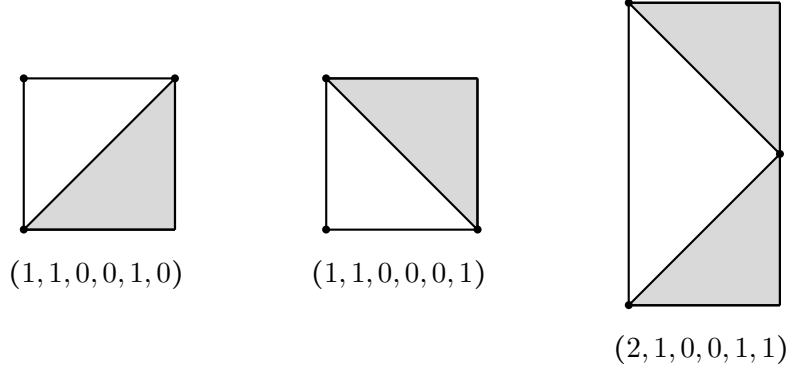
La détermination de ces changements de paramétrage se fait comme dans le cas des métriques à 6 singularités. Une difficulté supplémentaire apparaît cependant pour les métriques à 8 singularités : il faut parfois séparer artificiellement une face en deux "demi-faces", associées chacune à un changement de paramétrage différent. On détaille le cas de la face  $F_5^0$  en exemple. Les autres faces se traitent de la même façon.

$F_5^0$  est portée par l'hyperplan  $\{\sqrt{2}x_1 = a - x_3 - x_4\}$ . Etant donné un polygone de type 0 représenté par les paramètres  $(a, b, x_1, \dots, x_4) \in P_0$ , le changement de paramétrage associé à cette face consiste à prendre le côté de longueur  $a - x_3 - x_4$  comme côté de référence, associé au nouveau paramètre  $x'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - x_3 - x_4)$ . Ceci fixe le rectangle de paramétrage (noter que dans ce cas, on doit considérer le deuxième rectangle, en pointillés sur la Figure 2.43). Il reste à déterminer les autres paramètres  $x'_j, a', b'$ , qui doivent vérifier les conditions suivantes :

- $x'_2 \leq x'_4$ ,
- le côté du rectangle auquel on ôte les triangles de longueur  $x'_1$  et  $x'_2$  (respectivement  $x'_1$  et  $x'_4$ ) correspond au paramètre  $a'$  (respectivement  $b'$ ).



Sommets finis :



Sommets infinis :

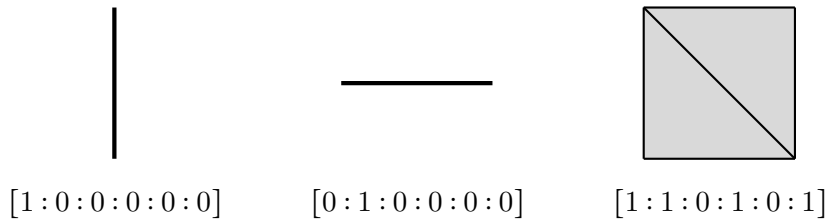


FIGURE 2.44 – Les sommets de  $\mathcal{P}_0$  correspondent à des dégénérescences en triangles pour les sommets finis, et en segments pour les sommets infinis.

La première étape est donc de déterminer les côtés correspondant aux paramètres  $x'_2$  et  $x'_4$ . Les deux côtés concernés sont de longueur  $b - x_1 - x_4$  et  $b - x_2 - x_3$ . Il faut comparer ces longueurs, pour vérifier la condition  $x'_2 \leq x'_4$ . Les conditions définissant  $P_0$  ne permettent pas de comparer ces deux longueurs : suivant les cas, l'un ou l'autre des côtés est le plus court des deux. Il faut donc distinguer les cas, ce qui donne deux changements de paramétrage différents.

Si  $b - x_1 - x_4 \leq b - x_2 - x_3$ , i.e.  $x_2 + x_3 \leq x_1 + x_4$ , la condition  $x'_2 \leq x'_4$  implique

$$x'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_1 - x_4) \quad \text{et} \quad x'_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_2 - x_3)$$

On en déduit finalement  $x'_3$ , puis  $a'$  et  $b'$ . Toutes les longueurs correspondantes sont indiquées Figure 2.43.

Notons  $F_{5,1}^0$  la demi-face définie par

$$F_{5,1}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 = a - x_3 - x_4 \\ x_2 + x_3 \leq x_1 + x_4 \end{array} \right\} \cap \mathcal{P}_0$$

L'étude précédente donne le changement de paramétrage  $\tau_{5,1}^0$  associé à  $F_{5,1}^0$  :

$$\tau_{5,1}^0 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_1 - x_3 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_1 - x_4 \\ a - x_1 - x_2 \\ b - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Puisque  $\sqrt{2}x_1 = b' - x'_2 - x'_3$ , on en déduit que  $\tau_{5,1}^0$  est une identification de face de  $F_{5,1}^0$  sur  $F_6^0$ . Il est facile de vérifier que  $\tau_6^0$  est bien l'inverse de  $\tau_{5,1}^0$ .

Le deuxième cas se traite de la même façon. Notons  $F_{5,2}^0$  l'autre demi-face, définie par

$$F_{5,2}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 = a - x_3 - x_4 \\ x_1 + x_4 \leq x_2 + x_3 \end{array} \right\} \cap \mathcal{P}_0$$

Si  $x_1 + x_4 \leq x_2 + x_3$ , alors la condition  $x'_2 \leq x'_4$  implique  $x'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_2 - x_3)$  et  $x'_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_1 - x_4)$ . Le reste des longueurs s'obtient à partir de la Figure 2.43. L'isométrie correspondante est notée  $\tau_{5,2}^0$  :

$$\tau_{5,2}^0 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_2 - x_4 \\ a + b - x_1 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_1 - x_2 \\ b - x_1 - x_4 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas,  $\sqrt{2}x_1 = a' - x'_3 - x'_4$ , donc  $\tau_{5,2}^0$  préserve l'hyperplan portant la face  $F_5^0$ . La condition  $x_2 \leq x_4$  devient  $x'_1 + x'_4 \leq x'_2 + x'_3$ , on en déduit donc que  $\tau_{5,2}^0$  est une identification de faces de  $F_{5,2}^0$  sur elle-même. En particulier, c'est une involution. (On peut aussi le voir de façon plus algébrique, en considérant l'image des polaires par  $\tau_{5,2}^0$ .)

Dans la suite, en particulier pour l'application du théorème de Poincaré, les faces  $F_{5,1}^0$  et  $F_{5,2}^0$  seront bien considérées comme deux faces distinctes (avec simplement la particularité d'être coplanaires).

Les autres changements de paramétrage se déterminent de façon similaire. Ils sont donnés en annexe, voir Table A.4 p.196. Les faces  $F_j^0$ , pour  $j \neq 5$ , ne nécessitent pas d'être séparées en deux faces. Comme pour le cas des métriques à 6 singularités, on associe à une face ouverte du polyèdre la réflexion par rapport à cette face : seule  $F_1^0$  est exclue de  $\mathcal{P}_0$ , et  $\tau_1^0$  est donc par convention la réflexion hyperbolique par rapport à l'hyperplan portant  $F_1^0$ ,  $\{x_1 = 0\}$ .

**Application du théorème de Poincaré** L'étude des métriques permet de construire naturellement des isométries qui sont, par construction, des identifications de faces pour le polyèdre  $\mathcal{P}_0$ . La vérification des hypothèses du théorème de Poincaré pour ces identifications de faces donnera alors le résultat suivant :

**Proposition 2.4.3.** *Soit  $\Gamma_0$  le groupe engendré par les identifications de faces  $\tau_j^0$ ,  $j = 1, \dots, 7$  :  $\Gamma_0$  est discret, et (l'adhérence dans  $\mathbb{H}^5$  de)  $\mathcal{P}_0$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma_0$ . La composante  $\mathcal{M}_0$  des métriques plates symétriques à 8 singularités de type 0 est en bijection avec l'orbifold hyperbolique non cocompact et de volume fini  $\mathbb{H}^5/\Gamma_0$ , privé de la face  $F_1^0$ .*

La vérification des hypothèses du théorème de Poincaré se fait en deux temps : d'abord l'étude des cycles d'arêtes, puis l'étude des points à l'infini.

Pour chaque paire de faces  $F_i^0$  et  $F_j^0$  du polyèdre, on vérifie si l'arête  $F_i^0 \cap F_j^0$  correspondante est non vide et de codimension 2. La vérification peut se faire algébriquement,

en étudiant les inégalités définissant le polyèdre : le système linéaire où les conditions (i) et (j) sont des égalités, et où toutes les autres inégalités sont strictes, doit avoir une solution. La plupart des cas sont vérifiables à la main. Les calculs peuvent aussi être vérifiés en utilisant des logiciels de calcul formel, comme Mathematica : les commandes d'optimisation linéaire permettent de déterminer si le domaine convexe défini par ces égalités et inégalités est vide ou non. La méthode utilisée par ces logiciels est en général la méthode du simplexe (voir par exemple [Van14]).

Lorsque l'intersection  $F_i^0 \cap F_j^0$  définit bien une arête de codimension 2, on détermine le cycle d'arêtes correspondant. Ce n'est pas difficile, mais il faut faire attention aux faces coplanaires, ainsi qu'aux angles dièdres qui ne sont pas des multiples rationnels de  $\pi$ . On détaille ici l'exemple de l'arête  $F_6^0 \cap F_2^0$ , qui a pour angle dièdre  $\pi - \arccos((2 - \sqrt{2})/4)$ .

$F_6^0 \cap F_2^0$  est définie par les équations  $\{x_1 = x_2, \sqrt{2}x_1 = b - x_2 - x_3\}$  et les inéquations restantes du polyèdre  $\mathcal{P}_0$ . Pour obtenir l'image par l'identification de face  $\tau_2^0$  associée à  $F_2^0$ , il suffit d'étudier les images par  $\tau_2^0$  des polaires de  $\mathcal{P}_0$ . L'image de l'arête étudiée est portée par le sous-espace défini par  $\{x_1 = x_2, \sqrt{2}x_2 = b - x_1 - x_4\}$ . Ces équations sont équivalentes à  $\{x_1 = x_2, \sqrt{2}x_1 = b - x_1 - x_4\}$ , qui est le sous-espace portant  $F_2^0 \cap F_7^0$ , où  $F_2^0 = \tau_2^0(F_2^0)$ .

Il faut maintenant étudier l'image de l'arête  $F_2^0 \cap F_7^0$  par l'identification  $\tau_7^0$  associée à  $F_7^0$ .  $\tau_7^0$  envoie  $F_7^0$  sur elle-même, donc l'arête image sera de la forme  $F_7^0 \cap ?$ . L'étude des polaires donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ \sqrt{2}x_1 = b - x_1 - x_4 \end{array} \right. \xrightarrow{\tau_7^0} \left\{ \begin{array}{l} b - x_1 = a - x_3 \\ \sqrt{2}x_1 = b - x_1 - x_4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 = a - x_3 - x_4 \\ \sqrt{2}x_1 = b - x_1 - x_4 \end{array} \right.$$

Les équations obtenues sont celles définissant  $F_7^0 \cap F_5^0$ . Mais la face  $F_5^0$  est séparée en deux faces distinctes,  $F_{5,1}^0$  et  $F_{5,2}^0$ , il faut donc déterminer laquelle des deux est atteinte. L'image par  $\tau_7^0$  du demi-espace délimité par  $F_4^0$  est donnée par  $\{x_2 + x_3 \leq x_1 + x_4\}$  : on en déduit que la deuxième face délimitant l'arête image est  $F_{5,1}^0$ . On obtient donc l'arête  $F_7^0 \cap F_{5,1}^0$ .

La dernière étape du cycle se fait de la même façon. L'isométrie  $\tau_{5,1}^0$  envoie  $F_{5,1}^0$  sur  $F_6^0$ . L'image de l'arête  $F_7^0 \cap F_{5,1}^0$  par  $\tau_{5,1}^0$  est donnée par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_2 = b - x_2 - x_3 \\ \sqrt{2}x_1 = b - x_2 - x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ \sqrt{2}x_1 = b - x_2 - x_3 \end{array} \right.$$

L'arête obtenue est donc  $F_6^0 \cap F_2^0$ , l'arête de départ. Le cycle d'arêtes est donc :

$$F_6^0 \cap F_2^0 \xrightarrow{\tau_2^0} F_2^0 \cap F_7^0 \xrightarrow{\tau_7^0} F_7^0 \cap F_{5,1}^0 \xrightarrow{\tau_{5,1}^0} F_6^0 \cap F_2^0$$

La transformation de cycle associée,  $\tau_{5,1}^0 \cdot \tau_7^0 \cdot \tau_2^0$ , est l'identité (vérifié sur les matrices, données Table A.4 en annexe). On en déduit que la somme des angles dièdres des arêtes du cycle est  $2\pi$ . C'est aussi vérifiable directement sur les angles, avec quelques manipulations algébriques.

Le reste des cycles d'arêtes se traite de la même façon. Tous les cycles de  $\mathcal{P}_0$  vérifient les conditions du théorème de Poincaré.

Considérons maintenant les sommets à l'infini de  $\mathcal{P}_0$  : il y a trois tels sommets, correspondant aux dégénérescences des polygones en segments suivant la direction de  $a$ ,  $b$  ou  $x_2$  (cf. Figure 2.44). D'après la proposition 2.2.8, pour vérifier l'existence d'horosphères cohérentes basées en les sommets à l'infini du polyèdre, il suffit de trouver pour chaque

sommet  $v_j \in \partial_\infty \mathcal{P}_0$  un représentant  $V_j \in \mathbb{R}^6$  tels que pour toute face  $F_i^0$  de  $\mathcal{P}_0$  passant par  $v_j$ ,  $\tau_i^0(V_j) \in \{V_k \mid k = 1, 2, 3\}$ .

Les trois sommets à l'infini de  $\mathcal{P}_0$  sont donnés en coordonnées homogènes par  $[1, 0, 0, 0, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0, 0, 0, 0]$ ,  $[1, 1, 0, 1, 0, 1]$ . On voit facilement que les points  $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$  et  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 1, 0, 1)$  vérifient la propriété ci-dessus. Les hypothèses du théorème de Poincaré sont donc toutes vérifiées.

En plus de la structure d'orbifold hyperbolique sur  $\mathcal{M}_0$ , le théorème de Poincaré permet d'obtenir une présentation de  $\Gamma_0$ , le groupe engendré par les identifications de faces  $\tau_j^0$ . Les relations sont données par les relations de paires et les relations de cycles, voir section 1.3. La présentation obtenue pour  $\Gamma_0$  est la suivante, où l'on note  $\tau_j^0$  par le numéro  $j$  dans les relations pour plus de lisibilité ( $\tau_{5_1}^0$  est noté  $5_1$ ,  $\tau_{5_2}^0$  est notée  $5_2$ ) :

$$\left\langle \tau_1^0, \dots, \tau_7^0 \mid \begin{array}{l} 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5_1 \cdot 6, (5_2)^2, 7^2, \\ (2 \cdot 1)^4, (3 \cdot 1)^2, (4 \cdot 1)^4, (6 \cdot 1 \cdot 5_1 \cdot 1)^2, (7 \cdot 1)^8, (5_2 \cdot 1)^4, \\ (3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2), (6 \cdot 5_2 \cdot 2), (5_1 \cdot 7 \cdot 2), (4 \cdot 3)^2, (5_2 \cdot 6 \cdot 3), (6 \cdot 7 \cdot 4) \end{array} \right\rangle$$

On retrouve bien, à la dernière ligne, la relation  $\tau_{5_1}^0 \cdot \tau_7^0 \cdot \tau_2^0 = id$  du paragraphe précédent, obtenue lors de l'étude du cycle de l'arête  $F_6^0 \cap F_2^0$ .

**Le groupe  $\Gamma_0$  associé**  $\Gamma_0$  est le groupe engendré par les identifications de faces  $\tau_j^0$  du polyèdre  $\mathcal{P}_0$ . C'est un sous-groupe du groupe orthogonal  $O(q_0, \mathbb{R})$  de la forme quadratique  $q_0$ . Ce n'est pas un sous-groupe d'isométries entières : les générateurs associés aux faces  $F_5^0$  à  $F_7^0$  ne sont pas entiers, voir Table A.4. On montre cependant qu'il est commensurable au groupe  $O(q_0, \mathbb{Z})$ , et donc qu'il est arithmétique.

Considérons pour cela le sous-groupe  $\Gamma'_0 = \Gamma_0 \cap O(q_0, \mathbb{Z})$ .  $\Gamma'_0$  est d'indice fini dans  $\Gamma_0$ , comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 2.4.4.**  $\Gamma'_0$  est d'indice 2 dans  $\Gamma_0$ .

*Démonstration.* Les générateurs non entiers de  $\Gamma_0$  sont tous de la forme  $1/\sqrt{2} M$ , où  $M$  est une matrice entière. On veut montrer les faits suivants :

- les produits de deux générateurs non entiers sont à coefficients entiers,
- les conjugués de la forme  $\delta\gamma\delta^{-1}$  où  $\gamma$  est un générateur entier et  $\delta$  un générateur non entier, sont à coefficients entiers.

Puisque tout mot de longueur paire en les  $\tau_j^0$  peut s'écrire comme produit de générateurs entiers et d'éléments comme ci-dessus, on en déduira alors que tout mot de longueur paire est à coefficients entiers. Ceci montre que  $\Gamma'_0$  est l'ensemble des mots de longueurs paire dans  $\Gamma_0$ , et donc qu'il est d'indice 2 dans  $\Gamma_0$ .

Ces vérifications peuvent se faire directement par le calcul sur les matrices des  $\tau_j^0$ , qui sont données Table A.4. On peut aussi le voir sur les polygones de type 0. Les générateurs non entiers correspondent à des changements de paramétrage vers le second rectangle, en pointillés sur la Figure 2.43. Le produit de deux tels générateurs donne donc un changement de paramétrage au sein du rectangle de base : c'est simplement une permutation des coordonnées  $(a, b, x_1, \dots, x_4)$ , donc la matrice correspondante est entière. Il en est de même pour les conjugués par les générateurs non entiers. Noter que cette remarque ne s'applique pas aux conjugués de la réflexion par rapport à la face  $F_1^0$ , qui n'a pas d'interprétation géométrique au niveau des polygones. On peut cependant vérifier que les générateurs non entiers envoient une polaire de  $F_1^0$  sur un vecteur entier de norme 2, donc les conjugués sont bien à coefficients entiers.  $\square$

Il faut ensuite montrer que  $\Gamma'_0$  est d'indice fini dans  $O(q_0, \mathbb{Z})$ . On le montre en comparant les covolumes des différents groupes.  $\Gamma_0$  étant de covolume fini d'après la proposition 2.4.3, on en déduit que  $\Gamma'_0$  est aussi de covolume fini. D'autre part,  $\Gamma'_0$  est un sous-groupe du groupe discret  $O(q_1, \mathbb{Z})$ , donc son covolume est un multiple de celui de  $O(q_0, \mathbb{Z})$ .  $\Gamma'_0$  étant de covolume fini, ceci implique directement que  $O(q_0, \mathbb{Z})$  est aussi de covolume fini, et que  $\Gamma'_0$  est d'indice fini dans  $O(q_0, \mathbb{Z})$ .

$\Gamma_0$  est donc commensurable au groupe d'isométries entières  $O(q_0, \mathbb{Z})$ . D'après la définition 1.2.6, il est arithmétique. L'indice de commensurabilité peut être déterminé de façon explicite : la méthode sera détaillée section 2.4.2. Elle repose fortement sur l'algorithme de Vinberg pour trouver des générateurs du groupe  $O(q_0, \mathbb{Z})$ , et sur la méthode de Todd-Coxeter (comme implémentée sur le logiciel GAP par exemple) pour déterminer l'indice de  $\Gamma'_0$  dans  $O(q_0, \mathbb{Z})$ .

### 2.4.1.3 Métriques de type 1

Les métriques de type 1 sont obtenues en recollant suivant leur bord deux copies d'un polygone de type 1, comme indiqué Figure 2.41. Le polygone dépend de la géodésique utilisée pour la découpe, donc il faudra étudier les longueurs des géodésiques, ainsi que les changements de paramétrages associés, pour décrire l'espace de modules  $\mathcal{M}_1$  des métriques de type 1.

**Construction d'un polyèdre hyperbolique** La Figure 2.45 indique le paramétrage choisi pour un polygone de type 1. La singularité non équatoriale correspond au paramètre  $x_1$ . Il y a six géodésiques symétriques potentielles issues de cette singularité, notées  $L_a, L_b, L_{x_2}, L_{x_3}$  et  $L_{x_4}$  (voir section 2.1.3 pour les définitions, et 2.3.2.3 pour l'analogie de cette discussion dans le cas de 6 singularités). Les longueurs des géodésiques sont notées par des minuscules. Lorsque l'intersection du segment  $L_*$  avec le côté correspondant est dans le polygone,  $L_*$  représente bien une géodésique pour la métrique. Ce n'est pas toujours le cas, voir par exemple  $L_{x_4}$  sur la figure.

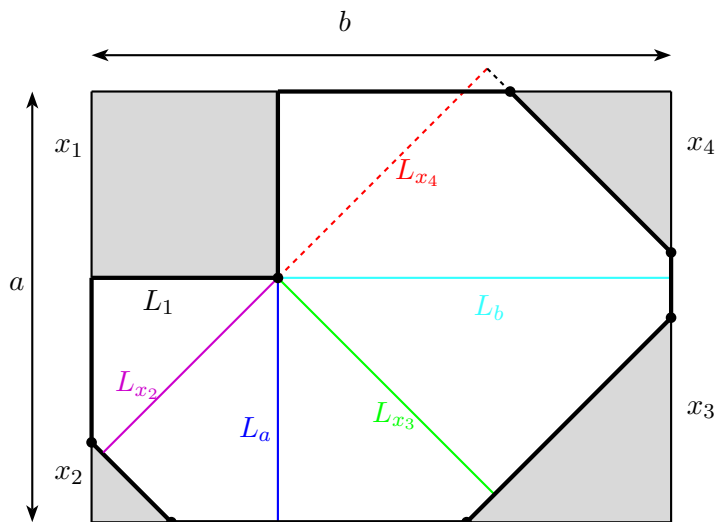


FIGURE 2.45 – Paramétrage d'un polygone de type 1.

Les longueurs des géodésiques potentielles sont calculables en fonction des paramètres :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= x_1, & \ell_a &= a - x_1, & \ell_b &= b - x_1, \\ \ell_{x_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a - x_2), & \ell_{x_4} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_4), & \ell_{x_3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b - 2x_1 - x_3) \end{aligned}$$

Les conditions définissant un polyèdre dont le quotient par les changements de paramètres sera en bijection avec  $\mathcal{M}_1$  sont toujours :

- les conditions (2.13) de non dégénérescence du polygone,
- les conditions permettant d'isoler un représentant d'une classe d'isométrie : dans le cas des polygones de type 1, il n'y a que la symétrie par rapport à la diagonale passant par les sommets associés aux paramètres  $x_1$  et  $x_3$ , donc la condition  $x_2 \leq x_4$  suffit,
- les conditions qui fixent la géodésique de découpe : on demande à nouveau que la géodésique de découpe  $L_1$  soit la plus courte des géodésiques symétriques entre les deux singularités équatoriales.

Cette dernière condition est équivalente au fait que la longueur  $\ell_1$  soit la plus courte parmi toutes les longueurs  $\ell_*$  des géodésiques potentielles, d'après la proposition suivante :

**Proposition 2.4.5.** *Si  $L_1$  est la plus courte parmi les géodésiques symétriques du polygone, alors tout segment  $L_*$  qui ne représente pas une géodésique pour la métrique est de longueur supérieure à  $\ell_1$ .*

*Démonstration.* La preuve se fait au cas par cas, pour chaque géodésique potentielle du polygone. Détaillons le cas de  $L_a$ , les autres se traitent de la même façon. Supposons donc que le segment  $L_a$  ne représente pas une géodésique pour la métrique. Deux cas se présentent, comme indiqué Figure 2.46 : soit  $L_a$  coupe le côté du polygone associé à  $x_2$ , soit il coupe celui associé à  $x_3$ .

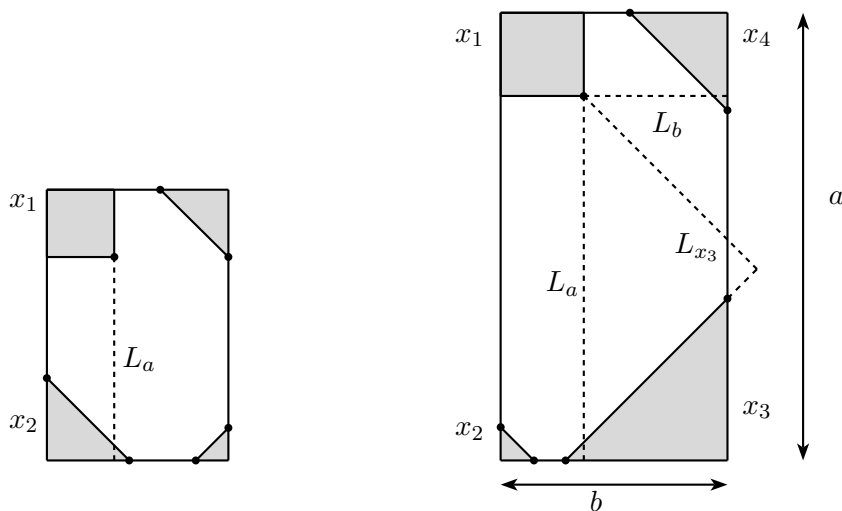


FIGURE 2.46 – Le segment  $L_a$  peut intersecter le côté associé au paramètre  $x_2$  (à gauche) ou  $x_3$  (à droite).

Si  $L_a$  coupe le côté associé à  $x_2$ , on a forcément  $x_1 \leq x_2$ . Puisque  $x_1 + x_2 < a$  par définition, on a alors  $\ell_1 = x_1 < a - x_2 \leq a - x_1 = \ell_a$ .

Supposons maintenant que  $L_a$  coupe le côté associé à  $x_3$ . Alors  $x_1 + x_3 \geq b$ . Deux cas se présentent :

— si  $L_{x_3}$  est une géodésique pour la métrique, alors  $\ell_1 \leq \ell_{x_3}$  par hypothèse, donc

$$\ell_1 \leq \ell_{x_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b - 2x_1 - x_3) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(a - x_1) \leq a - x_1 = \ell_a$$

La conclusion est donc vérifiée.

— on suppose alors que  $L_{x_3}$  n'est pas une géodésique pour la métrique : alors  $b + x_3 \leq a$ , voir Figure 2.46. On peut à nouveau distinguer deux cas :

— si  $L_b$  est une géodésique pour la métrique, alors  $\ell_1 = x_1 \leq b - x_1 = \ell_b$ . Alors

$$\ell_1 = x_1 < b \leq a - x_3 \leq a + x_1 - b \leq a - x_1 = \ell_a$$

— si  $L_b$  n'est pas une géodésique pour la métrique, alors  $x_4 \geq x_1$ . On a donc

$$\ell_1 = x_1 < b - x_4 \leq a + x_1 - b - x_4 \leq a - b < a - x_1 = \ell_a$$

Donc si  $L_a$  n'est pas un segment géodésique, il est de longueur supérieure à  $\ell_1$ . Il en est de même pour les autres géodésiques du polygone.  $\square$

Après suppression des inégalités superflues, on obtient le système suivant, qui décrit un polyèdre  $P_1$  de  $\mathbb{R}^6$  :

$$(2.15) \quad P_1 \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \\ 0 < x_2 & (2) \\ 0 < x_3 & (3) \\ x_2 + x_3 < b & (4) \\ x_3 + x_4 < a & (5) \\ x_2 \leq x_4 & (6) \\ 2x_1 \leq a & (7) \\ 2x_1 \leq b & (8) \\ \sqrt{2}x_1 + x_2 \leq a & (9) \\ \sqrt{2}x_1 + x_4 \leq b & (10) \\ (\sqrt{2} + 2)x_1 + x_3 \leq a + b & (11) \end{array} \right. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \right\} \text{ polygone non dégénéré} \\ \left. \begin{array}{l} (6) \\ (7) \\ (8) \end{array} \right\} \text{ symétrie du polygone} \\ \left. \begin{array}{l} (9) \\ (10) \\ (11) \end{array} \right\} L_1 \text{ géodésique la plus courte} \end{array}$$

L'aire d'un polygone de type 1 en fonction des paramètres est donnée par

$$\text{aire}(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) = ab - x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2$$

Le double de l'opposé de l'aire est alors une forme quadratique de signature (5, 1) à coefficients entiers, notée  $q_1$  :

$$q_1(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) = -2ab + 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Les points de  $P_1$  sont négatifs pour  $q_1$ . Après passage au quotient par les scalaires, on obtient donc un polyèdre hyperbolique  $\mathcal{P}_1 \subset \mathbb{H}^5$ . La face de  $\mathcal{P}_1$  associée à l'inégalité (j) sera notée  $F_j^1$ .

$\mathcal{P}_1$  admet 5 faces "ouvertes" (associées à des inégalités strictes, donc exclues du polyèdre), correspondant à des métriques dégénérées. Il a trois sommets à l'infini, représentant les façons pour un polygone de type 1 de dégénérer en segment : suivant les directions des côtés de paramètre  $a$ ,  $b$ , ou  $x_2$ . (Les dégénérescences suivant les autres directions du polygone sont interdites par les conditions qui définissent  $\mathcal{P}_1$ .) En particulier, il est de volume fini. Le calcul des polaires montre que  $\mathcal{P}_1$  n'est pas un polyèdre de Coxeter. La liste des angles dièdres est donnée en annexe, section B.

**Identifications de faces** La détermination des identifications de faces associées à chaque face de  $\mathcal{P}_1$  se fait de la même façon que pour les métriques de type 0. Les changements de paramétrages associés aux faces  $F_7^1$  à  $F_{11}^1$  correspondent à l'ouverture de la métrique suivant une autre géodésique, comme vu section 2.3.2.3. Détaillons l'exemple de la face  $F_{11}^1$ . Cette face représente les métriques pour lesquelles les géodésiques  $L_1$  et  $L_{x_3}$  sont de même longueur. L'identification de faces associée correspond donc à la découpe suivant la géodésique  $L_{x_3}$ . Le nouveau polygone est obtenu en coupant suivant  $L_{x_3}$ , puis en recollant les deux morceaux suivant les copies isométriques de  $L_1$ . Le nouveau paramétrage obtenu est donné Figure 2.47.

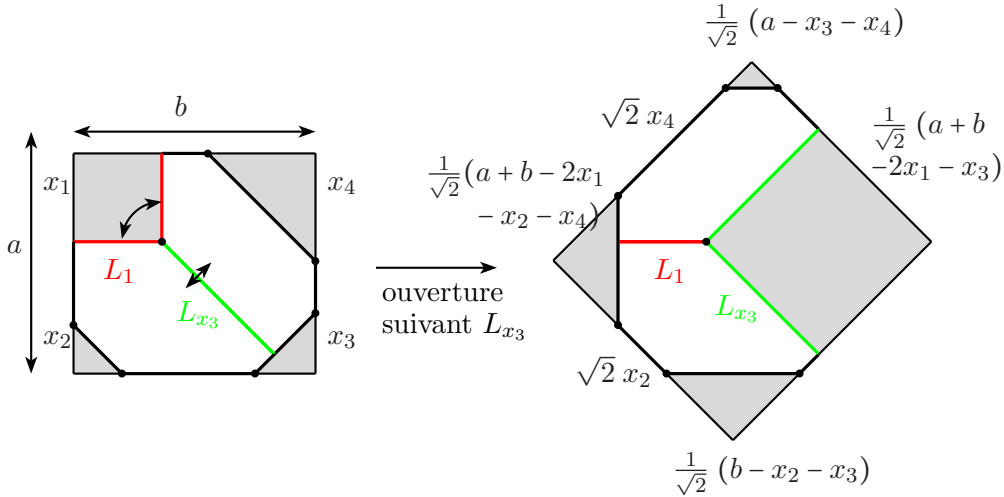


FIGURE 2.47 – Changement de paramétrage associé à la face  $F_{11}^1$  de  $\mathcal{P}_1$  : ouverture suivant la géodésique  $L_{x_3}$ .

On cherche le paramétrage  $(a', b', x'_1, \dots, x'_4) \in \mathcal{P}_1$  décrivant le nouveau polygone. D'après la définition du paramétrage, on sait que  $x'_1$  correspond à la singularité non équatoriale, donc

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + b - 2x_1 - x_3), \text{ et on en déduit } x'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + b - 2x_1 - x_2 - x_4).$$

Les paramètres  $x'_2$  et  $x'_4$  doivent être déterminés par la relation  $x'_2 \leq x'_4$ . On ne peut pas comparer a priori les deux quantités correspondante,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(a - x_3 - x_4)$  et  $\frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_2 - x_3)$ . Il faut donc distinguer deux cas, qui donneront deux identifications de faces différentes.

Supposons d'abord que  $b - x_2 \leq a - x_4$ . Alors tous les paramètres sont déterminés :

$$x'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (b - x_2 - x_3) \leq x'_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a - x_3 - x_4)$$

et donc

$$a' = \frac{1}{\sqrt{2}} (2a + b - 2x_1 - x_2 - x_3) \text{ et } b' = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4).$$

Dans l'autre cas, si  $a - x_4 \leq b - x_2$ , les paramètres  $x'_2$  et  $x'_4$  (respectivement  $a'$  et  $b'$ ) sont échangés.

On sépare donc  $F_{11}^1$  en deux faces. Soit  $F_{11,1}^1$  la face de  $\mathcal{P}_1$  définie par

$$F_{11,1}^1 = \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2} + 2)x_1 + x_3 = a + b \\ b - x_2 \leq a - x_4 \end{array} \right\} \cap \mathcal{P}_1$$



Le changement de paramétrage associé, noté  $\tau_{11,1}^1$ , est donné par

$$\tau_{11,1}^1 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2a + b - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ a + b - 2x_1 - x_3 \\ b - x_2 - x_3 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

La Figure 2.47 montre que  $\tau_{11,1}^1$  envoie  $F_{11}$  sur elle-même (on peut aussi le vérifier via les vecteurs polaires). De même, la condition  $x_2 \leq x_4$  vérifiée par le paramétrage initial assure que  $b' - x_2' - x_3' \leq a' - x_3' - x_4'$ .  $\tau_{11,1}^1$  est donc une identification de faces entre la “demi-face”  $F_{11,1}^1$  et elle-même.

De même, soit  $F_{11,2}^1$  l'autre demi-face, définie par

$$F_{11,2}^1 = \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2} + 2)x_1 + x_3 = a + b \\ a - x_4 \leq b - x_2 \end{array} \right\} \cap \mathcal{P}_1$$

On vérifie de la même façon que le changement de paramétrage associé,

$$\tau_{11,1}^1 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ 2a + b - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ a + b - 2x_1 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

est une identification de faces entre  $F_{11,2}^1$  et elle-même.

Le reste des identifications de faces est donné en annexe, Table A.5 p.198. Les identifications associées aux faces exclues de  $\mathcal{P}_1$  sont les réflexions par rapport aux hyperplans portant ces faces. Les faces  $F_7^1$  à  $F_{11}^1$  doivent chacune être séparées en deux faces coplanaires.

**Résultats** Soit  $\Gamma_1$  le groupe engendré par ces identifications de faces. Les générateurs sont à nouveau soit à coefficients entiers, soit de la forme  $1/\sqrt{2}M$  où  $M$  est à coefficients entiers. Comme pour la proposition 2.4.4, on vérifie que les produits de deux générateurs non entiers, ainsi que les conjugués des générateurs entiers par les autres, sont à coefficients entiers. Le sous-groupe  $\Gamma_1' = \Gamma_1 \cap O(q_1, \mathbb{Z})$  est donc d'indice 2 dans  $\Gamma_1$ .

Les propriétés d'intégralité de ces éléments peuvent encore être observées sur les polygones. Les générateurs non entiers correspondent à des découpes suivant les géodésiques  $L_{x_2}$ ,  $L_{x_3}$  et  $L_{x_4}$ , non parallèles aux côtés du rectangle de paramétrage. Le produit de deux de ces générateurs, ou un conjugué d'un changement de paramétrage entier par un non entier, sera donc simplement la composition d'une découpe suivant une géodésique parallèle aux côtés, et d'une permutation des coordonnées dans le rectangle.

La vérification des hypothèses du théorème de Poincaré est fastidieuse mais sans difficulté particulière.  $\Gamma_1$  est donc un sous-groupe discret de  $O(q_1, \mathbb{R})$ , et l'adhérence de  $\mathcal{P}_1$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma_1$ . Les relations de paires et les relations de cycles fournissent une présentation de  $\Gamma_1$ , donnée dans l'annexe C, p.229.

Puisque  $\mathcal{P}_1$  est de volume fini, on en déduit comme précédemment que  $\Gamma'_1$  est d'indice fini dans le groupe discret  $O(q_1, \mathbb{Z})$ , et donc que  $\Gamma_1$  est commensurable à  $O(q_1, \mathbb{Z})$ .

**Proposition 2.4.6.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_1$  des métriques symétriques de type 1 est en bijection avec l'orbifold hyperbolique arithmétique  $\mathbb{H}^5/\Gamma_1$ , privé des faces  $F_1^1$  à  $F_5^1$ . Il est commensurable à l'orbifold  $\mathbb{H}^5/O(q_1, \mathbb{Z})$ .*

L'orbifold  $\mathbb{H}^5/O(q_1, \mathbb{Z})$  et les indices de commensurabilité seront étudiés plus en détail dans la section 2.4.2.

#### 2.4.1.4 Métriques de type 2

Le cas des métriques de type 2 et 3 est un peu plus compliqué : plusieurs familles de polygones apparaissent lorsque la métrique est développée dans le plan. Pour chaque famille de polygones obtenue, on peut construire un polyèdre hyperbolique de la façon habituelle. Certains changements de paramétrage permettent de passer d'une famille à l'autre, et donnent un recollement naturel de ces différents polyèdres. On applique la version du théorème de Poincaré à plusieurs polyèdres (théorème 2.2.10) pour vérifier que le quotient par les changements de paramétrage est bien un orbifold hyperbolique.

**Trois polyèdres hyperboliques** Le développement dans le plan d'une métrique de type 2 peut donner trois types de polygones différents, représentés Figure 2.41. Considérons d'abord les polygones de type  $2(i)$ , obtenus lorsque les géodésiques de découpe ne séparent pas les singularités équatoriales. Ces polygones peuvent être vus comme un rectangle auquel on ôte deux carrés et deux triangles isocèles au niveau des sommets. Le paramétrage peut être choisi pour que  $x_1$  et  $x_2$  soient les longueurs des carrés ôtés, voir Figure 2.48.

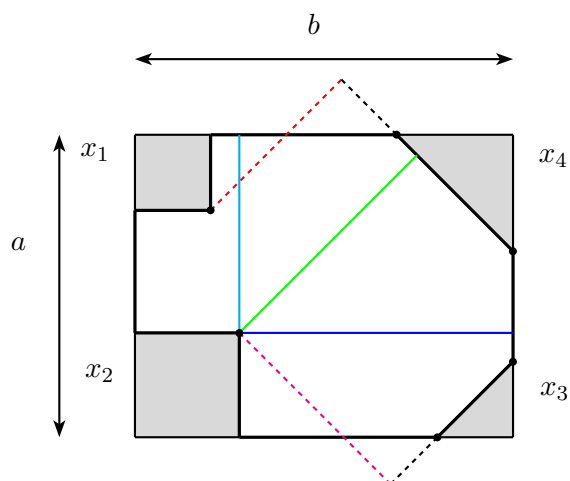


FIGURE 2.48 – Paramétrage d'un polygone de type  $2(i)$ .

La condition  $x_1 \leq x_2$  permet d'isoler un représentant d'une classe d'isométrie de polygones de type  $2(i)$ . En ajoutant les conditions de non dégénérescence, et le fait que chaque géodésique de découpe est la plus courte parmi les géodésiques symétriques joignant les

singularités concernées, on obtient le polyèdre  $P_{2,i} \subset \mathbb{R}^6$  :

$$(2.16) \quad P_{2,i} \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \\ 0 < x_3 & (2) \\ 0 < x_4 & (3) \\ x_3 + x_4 < a & (4) \\ x_1 \leq x_2 & (5) \\ 2x_2 \leq a & (6) \\ 2x_2 \leq b & (7) \\ \sqrt{2}x_1 + x_4 \leq b & (8) \\ \sqrt{2}x_2 + x_3 \leq b & (9) \\ (\sqrt{2} + 2)x_2 + x_4 \leq a + b & (10) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{polygone non dégénéré} \\ \text{symétrie du polygone} \\ \text{les géodésiques de découpe sont les plus courtes} \end{array}$$

La forme quadratique associée au cas 2(i), toujours donnée par l'opposé du double de l'aire d'un polygone, est définie par

$$q_{2,i}(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) = -2ab + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Les points de  $P_{2,i}$  sont négatifs pour  $q_{2,i}$ , donc le quotient par les homothéties est un polyèdre hyperbolique, noté  $\mathcal{P}_{2,i}$ . Noter que les inégalités strictes définissant  $\mathcal{P}_{2,i}$  ne sont pas suffisantes pour assurer la non dégénérescence des métriques : si  $x_1 = x_2 = a/2$  (cas correspondant à l'arête  $F_5^{2,i} \cap F_6^{2,i}$ ), les deux singularités non équatoriales coïncident et la métrique est dégénérée. Cette arête est donc exclue de  $\mathcal{P}_{2,i}$ .

Un polygone de type 2(i) peut dégénérer en segment de deux façons, suivant la direction de  $a$  ou celle de  $b$  :  $\mathcal{P}_{2,i}$  admet donc deux sommets à l'infini. En particulier, il est de volume fini.

Les polygones de type 2(ii) sont obtenus lorsque les deux géodésiques de découpe séparent les singularités équatoriales en deux groupes de deux. Ils peuvent être obtenus à partir d'un rectangle auquel on ôte deux carrés et deux triangles isocèles, les deux carrés ôtés étant au niveau de sommets opposés. Le paramétrage est choisi pour que  $x_1$  et  $x_3$  soient les longueurs des carrés ôtés, voir Figure 2.49.

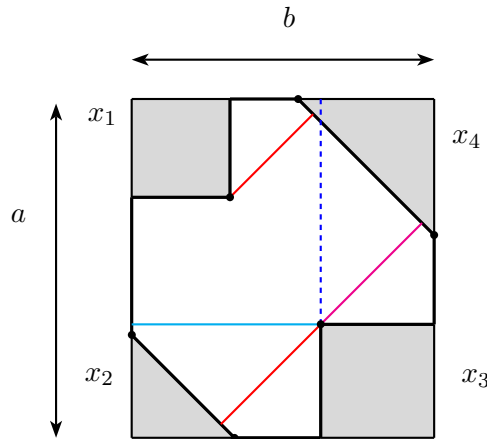


FIGURE 2.49 – Paramétrage d'un polygone de type 2(ii).

La construction d'un polyèdre pour décrire les métriques développées en un polygone de type 2(ii) (lorsque la découpe se fait suivant les géodésiques les plus courtes) se fait de la même façon que précédemment.

Les seules symétries admissibles pour un tel paramétrage sont les réflexions par rapport aux diagonales, qui échangent  $x_1$  et  $x_3$  ou  $x_2$  et  $x_4$ . On choisit donc les conditions  $x_1 \leq x_3$  et  $x_2 \leq x_4$  pour isoler un représentant d'une classe d'isométrie. Le système d'inégalités obtenu avec les autres conditions de non dégénérescence et de longueur des géodésiques définit un polyèdre de  $\mathbb{R}^6$  noté  $P_{2,ii}$  :

$$(2.17) \quad P_{2,ii} \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \\ 0 < x_2 & (2) \\ x_1 \leq x_3 & (3) \\ x_2 \leq x_4 & (4) \\ 2x_3 \leq a & (5) \\ 2x_3 \leq b & (6) \\ \sqrt{2}x_3 + x_4 \leq a & (7) \\ \sqrt{2}x_3 + x_2 \leq b & (8) \\ \sqrt{2}x_1 + x_4 \leq b & (9) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{polygone non dégénéré} \\ \text{symétrie du polygone} \\ \text{les géodésiques de découpe sont les plus courtes} \end{array} \right.$$

La forme quadratique correspondante est

$$q_{2,ii}(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) = -2ab + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2$$

Le polyèdre hyperbolique obtenu après quotient par les homothéties est noté  $\mathcal{P}_{2,ii}$ . Noter qu'il faut encore exclure une facette de codimension 3 du polyèdre : la facette  $F_3^{2,ii} \cap F_5^{2,ii} \cap F_6^{2,ii}$  représente des métriques pour lesquelles les singularités non équatoriales coïncident.

$\mathcal{P}_{2,ii}$  admet trois sommets à l'infini, puisqu'un polygone de type 2(ii) peut dégénérer en segment suivant trois directions :  $a$ ,  $b$  et  $x_2$ . Il est donc aussi de volume fini.

Le dernier type de polygones, 2(iii), est obtenu lorsque les géodésiques de découpe séparent les singularités équatoriales en deux groupes de une et trois singularités. Le polygone obtenu est donné Figure 2.50.

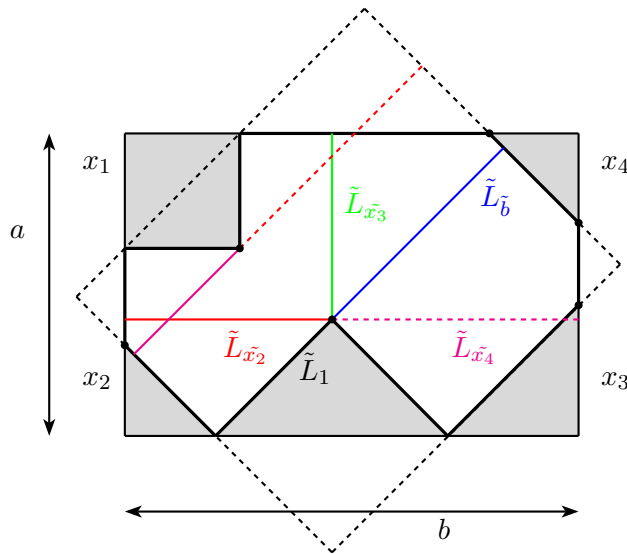


FIGURE 2.50 – Paramétrage d'un polygone de type 2(iii). Il y a deux choix pour le rectangle de paramétrage.

Le paramétrage est choisi pour que  $x_1$  soit la longueur de carré ôté, et que le triangle ôté pour la deuxième singularité non équatoriale soit de base  $b - x_2 - x_3$ . Dans ce cas, il y a deux rectangles de paramétrage admissibles (le deuxième est noté en pointillés sur la Figure 2.50). Une fois le rectangle de paramétrage choisi, il n'y a pas de symétries possibles pour le paramétrage. Pour fixer le rectangle, on choisit la condition  $\sqrt{2}x_1 \leq b - x_2 - x_3$  : la géodésique de découpe de la singularité associée à  $x_1$  est plus courte que celle de l'autre singularité.

Les géodésiques potentielles issues de la deuxième singularité équatoriale sont numérotées comme indiqué Figure 2.50 (la numérotation est semblable à celle utilisée pour les métriques de type 1, voir Figure 2.45, en se plaçant dans le rectangle de paramétrage pointillé). Les longueurs de ces géodésiques sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_2 - x_3) \\ \tilde{\ell}_b &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a + x_3 - x_4) \\ \tilde{\ell}_{\tilde{x}_2} &= \frac{1}{2}(b + x_2 - x_3) \\ \tilde{\ell}_{\tilde{x}_4} &= \frac{1}{2}(b - x_2 + x_3) \\ \tilde{\ell}_{\tilde{x}_3} &= a - \frac{1}{2}(b - x_2 - x_3)\end{aligned}$$

On peut alors en déduire les inégalités assurant que les deux géodésiques de découpe sont les plus courtes. Le polyèdre de  $\mathbb{R}^6$  obtenu, noté  $P_{2,iii}$  est défini par :

$$(2.18) \quad \left. \begin{array}{l} 0 < x_1 \quad (1) \\ 0 < x_4 \quad (2) \\ x_3 + x_4 < a \quad (3) \\ \sqrt{2}x_1 + x_2 + x_3 \leq b \quad (4) \\ \sqrt{2}x_1 + x_2 \leq a \quad (5) \\ \sqrt{2}x_1 + x_4 \leq b \quad (6) \\ b + x_4 \leq a + x_2 + 2x_3 \quad (7) \\ b \leq (3 + 2\sqrt{2})x_2 + x_3 \quad (8) \\ b \leq x_2 + (3 + 2\sqrt{2})x_3 \quad (9) \\ b \leq (2\sqrt{2} - 2)a + x_2 + x_3 \quad (10) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{polygone non dégénéré} \\ \text{symétries du polygone} \\ \text{les géodésiques de découpe sont les plus courtes} \end{array}$$

A nouveau, il faut exclure du polyèdre une facette de codimension 3, correspondant à une coïncidence des deux singularités non équatoriales : la facette  $F_4^{2,iii} \cap F_5^{2,iii} \cap F_8^{2,iii}$  ne fait pas partie de  $P_{2,iii}$ .

La forme quadratique associée, donnée par le double de l'opposé de l'aire, n'est plus entière :

$$\begin{aligned}q_{2,iii}(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) &= -2ab + 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_2 - x_3)\right)^2 \\ &= -2ab + \frac{1}{2}b^2 + 2x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 - bx_2 - bx_3\end{aligned}$$

Elle est toujours de signature  $(5, 1)$ , donc on obtient après quotient par les homothéties un polyèdre hyperbolique, noté  $\mathcal{P}_{2,iii}$ . Un polygone de type 2(iii) peut dégénérer en segment suivant la direction de  $a$ , de  $x_2$ , mais pas de  $b$  :  $\mathcal{P}_{2,iii}$  n'a donc que deux sommets à l'infini, et il est de volume fini.

La liste des angles dièdres dans les trois polyèdres  $\mathcal{P}_{2,i}$ ,  $\mathcal{P}_{2,ii}$  et  $\mathcal{P}_{2,iii}$  est donnée en annexe, section B. Aucun d'eux n'est de Coxeter.

**Changements de paramétrage** Comme dans les cas précédents, chacune des faces de ces polyèdres admet un changement de paramétrage naturel. Certains de ces changements de paramétrage font le lien entre les différents types de polygones. Considérons par exemple la face  $F_{10}^{2,i}$  du polyèdre  $\mathcal{P}_{2,i}$ . Elle correspond aux métriques telles que la géodésique de découpe pour la deuxième singularité, notée  $L$  sur la Figure 2.51, est de même longueur que celle orthogonale au côté correspondant à  $x_4$ , notée  $L'$ . Le changement de paramétrage associé, noté  $\tau_{10}^{2,i}$  décrit donc le paramétrage après découpe suivant  $L'$ , voir Figure 2.51.

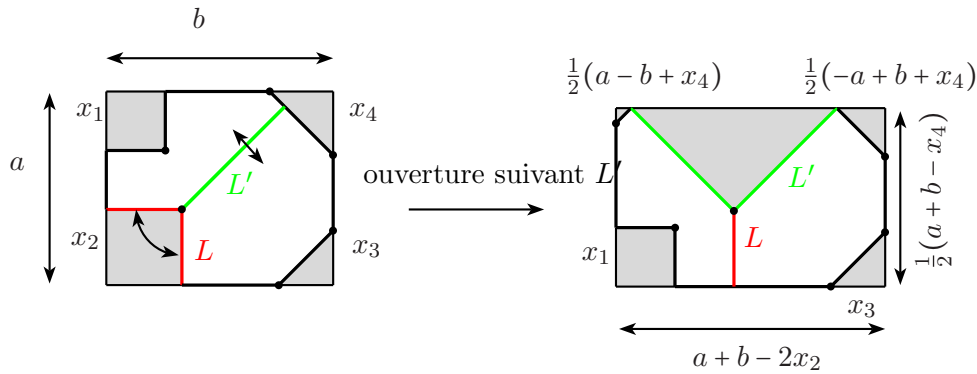


FIGURE 2.51 – Changement de paramétrage  $\tau_{10}^{2,i}$  associé à la face  $F_{10}^{2,i}$  de  $\mathcal{P}_{2,i}$  : ouverture suivant la géodésique  $L'$ .

Le nouveau polygone obtenu est un polygone de type 2(iii). Par définition de  $\mathcal{P}_{2,i}$ , on a  $x_1 \leq \ell \leq \ell'$ , où  $\ell$  et  $\ell'$  sont les longueurs des géodésiques  $L$  et  $L'$ . Alors le rectangle de paramétrage utilisé pour la description du polygone de type 2(iii) est bien déterminé, puisqu'on sait comparer les longueurs  $x_1$  et  $\ell'$ .  $\tau_{10}^{2,i}$  est donc définie par :

$$\tau_{10}^{2,i} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+b-x_4) \\ a+b-2x_2 \\ x_1 \\ \frac{1}{2}(a-b+x_4) \\ \frac{1}{2}(-a+b+x_4) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\tau_{10}^{2,i}$  est une isométrie entre les espaces  $(\mathbb{R}^6, q_{2,i})$  et  $(\mathbb{R}^6, q_{2,iii})$ . L'étude de la géodésique  $L$  dans le deuxième polygone montre que  $\tau_{10}^{2,i}$  est une identification de faces entre  $F_{10}^{2,i}$  et  $F_{10}^{2,iii}$ .

Les autres identifications de faces se calculent de la même façon. Elles sont données en annexe, Table A.6. Comme pour les cas précédents, l'isométrie associée à une face exclue d'un polyèdre est simplement la réflexion par rapport à l'hyperplan portant la face.

La Figure 2.52 récapitule les identifications de faces entre les trois polyèdres : c'est un graphe dont les sommets sont les polyèdres, et dont les arêtes sont les couples  $(\gamma_F, \gamma_F^{-1})$  d'identifications de faces. (Pour plus de lisibilité, les arêtes correspondant à des identifications entre faces d'un même polyèdre ne sont pas différenciées sur la figure.)

L'espace de modules  $\mathcal{M}_2$  est alors en bijection avec le quotient de l'union disjointe des trois polyèdres  $\mathcal{P}_{2,i}$ ,  $\mathcal{P}_{2,ii}$  et  $\mathcal{P}_{2,iii}$  par les identifications de faces : en particulier, il est bien connexe, puisque les identifications de faces relient les trois polyèdres.

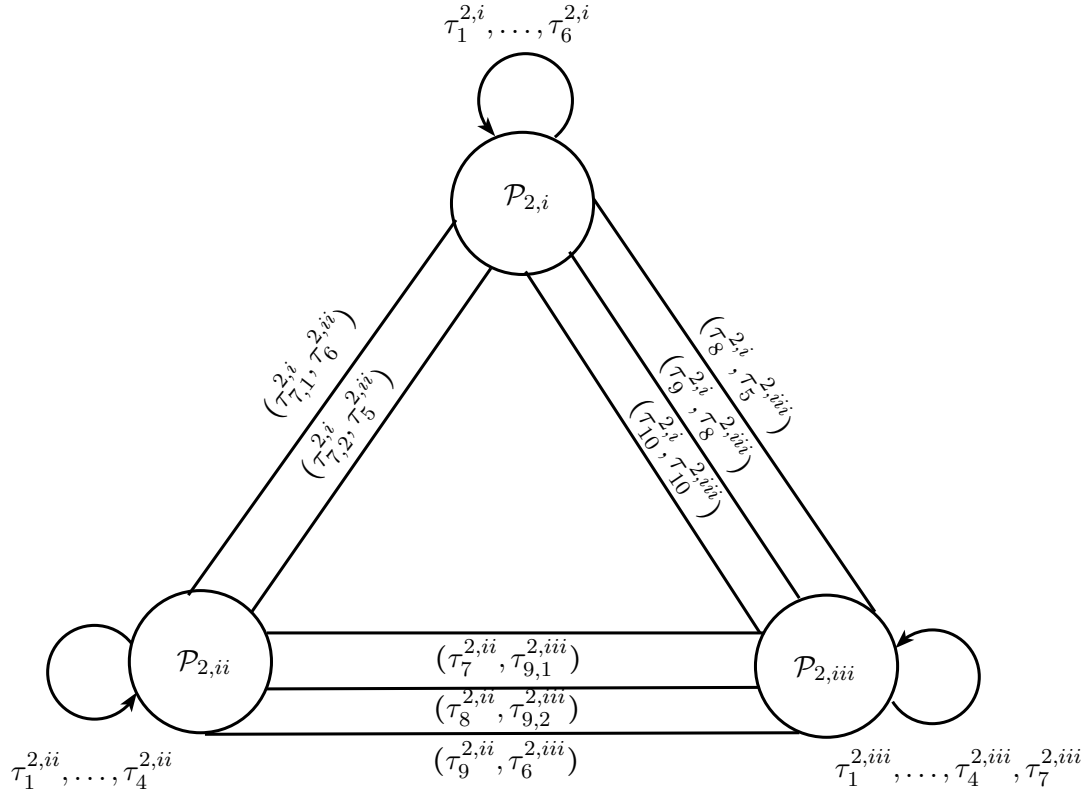


FIGURE 2.52 – Identifications de faces entre les trois polyèdres.

**Application du théorème de Poincaré** On voudrait appliquer le théorème de Poincaré aux polyèdres  $\mathcal{P}_{2,i}$ ,  $\mathcal{P}_{2,ii}$  et  $\mathcal{P}_{2,iii}$  muni des identifications de faces définies au paragraphe précédent. La vérification des hypothèses du théorème n'est quasiment pas modifiée par le nombre de polyèdres, voir section 2.2.2.2. La seule hypothèse supplémentaire est que tous les polyèdres sont reliés par des identifications de faces, i.e. le graphe  $G$  ayant pour sommets les polyèdres, et une arête entre deux sommets pour chaque identification de face entre ces deux polyèdres (les identifications inverses l'une de l'autre étant identifiées), est connexe. C'est bien le cas d'après la Figure 2.52. Le reste des vérifications est inchangé : pour chaque arête (de codimension 2) de chaque polyèdre, on suit le cycle d'arêtes correspondant, qui peut éventuellement contenir des arêtes d'autres polyèdres. De même pour la vérification des sommets à l'infini : pour chaque sommet à l'infini de chaque polyèdre, on étudie son image par les identifications des faces le contenant. Toutes ces conditions sont vérifiées pour les polyèdres  $\mathcal{P}_{2,i}$ ,  $\mathcal{P}_{2,ii}$ ,  $\mathcal{P}_{2,iii}$  et leurs identifications de faces.

La conclusion du théorème de Poincaré est un peu moins directe dans le cas de plusieurs polyèdres. Les polyèdres formant les briques de l'orbifold quotient, ainsi que les identifications de faces, vivent a priori dans des espaces différents. Pour construire un groupe engendré par les identifications de faces, et un domaine fondamental pour ce groupe, il faut ramener ces polyèdres dans le même espace, grâce aux identifications de faces entre eux (cf. section 2.2.2.2).

La première étape est de choisir un arbre  $T$  (graphe connexe sans cycles) maximal dans le graphe  $G$ .  $T$  correspond aux choix de recollement des différents polyèdres : ils seront recollés suivant les identifications de faces correspondant aux arêtes de  $T$ . Le choix

de l'arbre n'a pas d'incidence sur la conclusion du théorème, il peut seulement modifier les générateurs du groupe obtenu, ou donner un groupe conjugué. Dans notre cas, on choisit l'arbre

$$\mathcal{P}_{2,ii} \begin{array}{c} \xleftarrow{\tau_{7,2}^{2,i}} \\ \xrightarrow{\tau_5^{2,ii}} \end{array} \mathcal{P}_{2,i} \begin{array}{c} \xleftarrow{\tau_{10}^{2,i}} \\ \xrightarrow{\tau_{10}^{2,iii}} \end{array} \mathcal{P}_{2,iii}$$

Ceci revient par exemple à considérer le polyèdre  $\mathcal{P}_2$  obtenu comme union de trois copies des polyèdres de base, qui se recollent suivant certaines faces (le théorème de Poincaré assure a posteriori que les polyèdres ne se chevauchent pas) :

$$\mathcal{P}_2 : \tau_5^{2,ii}(\mathcal{P}_{2,ii}) \text{ — } \mathcal{P}_{2,i} \text{ — } \tau_{10}^{2,iii}(\mathcal{P}_{2,iii})$$

Noter qu'on prend comme espace de référence  $(\mathbb{R}^6, q_{2,i})$  : c'est un choix arbitraire, qui vient simplement du fait que la forme quadratique  $q_{2,i}$  est la plus simple.

Le choix d'un arbre  $T$  permet aussi la construction d'un groupe explicite, dont les générateurs sont des identifications de faces pour le gros polyèdre  $\mathcal{P}_2$ . Les identifications de faces de départ sont modifiées de la seule façon possible pour correspondre aux polyèdres recollés :

- celles utilisées pour le recollement (ici  $\tau_5^{2,ii}$  et  $\tau_{10}^{2,iii}$ ), ainsi que leurs inverses, sont remplacées par l'identité,
- les identifications entre deux faces de  $\mathcal{P}_{2,ii}$  (resp.  $\mathcal{P}_{2,iii}$ ) sont conjuguées par  $\tau_5^{2,ii}$  (resp.  $\tau_{10}^{2,iii}$ ), celles entre deux faces de  $\mathcal{P}_{2,i}$  restent inchangées,
- les identifications de faces entre deux polyèdres différents sont composées à gauche et / ou à droite par les isométries de recollement : une identification  $\tau$  entre une face de  $\mathcal{P}_{2,ii}$  et  $\mathcal{P}_{2,iii}$ , par exemple, est remplacée par  $\tau_{10}^{2,iii} \cdot \tau \cdot \tau_5^{2,ii^{-1}}$ .

Les nouvelles isométries obtenues sont toutes des isométries de  $(\mathbb{R}^6, q_{2,i})$  (lorsqu'elles sont vues comme des matrices  $6 \times 6$ ). On note  $\Gamma_2$  le groupe engendré par ces nouvelles isométries. La conclusion du théorème de Poincaré est alors :

**Proposition 2.4.7.** *Le groupe  $\Gamma_2 < \text{Isom}(\mathbb{H}^5)$  est discret, et le polyèdre  $\mathcal{P}_2$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma_2$ . Les relations de cycles d'arêtes (modifiées pour correspondre aux nouvelles identifications) donnent une présentation de  $\Gamma_2$ , voir l'annexe C.*

Noter qu'un changement d'arbre ou de recollement donne un ensemble de générateurs différent, mais le groupe obtenu est toujours conjugué à  $\Gamma_2$ .

$\Gamma_2$  admet des générateurs qui ne sont pas des matrices entières : ses générateurs sont soit entiers, soit de la forme  $1/\sqrt{2}M$ , où  $M$  est une matrice entière. Comme dans la proposition 2.4.4, on vérifie que le sous-groupe  $\Gamma'_2 = \Gamma_2 \cap O(q_{2,i}, \mathbb{Z})$  est d'indice 2 dans  $\Gamma_2$ .  $\Gamma'_2$  est obtenu comme l'ensemble des mots en les générateurs admettant un nombre pair de générateurs non entiers.

D'autre part,  $\mathcal{P}_2$  est de volume fini puisque les polyèdres qui le composent sont de volume fini. Par Poincaré, l'orbifold  $\mathbb{H}^5/\Gamma_2$  est de volume fini. L'indice de  $\Gamma'_2$  dans le groupe discret  $O(q_{2,i}, \mathbb{Z})$  est donc fini, et  $\Gamma_2$  est commensurable à  $O(q_{2,i}, \mathbb{Z})$ . En particulier,  $\Gamma_2$  est arithmétique d'après la définition 1.2.6.

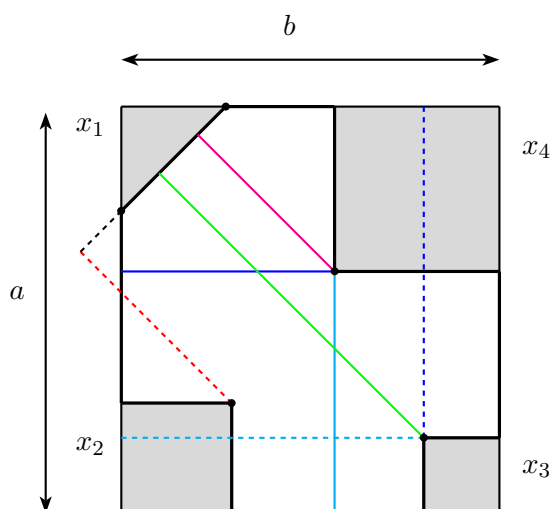
**Proposition 2.4.8.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_2$  des métriques symétriques de type 2 est en bijection avec l'orbifold hyperbolique arithmétique  $\mathbb{H}^5/\Gamma_2$ , privé des facettes correspondant aux métriques dégénérées. Il est commensurable à l'orbifold  $\mathbb{H}^5/O(q_{2,i}, \mathbb{Z})$ .*



## 2.4.1.5 Métriques de type 3

Les polygones obtenus en développant une métrique de type 3 sont de deux types, donnés Figure 2.41. Pour chacune de ces familles, on construit un polyèdre hyperbolique associé. Ces polyèdres sont munis d'identifications de faces naturelles, certaines d'entre elles faisant le lien entre les deux polyèdres. Les vérifications des hypothèses du théorème de Poincaré se font comme pour les métriques de type 2, et le choix d'un recollement permet de construire un groupe d'isométries explicite pour décrire l'espace de modules  $\mathcal{M}_3$  comme un orbifold hyperbolique, privé de certaines hypersurfaces.

**Deux polyèdres hyperboliques** Les polygones de type  $3(i)$  sont obtenus lorsque les trois géodésiques de découpe ne séparent pas les deux singularités équatoriales. De tels polygones peuvent être vus comme un rectangle auquel on ôte trois carrés et un triangle isocèle au niveau des sommets.

FIGURE 2.53 – Paramétrage d'un polygone de type  $3(i)$ .

On choisit les paramètres pour que les trois carrés correspondent aux paramètres  $x_2, x_3, x_4$ , et le triangle au paramètre  $x_1$ , comme indiqué Figure 2.53. Il n'y a qu'un rectangle de paramétrage possible, et la seule symétrie préservant le type de paramétrage est la symétrie diagonale échangeant  $x_2$  et  $x_4$ . On choisit alors la condition  $x_2 \leq x_4$ . Après ajout des conditions de non-dégénérescence des polygones, et de celles assurant que les géodésiques de découpe sont les plus courtes, on obtient le système d'inégalités suivant,

qui définit un polyèdre  $P_{3,i}$  de  $\mathbb{R}^6$  :

$$(2.19) \quad P_{3,i} \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \\ 0 < x_2 & (2) \\ 0 < x_3 & (3) \\ x_2 \leq x_4 & (4) \\ 2x_3 \leq a & (5) \\ 2x_3 \leq b & (6) \\ 2x_4 \leq a & (7) \\ 2x_4 \leq b & (8) \\ \sqrt{2}x_2 + x_1 \leq a & (9) \\ \sqrt{2}x_4 + x_1 \leq b & (10) \\ (\sqrt{2} + 2)x_3 + x_1 \leq a + b & (11) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{polygone non dégénéré} \\ \text{symétrie du polygone} \\ \text{les géodésiques de découpe sont les plus courtes} \end{array} \right.$$

Pour assurer complètement la non-dégénérescence des métriques, il faut exclure de  $P_{3,i}$  l'arête  $F_5^{3,i} \cap F_7^{3,i}$  (de codimension 2) et la facette  $F_4^{3,i} \cap F_6^{3,i} \cap F_8^{3,i}$  (de codimension 3), qui représentent des métriques pour lesquelles deux singularités non équatoriales coïncident. Les points de  $P_{3,i}$  sont négatifs pour la forme quadratique de signature (5, 1)

$$q_{3,i}(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) = -2ab + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2$$

Après passage au quotient par les homothéties, on obtient un polyèdre hyperbolique de  $\mathbb{H}^5$ , noté  $\mathcal{P}_{3,i}$ .

Les polygones de type 3(i) peuvent dégénérer en segment suivant la direction de  $a$  et  $b$ , donc  $\mathcal{P}_{3,i}$  admet deux sommets à l'infini. Il est donc de volume fini.

Le paramétrage de la seconde famille de polygones, les polygones de type 3(ii), est donné Figure 2.54.

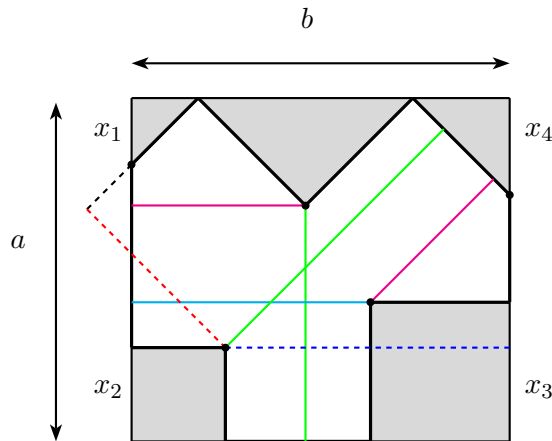


FIGURE 2.54 – Paramétrage d'un polygone de type 3(ii).

Il n'y a qu'un seul rectangle de paramétrage possible, et la seule symétrie admissible est la symétrie d'axe vertical. On choisit la condition  $x_1 \leq x_4$  comme condition pour assurer l'unicité de la représentation d'une classe d'isométries de polygones. Les longueurs des géodésiques issues de la singularité non équatoriale située entre  $x_1$  et  $x_4$  sont aisément calculables à partir de celles calculées pour les métriques de type 2. Le système d'inégalités

obtenu définit un polyèdre  $P_{3,ii}$  de  $\mathbb{R}^6$  :

$$(2.20) \quad \left. \begin{array}{ll} 0 < x_2 & (1) \\ 0 < x_3 & (2) \\ x_1 + x_4 < b & (3) \\ x_1 \leq x_4 & (4) \\ 2x_2 \leq b & (5) \\ 2x_3 \leq b & (6) \\ \sqrt{2}x_2 + x_1 \leq a & (7) \\ \sqrt{2}x_3 + x_4 \leq a & (8) \\ (\sqrt{2} + 2)x_2 + x_4 \leq a + b & (9) \\ b \leq (3 + 2\sqrt{2})x_1 + x_4 & (10) \\ b \leq (2\sqrt{2} - 2)a + x_1 + x_4 & (11) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{polygone bien défini} \\ \text{symétrie du polygone} \\ \text{les géodésiques de découpe sont les plus courtes} \end{array}$$

Les facettes  $F_5^{3,ii} \cap F_6^{3,ii}$ ,  $F_7^{3,ii} \cap F_{10}^{3,ii} \cap F_{11}^{3,ii}$  et  $F_4^{3,ii} \cap F_8^{3,ii} \cap F_{10}^{3,ii} \cap F_{11}^{3,ii}$  représentent des métriques dégénérées, où deux singularités non équatoriales coïncident, donc elles sont exclues de  $P_{3,ii}$ . Les points de  $P_{3,ii}$  sont négatifs pour la forme quadratique de signature  $(5, 1)$

$$\begin{aligned} q_{3,ii}(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) &= -2ab + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(b - x_1 - x_4)\right)^2 \\ &= -2ab + \frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{3}{2}x_4^2 + x_1x_4 - bx_1 - bx_4 \end{aligned}$$

Le polyèdre hyperbolique obtenu après passage au quotient par les homothéties est noté  $\mathcal{P}_{3,ii}$ . Il n'a qu'un sommet à l'infini, car un polygone de type  $3(ii)$  ne peut dégénérer en segment que dans la direction de  $a$ . En particulier, il est de volume fini.

La liste des angles dièdres dans les polyèdres  $\mathcal{P}_{3,i}$  et  $\mathcal{P}_{3,ii}$  est donnée dans l'annexe B. Ils ne sont pas de Coxeter.

**Application du théorème de Poincaré** Les changements de paramétrage associés à chaque face des polyèdres  $\mathcal{P}_{3,i}$  et  $\mathcal{P}_{3,ii}$  se calculent comme aux paragraphes précédents. Ils sont donnés dans la Table A.7, p.207. Ils forment à nouveau un système d'identifications de faces pour les polyèdres. Certaines de ces identifications relient les deux polyèdres. Les conditions sur les cycles d'arêtes et les points à l'infini sont bien vérifiées pour  $\mathcal{P}_{3,i}$  et  $\mathcal{P}_{3,ii}$  munis de ces identifications, donc le théorème de Poincaré s'applique.

Pour obtenir un groupe explicite, et un domaine fondamental associé, il faut choisir un recollement des deux polyèdres via une des identifications de faces, et expliciter les générateurs du groupe correspondant. On choisit de se placer dans l'espace  $(\mathbb{R}^6, q_{3,i})$ , avec le recollement

$$\mathcal{P}_3 : \mathcal{P}_{3,i} \text{ --- } \tau_{11,2}^{3,ii}(\mathcal{P}_{3,ii})$$

où  $\tau_{11,2}^{3,ii}$  est une identification d'une face de  $\mathcal{P}_{3,ii}$  vers une face de  $\mathcal{P}_{3,i}$ . On note  $\mathcal{P}_3$  le polyèdre recollé. Le groupe  $\Gamma_3$  correspondant est le groupe engendré par les identifications de faces obtenues précédemment, modifiées comme suit :

- les identifications entre deux faces de  $\mathcal{P}_{3,i}$  sont inchangées, celles entre deux faces de  $\mathcal{P}_{3,ii}$  sont conjuguées par  $\tau_{11,2}^{3,ii}$ ,
- les identifications de  $\mathcal{P}_{3,i}$  vers  $\mathcal{P}_{3,ii}$  sont multipliées à gauche par  $\tau_{11,2}^{3,ii}$  (et leurs inverses sont multipliées à droite par  $(\tau_{11,2}^{3,ii})^{-1} = \tau_{11,2}^{3,i}$ ).

La conclusion du théorème de Poincaré est alors que  $\Gamma_3$  est discret, et que  $\mathcal{P}_3$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma_3$ . La présentation du groupe  $\Gamma_3$  est donnée dans l'annexe C.

Le groupe  $\Gamma_3$  obtenu ainsi n'est pas à coefficients entiers, mais on vérifie comme dans la proposition 2.4.4 que le sous-groupe  $\Gamma'_3 = \Gamma_3 \cap O(q_{3,i}, \mathbb{Z})$  est d'indice 2 dans  $\Gamma_3$ .  $\mathcal{P}_3$  étant de volume fini, on en déduit que  $\Gamma'_3$  est d'indice fini dans  $O(q_{3,i}, \mathbb{Z})$ , et donc que  $\Gamma_3$  est arithmétique. Finalement :

**Proposition 2.4.9.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_3$  des métriques symétriques de type 3 est en bijection avec l'orbifold hyperbolique arithmétique  $\mathbb{H}^5/\Gamma_3$ , privé des facettes correspondant aux métriques dégénérées. Il est commensurable à l'orbifold  $\mathbb{H}^5/O(q_{3,i}, \mathbb{Z})$ .*

#### 2.4.1.6 Métriques de type 4

Le développement d'une métrique de type 4 donne un polygone de type 4, obtenu en ôtant quatre carrés aux coins d'un rectangle, voir Figure 2.55.

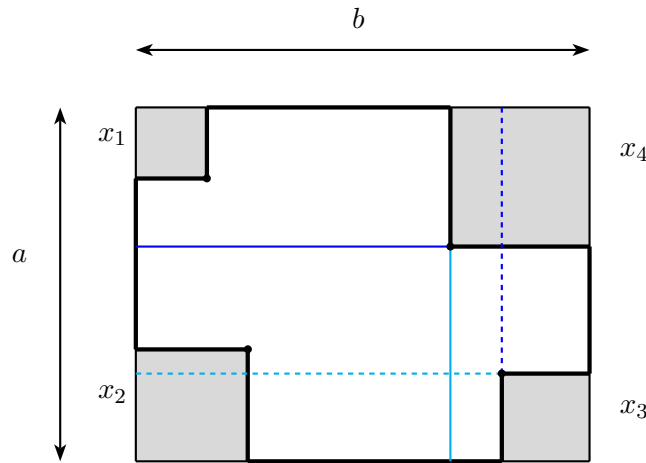


FIGURE 2.55 – Paramétrage d'un polygone de type 4.

Pour assurer la représentation par un unique 6-uplet d'une classe d'isométrie de polygone, on choisit les conditions suivantes :

- le carré de côté  $x_1$  est le plus petit carré ôté, donc  $x_1 \leq x_j$  pour  $j = 2, 3, 4$ ,
- $x_2 \leq x_4$ , pour fixer l'orientation.

A ces conditions s'ajoutent les conditions de non dégénérescence du polygone, et le fait que les géodésiques de découpe sont les plus courtes. Après suppression des inégalités redondantes, on obtient le système suivant, qui définit un polyèdre  $P_4$  de  $\mathbb{R}^6$  :

$$(2.21) \quad P_4 \left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_1 & (1) \\ x_1 \leq x_2 & (2) \\ x_2 \leq x_4 & (3) \\ x_1 \leq x_3 & (4) \\ 2x_3 \leq a & (5) \\ 2x_3 \leq b & (6) \\ 2x_4 \leq a & (7) \\ 2x_4 \leq b & (8) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{polygone non dégénéré} \\ \text{symétrie du polygone} \\ \text{les géodésiques de découpe sont les plus courtes} \end{array} \right.$$

L'arête  $F_5^4 \cap F_7^4$  représente des métriques dégénérées, donc elle est exclue de  $P_4$ . La forme quadratique associée, obtenue en prenant le double de l'opposé de l'aire, est définie par

$$q_4(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) = -2ab + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2$$

Elle est bien de signature  $(5, 1)$ , donc le quotient par les scalaires donne un polyèdre hyperbolique  $\mathcal{P}_4$ . Un polygone de type 4 peut dégénérer en figure d'aire nulle de trois façons différentes : en segment suivant la direction de  $a$  ou de  $b$ , et en croix lorsque les quatre carrés ôtés recouvrent le rectangle.  $\mathcal{P}_4$  a donc trois points à l'infini, donnés en coordonnées homogènes par  $[1, 0, 0, 0, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0, 0, 0, 0]$  et  $[2, 2, 1, 1, 1, 1]$ . En particulier,  $\mathcal{P}_4$  est de volume fini. La liste de ses angles dièdres est donnée en annexe, section B.

Les identifications de faces pour le polyèdre  $\mathcal{P}_4$  se calculent comme précédemment, elles sont données Table A.8, p.212. Le groupe engendré par ces isométries (en ajoutant la réflexion par rapport à la face  $F_1^4$  exclue) est noté  $\Gamma_4$ . Tous les générateurs sont à coefficients entiers, donc  $\Gamma_4$  est un sous-groupe de  $O(q_4, \mathbb{Z})$ .

Les hypothèses du théorème de Poincaré se vérifient aisément :  $\mathcal{P}_4$  est donc un domaine fondamental pour  $\Gamma_4$ , et on connaît une présentation pour le groupe (donnée dans l'annexe C). L'argument habituel de volume permet aussi de conclure que  $\Gamma_4$  est d'indice fini dans  $O(q_4, \mathbb{Z})$ . Finalement :

**Proposition 2.4.10.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_4$  des métriques symétriques de type 4 est en bijection avec l'orbifold hyperbolique arithmétique  $\mathbb{H}^5/\Gamma_4$ , privé des facettes correspondant aux métriques dégénérées. Il est commensurable à l'orbifold  $\mathbb{H}^5/O(q_4, \mathbb{Z})$ .*

Les commensurabilités explicites seront étudiées dans la suite.

*Remarque 2.4.11.* Le choix des inégalités définissant les polyèdres  $P_j$  n'est bien entendu pas unique. Dans ces travaux, j'ai tenté autant que possible de minimiser le nombre d'identifications de faces par polyèdre. Les groupes et les orbifolds obtenus ne dépendent pas du choix des inégalités.

Dans la suite, pour plus de lisibilité, on notera  $q_2$  et  $q_3$  les formes quadratiques  $q_{2,i}$  et  $q_{3,i}$ .

### 2.4.2 Commensurabilités explicites

Les cinq groupes  $\Gamma_j$  construits dans la partie précédente sont commensurables à des groupes d'isométries entières de la forme  $O(q_j, \mathbb{Z})$ , où les  $q_j$  sont des formes quadratiques entières de signature  $(5, 1)$ . On retrouve donc bien la première partie des résultats de Chu sur les octiques réelles (voir théorème 0.0.4). Les formes quadratiques obtenues par Chu sont équivalentes aux nôtres pour les types 0 à 3, mais la forme quadratique associée au type 4 diffère (voir section 6.8 de [Chu11]) : celle de Chu n'est pas diagonale, contrairement aux quatre autres formes quadratiques, et elle n'est pas équivalente à notre forme  $q_4$ . Je n'ai pas d'explication pour ce phénomène. Cependant, l'étude du groupe d'isométries  $O(q_4, \mathbb{Z})$  montre qu'il est commensurable à celui obtenu par Chu. Les résultats de [Chu11] n'étant donnés qu'à commensurabilité près, cette différence sur les formes quadratiques n'a pas d'influence sur le reste des résultats.

Dans cette section, on veut préciser les résultats de [Chu11], en calculant les indices exacts de commensurabilité entre les groupes  $\Gamma_j$  et  $O(q_j, \mathbb{Z})$  : il faut déterminer l'indice

des sous-groupes  $\Gamma'_j := \Gamma_j \cap O(q_j, \mathbb{Z})$  dans  $O(q_j, \mathbb{Z})$ . La première étape est de déterminer un domaine fondamental, des générateurs et une présentation explicites pour les groupes  $O(q_j, \mathbb{Z})$ , ce qui se fait grâce à l'algorithme de Vinberg. On peut ensuite exprimer les générateurs des groupes  $\Gamma'_j$  en fonction des générateurs de  $O(q_j, \mathbb{Z})$ , à l'aide du domaine fondamental obtenu juste avant. Enfin, l'algorithme de Todd-Coxeter pour l'énumération des classes latérales d'un sous-groupe (implémenté par exemple dans le logiciel GAP) permet d'obtenir l'indice voulu.

### 2.4.2.1 Application de l'algorithme de Vinberg

L'algorithme de Vinberg est détaillé section 2.2.3. Etant donné une forme quadratique  $q$  entière de signature  $(n, 1)$ , l'algorithme permet de déterminer (lorsqu'il termine) un domaine fondamental de Coxeter pour le sous-groupe de  $O(q, \mathbb{Z})$  engendré par les réflexions.

**Les formes quadratiques  $q_0$  à  $q_3$**  L'étude des groupes d'isométries pour les formes quadratiques  $q_0$  à  $q_3$  est déjà effectuée dans d'autres travaux. Le cas de  $q_0$  est traité dans l'article initial de Vinberg sur l'algorithme [Vin75] :  $q_0$  est équivalente sur  $\mathbb{Z}$  à la forme quadratique lorentzienne standard  $q(y_0, \dots, y_5) = -y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_5^2$ , via la matrice

$$B = \text{diag} \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1, 1 \right) \right)$$

$B$  et son inverse sont à coefficients entiers, donc les groupes  $O(q_0, \mathbb{Z})$  et  $O(q, \mathbb{Z})$  sont conjugués par  $B$ . Dans [Vin75], Vinberg explicite son algorithme pour plusieurs exemples, entre autres les groupes d'isométries des formes quadratiques lorentziennes standard de signature  $(n, 1)$  pour  $2 \leq n \leq 17$ . Pour  $n = 5$ , le diagramme de Coxeter obtenu est donné Figure 2.56.

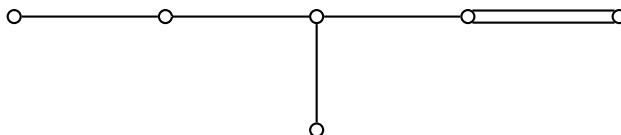


FIGURE 2.56 – Diagramme de Coxeter de  $O(q_0, \mathbb{Z})$  ([Vin75] p.345).

Il n'admet pas de symétrie, donc c'est le diagramme de  $O(q, \mathbb{Z})$ . L'algorithme fournit la liste des polaires du domaine fondamental, et les réflexions associées forment un système générateur pour  $O(q, \mathbb{Z})$ . Le diagramme de Coxeter donne une présentation pour ce système générateur. En conjuguant par la matrice  $B$ , on en déduit immédiatement des générateurs explicites et un domaine fondamental pour  $O(q_0, \mathbb{Z})$ .

Le cas des trois autres formes quadratiques est traité dans la thèse de Chu [Chu06].  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont équivalentes sur  $\mathbb{Z}$ , respectivement, aux formes quadratiques données par les matrices  $\text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1, 2)$ ,  $\text{diag}(-1, 1, 1, 1, 2, 2)$  et  $\text{diag}(-1, 1, 1, 2, 2, 2)$ . L'étude de l'algorithme de Vinberg pour ces formes quadratiques est effectuée en détails dans [Chu06], chapitre 6 : on obtient alors un domaine fondamental et des générateurs pour chacun des groupes de réflexions  $O(q_j, \mathbb{Z})$ . Les diagrammes de Coxeter obtenus sont donnés Figure 2.57. Dans chacun des cas, les diagrammes de Coxeter (munis des normes des polaires pour  $j = 2, 3$ ) n'admettent pas de symétries, donc  $O(q_j, \mathbb{Z}) = \text{Ref}(O(q_j, \mathbb{Z}))$  et les diagrammes de Coxeter donnés correspondent aux groupes  $O(q_j, \mathbb{Z})$ .

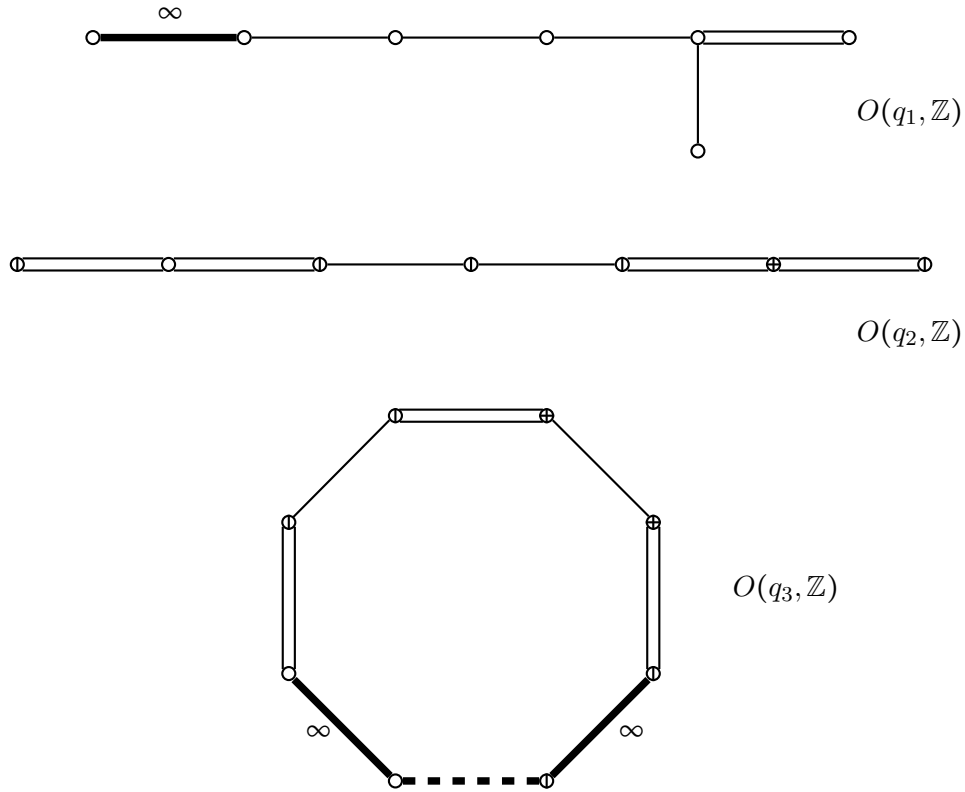


FIGURE 2.57 – Diagrammes de Coxeter des groupes  $O(q_j, \mathbb{Z})$  pour  $j = 1, 2, 3$  ([Chu06] chapitre 6). Les normes des polaires aux hyperplans sont indiquées pour les deux derniers diagrammes : si la norme de la polaire est 1 (resp. 2 ou 4), le sommet est blanc (resp. admet une barre verticale ou une croix).

Noter que pour la forme quadratique  $q_3$ , Chu ne conclut pas l’algorithme, car le critère de terminaison utilisé (qui se lit sur le diagramme de Coxeter) ne peut pas s’appliquer. On peut cependant prouver directement que le volume du polyèdre de Coxeter obtenu à la dernière étape est fini, en montrant qu’il admet seulement un nombre fini de sommets à l’infini. Les polaires du polyèdre sont calculées, on peut donc en déduire les inégalités définissant le polyèdre. Dans le modèle de Klein (i.e. en prenant  $y_0 = 1$ ), elles sont données par

$$0 \leq y_2 \leq y_1, \quad 0 \leq y_5 \leq y_4 \leq y_3, \quad y_1 + 2y_2 \leq 1, \\ y_1 + y_2 \leq 1, \quad y_3 + y_4 + y_5 \leq 1$$

Les points à l’infini sont ceux vérifiant  $1 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 + 2y_4^2 + 2y_5^2$ . Les inégalités impliquent que  $y_2 \leq 1 - y_1$ ,  $y_2 \leq y_1$ , et  $y_j \leq (1 - y_1)/2$  pour  $j = 3, 4, 5$ . Finalement, pour un point à l’infini :

$$1 - y_1^2 = y_2^2 + 2y_3^2 + 2y_4^2 + 2y_5^2 \\ \leq y_1(1 - y_1) + 2 \cdot \frac{1 - y_1}{2} \cdot (y_3 + y_4 + y_5) \\ \leq y_1 - y_1^2 + 1 - y_1 = 1 - y_1^2$$

Toutes les inégalités sont donc des égalités. Ceci représente seulement un nombre fini de solutions, donc le polyèdre admet un nombre fini de sommets à l’infini : il est donc de

volume fini d'après la proposition 2.2.7. L'algorithme de Vinberg est par conséquent terminé : puisque le diagramme de Coxeter n'a pas de symétrie, on en déduit que  $O(q_3, \mathbb{Z})$  est égal à son sous-groupe de réflexions, et que le polyèdre donné est un domaine fondamental pour  $O(q_3, \mathbb{Z})$ .

**La forme quadratique  $q_4$ .** La forme quadratique  $q_4$  est définie par

$$q_4(a, b, x_1, x_2, x_3, x_4) = -2ab + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2$$

Elle n'est pas équivalente sur  $\mathbb{Z}$  à la forme de Chu pour les octiques de type 4, donnée par la matrice

$$Q_{4, \text{Chu}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

car leurs déterminants sont différents. On détaille donc les calculs pour  $q_4$ .  $q_4$  est bien une forme quadratique intégrale de signature  $(5, 1)$  : on peut lui appliquer l'algorithme de Vinberg pour trouver un domaine fondamental, des générateurs et une présentation explicite pour le groupe de réflexions  $\text{Ref}(O(q_4, \mathbb{Z}))$ . Le cône supérieur  $Q_{sup}^-$  (voir section 2.2.1) est choisi comme vérifiant la condition  $a + b > 0$ .

On commence par étudier les polaires primitives possibles pour une réflexion appartenant à  $O(q_4, \mathbb{Z})$ . Pour chaque réflexion entière, il y a exactement deux polaires primitives, opposées l'une de l'autre. Soit  $v = (a, b, x_1, x_2, x_3, x_4)$  une polaire pour  $O(q_4, \mathbb{Z})$ . Elle doit vérifier la condition cristallographique (2.2) :

$$2 \cdot \frac{\langle v, e_j \rangle}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z} \text{ pour tout vecteur } e_j \text{ de la base canonique,}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est la forme bilinéaire associée à  $q_4$ . Ceci se traduit par

$$\frac{2a}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z}, \frac{2b}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z}, \frac{4x_1}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z}, \frac{4x_2}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z}, \frac{4x_3}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z}, \frac{4x_4}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

Les coefficients de  $v$  sont premiers entre eux, et  $\langle v, v \rangle$  est pair par définition de  $q_4$  : on en déduit que  $\langle v, v \rangle$  ne peut être que 2 ou 4. Si  $\langle v, v \rangle = 4$ , alors  $a$  et  $b$  sont pairs. On peut maintenant appliquer l'algorithme de Vinberg.

Etape 1 : choix du centre. Le centre est choisi pour être le plus simple et le plus symétrique possible pour la forme quadratique  $q_4$ . On choisit ici le point  $p_0$  de relevé  $P_0 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$ , qui est bien dans  $Q_{sup}^-$ .

Etape 2 : étude du stabilisateur de  $p_0$ . D'après Vinberg ([Vin75] p. 327), le stabilisateur  $G_{p_0}$  de  $p_0$  dans  $\text{Ref}(O(q_4, \mathbb{Z}))$  est engendré par des réflexions. On commence par trouver toutes les réflexions appartenant à  $G_{p_0}$ , pour en déduire un domaine fondamental de  $G_{p_0}$ .

Soit  $v = (a, b, x_1, x_2, x_3, x_4)$  la polaire d'une réflexion de  $G_{p_0}$  :  $\langle v, P_0 \rangle = 0$  par définition, donc  $b = -a$  et  $\langle v, v \rangle = 2(a^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$ . Les polaires des réflexions de  $G_{p_0}$  sont



donc les  $v = (a, -a, x_1, x_2, x_3, x_4)$  primitifs tels que

$$a^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \text{ ou } \begin{cases} a^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2 \\ \text{avec } a \text{ pair} \end{cases}$$

Le premier cas est vérifié si et seulement si  $a = \pm 1$  ou bien  $x_j = \pm 1$  pour exactement un  $j$ . Le deuxième cas est vérifié si et seulement si exactement deux  $x_j$  et  $x_i$  sont égaux à  $\pm 1$ . On a donc quatre types de réflexions dans  $G_{p_0}$  (pour les trois derniers types, les coefficients non nuls correspondent à  $x_j$  et  $x_i$ ) :

type de polaire	hyperplan correspondant	action de la réflexion sur un point $x = (a, b, x_1, x_2, x_3, x_4)$
$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	$a = b$	échange $a$ et $b$
$(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$	$x_j = 0$	transforme $x_j$ en son opposé
$(0, 0, \dots, 1, \dots, -1, \dots, 0)$	$x_j = x_i$	échange $x_j$ et $x_i$
$(0, 0, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0)$	$x_j = -x_i$	transforme $x_i$ en $-x_j$ et $x_j$ en $-x_i$

L'action des réflexions obtenues incite à considérer le polyèdre hyperbolique  $\mathcal{P}_{p_0}$  défini (après intersection avec  $Q_{sup}^-$  et passage au quotient par les scalaires positifs) par les inégalités essentielles suivantes :

$$a \leq b, \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$$

Les réflexions en les faces du polyèdres sont des éléments de  $G_{p_0}$  par construction. On voit aisément qu'elles engendrent l'ensemble des réflexions obtenues précédemment, donc tout le groupe  $G_{p_0}$ . De plus,  $\mathcal{P}_{p_0}$  est un polyèdre de Coxeter, donc d'après le théorème de Poincaré c'est un domaine fondamental pour le groupe engendré par les réflexions en ses faces.  $P_{p_0}$  est donc un domaine fondamental pour le stabilisateur de  $p_0$  dans  $Ref(O(q_4, \mathbb{Z}))$ .

On obtient donc cinq hyperplans, donnés par les polaires

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 0, 0, 0, 0), & v_2 &= (0, 0, -1, 0, 0, 0), & v_3 &= (0, 0, 1, -1, 0, 0), \\ v_4 &= (0, 0, 0, 1, -1, 0), & v_5 &= (0, 0, 0, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

avec  $P_{p_0} = \bigcap_{j=1}^5 H_j^-$ .

Etape 3 : recherche des demi-espaces suivants. Pour poursuivre la construction d'un domaine fondamental pour  $Ref(O(q_4, \mathbb{Z}))$ , on cherche un demi-espace  $H^-$ , de polaire  $v = (a, b, x_1, x_2, x_3, x_4)$ , qui vérifie les conditions suivantes :

- $H^-$  est opposé à tous les  $H_k^-$  construits précédemment : ceci se traduit par les inégalités  $a \leq b, \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ ,
- $H^-$  est à distance minimale de  $p_0$  parmi les miroirs de réflexions de  $O(q_4, \mathbb{Z})$ .

D'après les remarques pratiques de la section 2.2.3, il suffit de classer les polaires de manière croissante pour la quantité

$$\frac{\langle P_0, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle} = \frac{(a+b)^2}{\langle v, v \rangle}$$

$\langle v, v \rangle$  vaut 2 ou 4, et dans le dernier cas  $a$  et  $b$  doivent être pairs. La quantité cherchée est donc forcément de la forme  $k/2$ , avec  $k \geq 1$ .

Montrons qu'il existe une polaire admissible pour la valeur minimale  $1/2$ , lorsque  $a+b = 1$  et  $\langle v, v \rangle = 2$ . La dernière condition se traduit par  $-ab + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ . Considérons le vecteur

$$v_6 = (0, 1, 0, 0, 0, 1)$$

Il vérifie bien les conditions cherchées, ainsi que les inégalités assurant que le demi-espace  $H_6^-$  est opposé aux  $H_j^-$  pour  $j = 1, \dots, 5$ . De plus,  $H_6^-$  est donné par  $\{x \in Q_{sup}^- \mid \langle x, v_6 \rangle \leq 0\} = \{x \in Q_{sup}^- \mid 2x_4 \leq a\}$ , donc  $p_0 \in H_6^-$ . On obtient donc le polyèdre

$$\mathcal{P} = \bigcap_{j=1}^6 H_j^-, \text{ défini par les inégalités } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2}$$

Montrons que l'algorithme est terminé à cette étape, en vérifiant que le polyèdre hyperbolique  $\mathcal{P}$  est de volume fini. Il est facile de voir que  $\mathcal{P}$  est inclus dans le polyèdre  $\mathcal{P}_4$  construit dans la section précédente, puisque les inégalités définissant  $\mathcal{P}_4$  impliquent celles de  $\mathcal{P}$ .  $\mathcal{P}_4$  étant de volume fini, il en est de même pour  $\mathcal{P}$ .

Résultat de l'algorithme : l'algorithme de Vinberg termine, et le polyèdre  $\mathcal{P}$  obtenu est un domaine fondamental pour  $Ref(O(q_4, \mathbb{Z}))$ .  $\mathcal{P}$  est un simplexe de Coxeter, de diagramme donné Figure 2.58.

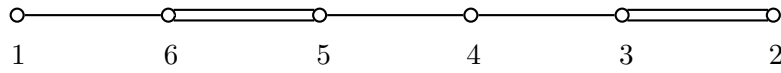


FIGURE 2.58 – Diagramme de Coxeter de  $O(q_4, \mathbb{Z})$ .

Le diagramme n'admet pas de symétries, donc on en déduit que  $O(q_4, \mathbb{Z}) = Ref(O(q_4, \mathbb{Z}))$ .  $\mathcal{P}$  est donc un domaine fondamental pour  $O(q_4, \mathbb{Z})$ , et une partie génératrice pour  $O(q_4, \mathbb{Z})$  est donnée par les réflexions  $r_j$  en les polaires  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$ .

*Remarque 2.4.12.* Les polyèdres fondamentaux pour le groupe  $O(q_4, \mathbb{Z})$  et le groupe  $O(Q_{4,chu}, \mathbb{Z})$  obtenu par Chu pour les octiques de type 4 (de diagramme de Coxeter  $3 - 3 - 3 - 4 - 3$ , voir [Chu06] p.95) sont des simplexes de Coxeter. Les classes de commensurabilité des simplexes hyperboliques de Coxeter sont complètement décrites dans l'article [JKRT02]. On peut donc vérifier que les deux groupes sont bien commensurables.

### 2.4.2.2 Expression des générateurs de $\Gamma'_j$ en fonction des générateurs de $O(q_j, \mathbb{Z})$

L'algorithme de Vinberg permet d'obtenir un système générateur explicite pour  $O(q_j, \mathbb{Z})$ . D'autre part, l'étude des espaces de modules fournit des générateurs explicites pour les groupes  $\Gamma'_j$  : les générateurs de  $\Gamma_j$  sont connus, ce sont les identifications de faces, et si  $\Gamma_j$  n'est pas entier,  $\Gamma'_j$  est engendré par les éléments du type  $\gamma_j$ ,  $\delta_k \delta_{k'}$ , ou  $\delta_k \gamma_j \delta_k^{-1}$  où les  $\gamma_j$  sont des générateurs entiers, et les  $\delta_k$  des générateurs non entiers (voir la preuve de la proposition 2.4.4).

Pour pouvoir étudier le sous-groupe  $\Gamma'_j$  de  $O(q_j, \mathbb{Z})$ , il faut pouvoir exprimer les générateurs de  $\Gamma'_j$  en fonction de ceux de  $O(q_j, \mathbb{Z})$ . Alors les outils classiques de théorie des groupes finiment présentés permettront de déterminer l'indice  $[O(q_j, \mathbb{Z}) : \Gamma'_j]$ .

**Résolution théorique** Ce problème peut être résolu de façon géométrique, à partir du domaine fondamental de  $O(q_j, \mathbb{Z})$ . Plus généralement, soit  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  dont on connaît un polyèdre fondamental explicite  $\mathcal{P}$ , muni d'identifications de faces  $\gamma_j$  qui engendrent  $\Gamma$ . Soit  $g$  un élément de  $\Gamma$ , que l'on veut exprimer en fonction des générateurs  $\gamma_j$ . Considérons un point  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$  intérieur, et un chemin  $c$  entre  $x$  et  $g(x)$  qui n'intersecte que les facettes de codimension inférieure ou égale à 1 des copies de  $\mathcal{P}$  pavant

$\mathbb{H}^n$ . Alors les copies de  $\mathcal{P}$  traversées par  $c$  donnent un mot en les générateurs qui décrit  $g$  (Figure 2.59).

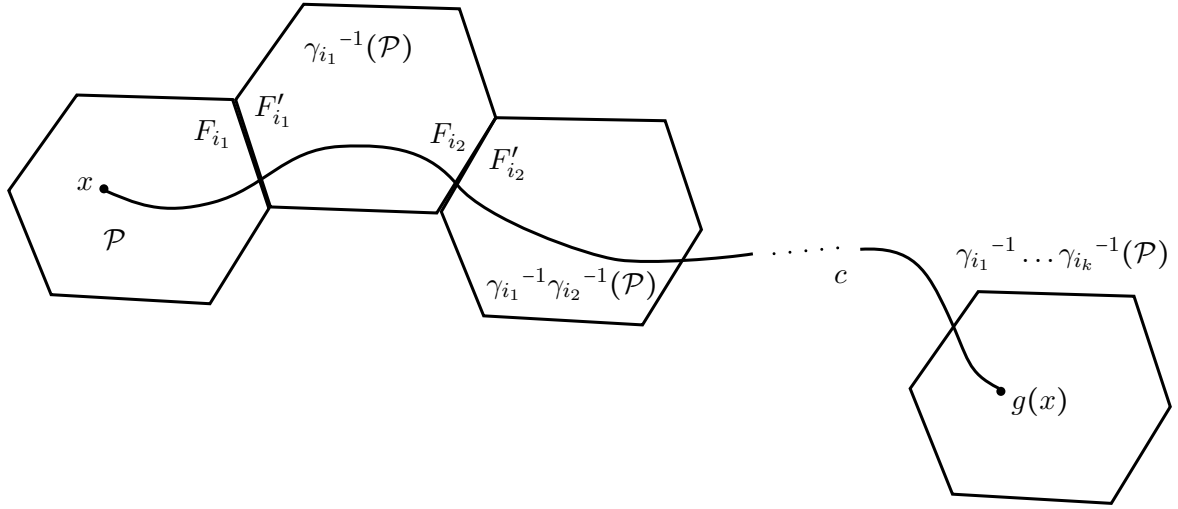


FIGURE 2.59 – Les copies de  $\mathcal{P}$  traversées par le chemin  $c$  reliant  $x$  et  $g(x)$  donnent une expression de  $g$  en fonction des identifications de faces :  $g = \gamma_{i_1}^{-1} \dots \gamma_{i_k}^{-1}$ .

Plus précisément, soit  $c$  un chemin continu entre  $x$  et  $g(x)$  qui n'intersecte pas le  $n - 2$ -squelette du pavage  $\mathbb{H}^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{\mathcal{P}})$ , et qui n'intersecte qu'un nombre fini de fois le  $(n - 1)$ -squelette. Notons qu'un tel chemin existe forcément : il suffit de considérer la géodésique entre  $x$  et  $g(x)$ , et de la modifier légèrement si elle intersecte une facette de codimension supérieure ou égale à 2.

Soit  $F_{i_1}$  la face de  $\mathcal{P}$  par laquelle le chemin  $c$  quitte  $\mathcal{P}$  pour la première fois, et  $\gamma_{i_1}$  le générateur associé ( $\gamma_{i_1}$  est une identification de faces  $F_{i_1} \rightarrow F'_{i_1}$ ).  $\mathcal{P}$  et  $\gamma_{i_1}^{-1}(\mathcal{P})$  sont recollés suivant cette face, donc  $c$  continue dans  $\gamma_{i_1}^{-1}(\mathcal{P})$ , comme décrit Figure 2.59.

Si  $c$  ressort de  $\gamma_{i_1}^{-1}(\mathcal{P})$ , il le fait en traversant la copie d'une face notée  $F_{i_2}$ , associée au générateur  $\gamma_{i_2}$ . De même, par définition des identifications de faces,  $c$  continue alors dans  $\gamma_{i_1}^{-1} \cdot \gamma_{i_2}^{-1}(\mathcal{P})$ .

Le raisonnement se poursuit, jusqu'à arriver au dernier polyèdre  $\gamma_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ \gamma_{i_k}^{-1}(\mathcal{P})$  qui contient  $g(x)$  et dont  $c$  ne sort pas. (Le procédé est bien fini d'après les propriétés vérifiées par  $c$ .) On a alors :

**Proposition 2.4.13.**  $g = (\gamma_{i_k} \circ \dots \circ \gamma_{i_1})^{-1}$ .

*Démonstration.*  $\mathcal{P}$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma$  et  $x$  est un point intérieur de  $\mathcal{P}$ , donc les éléments  $\gamma(x)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , sont tous distincts. De plus, chaque polyèdre  $\gamma(\mathcal{P})$  contient uniquement l'élément  $\gamma(x)$  de l'orbite de  $x$ . La dernière copie de  $\mathcal{P}$  visitée par  $c$ ,  $\gamma_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ \gamma_{i_k}^{-1}(\mathcal{P})$ , contient à la fois  $\gamma_{i_1}^{-1} \circ \dots \circ \gamma_{i_k}^{-1}(x)$  et  $g(x)$  par construction. D'après les propriétés du domaine fondamental, on en déduit que  $g = (\gamma_{i_k} \circ \dots \circ \gamma_{i_1})^{-1}$ .  $\square$

*Remarque 2.4.14.* Ce procédé permet aussi de déterminer si une isométrie  $g$  appartient au groupe  $\Gamma$ . Le même raisonnement permet de déterminer un mot  $(\gamma_{i_k} \circ \dots \circ \gamma_{i_1})^{-1}$  en les identifications de faces  $\gamma_j$  tel que les points  $g(x)$  et  $(\gamma_{i_k} \circ \dots \circ \gamma_{i_1})^{-1}(x)$  appartiennent à la même copie de  $\mathcal{P}$ . Alors  $g$  appartient à  $\Gamma$  si et seulement si l'égalité  $g = (\gamma_{i_k} \circ \dots \circ \gamma_{i_1})^{-1}$  est vérifiée.

Cette méthode peut être implémentée dans une procédure Maple, par exemple, en prenant pour chemin  $c$  la géodésique entre les points  $x$  et  $g(x)$ .

**Exemple d'application :**  $\Gamma_4 < O(q_j, \mathbb{Z})$ . D'après l'étude menée section 2.4.2.1,  $O(q_4, \mathbb{Z})$  admet six générateurs, qui sont les réflexions par rapport aux faces du polyèdre  $\mathcal{P}$  obtenu via l'algorithme de Vinberg. Leurs vecteurs polaires sont donnés par

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 0, 0, 0, 0), & v_2 &= (0, 0, -1, 0, 0, 0), & v_3 &= (0, 0, 1, -1, 0, 0), \\ v_4 &= (0, 0, 0, 1, -1, 0), & v_5 &= (0, 0, 0, 0, 1, -1), & v_6 &= (0, 1, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Ces réflexions sont notées  $r_1, \dots, r_6$ .

Les générateurs de  $\Gamma_4$  sont les identifications de faces du polyèdre  $\mathcal{P}_4$  (voir section 2.4.1.6) puisque le groupe est déjà formé de matrices entières. En supprimant les identifications de faces inverses, on obtient 7 générateurs,  $\tau_1^4, \dots, \tau_6^4$  et  $\tau_8^4$ . (On rappelle que l'exposant 4 indique simplement que l'on étudie des métriques de type 4.) En appliquant la procédure décrite au paragraphe précédent, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \tau_1^4 &= r_2, & \tau_2^4 &= r_3 \cdot r_5, & \tau_3^4 &= r_4 \cdot r_5 \cdot r_1 \cdot r_4, & \tau_4^4 &= r_4 \cdot r_3 \cdot r_1 \cdot r_4, \\ \tau_5^4 &= r_6 \cdot r_5, & \tau_6^4 &= r_6 \cdot r_4 \cdot r_1 \cdot r_5, & \tau_8^4 &= r_1 \cdot r_4 \cdot r_6 \cdot r_1 \end{aligned}$$

L'étude des groupes  $\Gamma'_j$  avec  $0 \leq j \leq 3$  se fait de la même façon : les générateurs de  $\Gamma'_j$  sont obtenus à partir des identifications de faces  $\tau^j$ , et les réflexions qui engendrent  $O(q_j, \mathbb{Z})$  sont données par l'algorithme de Vinberg, étudié dans [Vin75] pour  $j = 0$  et [Chu06] pour  $j = 1, 2, 3$ . L'exemple du groupe  $\Gamma'_4$  est le plus simple, dans les autres cas la liste des générateurs est plus longue, et les mots en les réflexions sont en général plus compliqués (certains mots sont de longueur 30 environ).

### 2.4.2.3 Calcul des indices

L'algorithme de Vinberg donne une présentation des groupes  $O(q_j, \mathbb{Z})$ , dont les générateurs sont les réflexions par rapport aux faces du polyèdre fondamental. Au paragraphe précédent, on a exprimé les générateurs des groupes  $\Gamma'_j$  en fonction de ceux de  $O(q_j, \mathbb{Z})$ . Il reste donc à calculer l'indice, dans un groupe finiment présenté, d'un sous-groupe donné par ses générateurs. Ceci peut être fait à l'aide de la méthode de Todd-Coxeter, décrite succinctement au paragraphe suivant.

**La méthode de Todd-Coxeter pour le calcul de l'indice d'un sous-groupe** La référence utilisée dans cette partie est l'article de Neubüser [Neu81]. Soient  $G = \langle g_1, \dots, g_n \mid r_1, \dots, r_t \rangle$  un groupe finiment présenté, et  $H = \langle h_1, \dots, h_s \rangle$  un sous-groupe de  $G$  donné par ses générateurs, où les  $h_i$  sont des mots en les  $g_j$ . La méthode de Todd-Coxeter permet de calculer l'indice  $[G : H]$  (s'il est fini) en énumérant au fur et à mesure toutes les classes latérales à droite  $Hg$ ,  $g \in G$ , de  $H$ . Une table résumant l'action des  $g_i$  et de leurs inverses sur les classes latérales est construite et remplie tout au long du procédé. Lorsque l'algorithme termine, on obtient donc en plus de l'indice  $[G : H]$  une représentation de l'action de  $G$  sur l'ensemble des classes à droite  $H \backslash G$ .

Les classes  $Hg$  sont numérotées au cours de l'algorithme :  $H$  est la classe 1, et on construit pas à pas des classes 2, 3, etc. La "table de multiplication" de  $G$  sur  $H \backslash G$ , qui admet une ligne par classe construite jusqu'à présent, est remplie au fur et à mesure. A

chaque création de classe, une ligne est ajoutée. Exemple d'une telle table en cours de construction :

1	2									dans cet exemple : $2 = Hg_1, 3 = Hg_1^{-1}$
2										
3	1									

A chaque étape, on utilise les relations  $r_i$  et les générateurs  $h_j$  de  $H$  pour déduire des relations sur les classes déjà existantes. On construit donc en parallèle des “tables de sous-groupes” et “tables de relations” pour trouver ces informations supplémentaires. Elles sont basées sur le principe suivant :

- si  $h_j$  est un générateur de  $H$ , alors  $Hh_j = H$  : pour chaque générateur  $h_j = g_{j_1} \dots g_{j_m}$ , on a donc une table de la forme

$$\begin{array}{c}
 g_{j_1} \quad \dots \quad g_{j_m} \\
 1 \mid \mid \mid \mid \mid 1 \quad \text{où } \begin{array}{c} g_j \\ k \mid l \end{array} \text{ signifie que } kg_j = l
 \end{array}$$

- si  $r_i = g_{i_1} \dots g_{i_l}$  est une relation de  $G$ , alors pour chaque classe latérale  $Hg$ , on a  $Hgg_{i_1} \dots g_{i_l} = Hg$  : chaque relation donne donc une table (avec autant de lignes que de classes latérales construites) de la forme suivante

$$\begin{array}{c}
 g_{i_1} \quad \dots \quad g_{i_l} \\
 1 \mid \mid \mid \mid \mid 1 \\
 2 \mid \mid \mid \mid \mid 2 \\
 \vdots \mid \mid \mid \mid \mid \vdots
 \end{array}$$

Chaque fois qu'une nouvelle classe latérale est définie, une ligne est ouverte dans la table de multiplication et les tables de relations. Les informations contenue dans la table de multiplication permettent de remplir un certain nombre de cases. Au fur et à mesure du remplissage, des informations supplémentaires peuvent être obtenues : des déductions (donnant une nouvelle relation du type  $kg_j = l$ ), ou des coïncidences ( $k = l$ ). Ces informations supplémentaires sont à nouveau reportées dans la table de multiplication, puis dans les autres tables. La construction de la table de multiplication (la seule qui importe à la fin, puisqu'elle contient toutes les informations) est donc complètement algorithmique.

Sous certaines conditions sur l'ordre de définition des classes, si l'indice  $[G : H]$  est fini, alors l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes.

**Résultats** La méthode de Todd-Coxeter est implémentée dans plusieurs logiciels de calcul formel, comme GAP, Sage ou Magma. Pour chaque type  $j$  de métriques, on utilise GAP [GAP08] pour calculer l'indice du groupe  $\Gamma'_j$  dans  $O(q_j, \mathbb{Z})$ . Les résultats obtenus permettent de terminer la description explicite des composantes de l'espace de modules des métriques symétriques à 8 singularités.

On décrit la méthode utilisée pour le cas des métriques de type 4. Les générateurs  $r_1, \dots, r_6$  de  $O(q_4, \mathbb{Z})$  ont été déterminés section 2.4.2.1, et ceux de  $\Gamma_4$  ont été exprimés en fonction des  $r_j$  section 2.4.2.2. La présentation de  $O(q_4, \mathbb{Z})$ , obtenue à partir du diagramme de Coxeter de la Figure 2.58, permet de définir le groupe  $O(q_4, \mathbb{Z})$  dans GAP.  $\Gamma_4$  est défini comme sous-groupe de  $O(q_4, \mathbb{Z})$  à partir du système générateur en les  $r_j$ . La méthode de Todd-Coxeter, implémentée dans la commande “Index” par exemple, donne alors l'indice  $[O(q_4, \mathbb{Z}) : \Gamma'_4]$ . On donne un extrait du fichier GAP correspondant :

```
> t := FreeGroup( 6 );
<free group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]>
```

```

>
> Oq4Z := t / [ t.1^2, t.2^2, t.3^2, t.4^2, t.5^2, t.6^2,
(t.1*t.2)^2, (t.1*t.3)^2, (t.1*t.4)^2, (t.1*t.5)^2, (t.1*t.6)^3,
(t.2*t.3)^4, (t.2*t.4)^2, (t.2*t.5)^2, (t.2*t.6)^2, (t.3*t.4)^3,
(t.3*t.5)^2, (t.3*t.6)^2, (t.4*t.5)^3, (t.4*t.6)^2, (t.5*t.6)^4 ];
<fp group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]>
>
>r1 := Oq4Z.1;; r2 := Oq4Z.2;; r3 := Oq4Z.3;; r4 := Oq4Z.4;;
r5 := Oq4Z.5;; r6 := Oq4Z.6;;
>
>Gamma4 := Subgroup( Oq4Z, [ r2, r3*r5, r4*r5*r1*r4,
r4*r3*r1*r4, r6*r5, r6*r4*r1*r5, r1*r4*r6*r1 ] );
Group([ f2, f3*f5, f4*f5*f1*f4, f4*f3*f1*f4, f6*f5,
f6*f4*f1*f5, f1*f4*f6*f1 ])
>
>Index( Oq4Z, Gamma4 );
6

```

$\Gamma_4$  est donc d'indice 6 dans  $O(q_4, \mathbb{Z})$ . Les autres indices sont calculés de la même façon. Les commensurabilités explicites obtenues sont données Table 2.1.

composante	$[\Gamma_j : \Gamma'_j]$	$[O(q_j, \mathbb{Z}) : \Gamma'_j]$
$\mathcal{M}_0$	2	15
$\mathcal{M}_1$	2	15
$\mathcal{M}_2$	2	12
$\mathcal{M}_3$	2	6
$\mathcal{M}_4$	1	6

TABLE 2.1 – Indices de commensurabilité explicites entre les groupes  $\Gamma_j$  et  $O(q_j, \mathbb{Z})$ .

### 2.4.3 Conclusion

Les calculs effectués dans cette section permettent finalement de décrire les composantes de l'espace de modules  $\mathcal{M}$  des métriques plates symétriques sur  $\mathbb{S}^2$  à 8 singularités d'angles égaux.

**Théorème 2.4.15.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}$  des métriques symétriques non dégénérées à 8 singularités d'angles égaux peut être muni d'une topologie telle que :*

- $\mathcal{M}$  admet 5 composantes connexes  $\mathcal{M}_k$ ,  $0 \leq k \leq 4$ , où  $\mathcal{M}_k$  est l'espace de modules des métriques de type  $k$ ,
- pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq 4$ ,  $\mathcal{M}_k$  admet une structure hyperbolique non complète :  $\mathcal{M}_k$  est homéomorphe à un orbifold hyperbolique arithmétique non compact de volume fini  $\mathbb{H}^5/\Gamma_k$ , privé d'hypersurfaces correspondant aux métriques dégénérées.

Les réseaux  $\Gamma_k$  sont commensurables à des groupes d'isométries entières  $O(q_k, \mathbb{Z})$ , où  $q_k$  est la forme quadratique donnée par la matrice  $6 \times 6$

$$Q_k = \text{diag} \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \underbrace{1, \dots, 1}_{4-k}, \underbrace{2, \dots, 2}_k \right)$$

avec  $k$  "2" sur la diagonale. Les  $O(q_k, \mathbb{Z})$  sont des groupes de Coxeter dont les diagrammes sont donnés Figures 2.57 et 2.58. Les indices de commensurabilité entre les  $\Gamma_k$  et  $O(q_k, \mathbb{Z})$  sont donnés Table 2.1.

## 2.5 Le cas des métriques plates à 8 singularités : recollement

L'espace de modules  $\mathcal{M}$  des métriques symétriques à 8 singularités d'angles égaux est formé de 5 composantes  $\mathcal{M}_k$  non complètes, et dont les complétions métriques sont des orbifolds hyperboliques arithmétiques. Les points ajoutés lors de la complétion représentent des métriques pour lesquelles deux singularités (éventuellement plus) coïncident : ce sont des métriques symétriques à sept singularités, six d'angles  $3\pi/2$  et une d'angle  $\pi$ . Une telle métrique peut provenir de deux types différents, suivant que les deux singularités qui coïncident sont équatoriales (métrique de type  $k$ ) ou conjuguées (métrique de type  $k+1$ ). Il existe donc des identifications naturelles entre les miroirs de réflexion des différentes composantes.

Dans le cas des métriques à 6 singularités, le recollement des composantes arithmétiques donnait à nouveau un orbifold, non arithmétique, voir section 2.3.3. Ce résultat ne se généralise pas au cas de 8 singularités. Le recollement naturel des composantes  $\mathcal{M}_k$  donne un espace obtenu comme quotient d'une union de polyèdres de  $\mathbb{H}^5$  par des identifications de faces, mais le théorème de Poincaré ne peut pas s'appliquer au recollement des composantes : certains cycles d'arêtes, correspondant à des métriques dont trois singularités coïncident, ont un angle de cycle de  $3\pi/4$ .

On montre dans cette partie que le groupe engendré par les identifications de faces n'est pas discret. On construit pour cela un programme qui détermine numériquement un domaine de Dirichlet pour un groupe d'isométries de  $\mathbb{H}^5$  donné par ses générateurs. Lorsque le groupe n'est pas discret, le comportement du programme permet d'obtenir des éléments "candidats" pour être elliptique d'ordre infini, et prouver la non discrétude.

### 2.5.1 Mise en place du recollement

Les miroirs de réflexion des orbifolds  $\mathcal{M}_k$  sont deux à deux isométriques (quitte à parfois couper artificiellement un miroir en deux, comme on l'a fait pour les faces coplanaires des polyèdres  $\mathcal{P}_k$ ), et pour chaque paire de miroirs isométriques on peut déterminer l'isométrie naturelle de recollement. La construction est similaire à celle de la section 2.3.3.

L'étude des métriques permet de déterminer, pour chaque face  $F_j^k$  exclue de  $\mathcal{P}_k$ , sur quelle face  $F_{j'}^{k+1}$  de  $\mathcal{P}_{k+1}$  elle se recolle. L'isométrie de recollement est obtenue comme la composition de trois applications :

- un changement de paramétrage pour que l'image des métriques dégénérées représentées par  $F_j^k$  vérifie les inégalités définissant  $\mathcal{P}_{k+1}$ ,
- une réflexion par rapport à l'hyperplan portant la face d'arrivée, pour que l'image de  $\mathcal{P}_k$  soit à l'extérieur de  $\mathcal{P}_{k+1}$ ,
- une dilatation dans l'axe de la polaire pour que l'application obtenue soit une isométrie entre les deux espaces  $(\mathbb{R}^6, q_k)$  et  $(\mathbb{R}^6, q_{k+1})$ .

Les polyèdres représentant différentes familles de métriques de même type,  $\mathcal{P}_{2,i}$ ,  $\mathcal{P}_{2,ii}$  et  $\mathcal{P}_{2,iii}$ , ou  $\mathcal{P}_{3,i}$  et  $\mathcal{P}_{3,ii}$ , sont vus comme des polyèdres distincts. Lors des calculs, il est en effet plus facile de gérer des polyèdres convexes (donc entièrement décrits par la liste de leurs polaires) que des polyèdres recollés non convexes.

Certains polyèdres  $\mathcal{P}_k$  admettent plusieurs faces exclues, recollées sur différents polyèdres, les notations sont donc plus lourdes que dans le cas des métriques à 6 singularités. Il faut garder trace du polyèdre et de la face de départ, et du polyèdre et de la face d'arrivée. L'isométrie identifiant la face  $F_j^k$  de  $\mathcal{P}_k$  à la face  $F_{j'}^{k'}$  de  $\mathcal{P}_{k'}$  est notée  $r_{k,j|k',j'}$ . Il est clair par construction que  $r_{k',j'|k,j}$  est l'inverse de  $r_{k,j|k',j'}$ .



On fait l'exemple des faces  $F_4^1$  et  $F_5^1$  du polyèdre  $\mathcal{P}_1$ , correspondant aux métriques de type 1 (voir section 2.4.1.3 pour la définition de  $\mathcal{P}_1$ ). Le reste des isométries de recollement est donné en annexe, Table A.9. Les faces  $F_4^1$  et  $F_5^1$  représentent des métriques de type 1 telles que deux singularités équatoriales coïncident. Elles seront donc recollées à une face d'un polyèdre représentant des métriques de type 2 telles que deux singularités conjuguées coïncident. La Figure 2.60 montre les métriques correspondantes, et leur paramétrage en tant que métriques de type 1 ou de type 2.

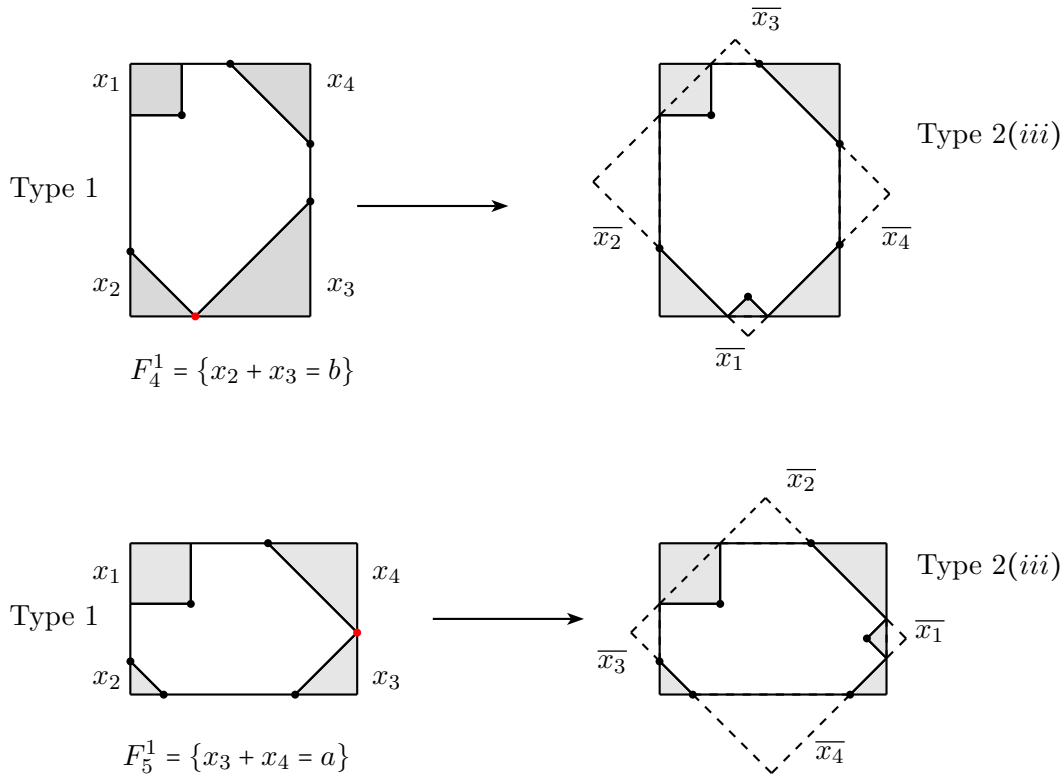


FIGURE 2.60 – Deux singularités équatoriales coïncident dans une métrique de type 1 (faces  $F_4^1$  et  $F_5^1$ ), et se séparent en deux singularités conjuguées. Les métriques obtenues sont de type 2(iii), et les métriques dégénérées correspondent à la face  $F_1^{2,iii} = \{\bar{x}_1 = 0\}$ .

La face  $F_4^1$  est portée par l'hyperplan  $\{x_2 + x_3 = b\}$ . Soit  $(a, b, x_1, \dots, x_4)$  un point de cette face. On note  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$  le paramétrage du polygone correspondant lorsqu'il est vu comme polygone de type 2. D'après la Figure 2.60, c'est un polygone (dégénéré) de type 2(iii). La géodésique la plus courte entre les deux géodésiques de découpe est celle entre les singularités qui coïncident, puisqu'elle est de longueur 0. D'après la construction du polyèdre  $\mathcal{P}_{2,iii}$  (voir section 2.4.1.4), les deux singularités qui coïncident correspondent donc au paramètre  $\bar{x}_1$ , et l'autre singularité non équatoriale est entre les triangles de côté  $\bar{x}_2$  et  $\bar{x}_3$ . Le rectangle de paramétrage est indiqué en pointillés Figure 2.60. Toutes les

longueurs sont connues, et on obtient

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+b-x_1-x_3 \\ a+b-x_2-x_4 \\ 0 \\ a-x_1-x_2 \\ b-x_1-x_4 \\ a-x_3-x_4 \end{pmatrix}$$

Après composition avec la réflexion par rapport à la face d'arrivée  $F_1^{2,iii} = \{\bar{x}_1 = 0\}$ , et avec une dilatation de rapport  $1/\sqrt{2}$  suivant la polaire pour obtenir une isométrie, on trouve finalement

$$r_{1,4|2iii,1} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+b-x_1-x_3 \\ a+b-x_2-x_4 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(b-x_2-x_3) \\ a-x_1-x_2 \\ b-x_1-x_4 \\ a-x_3-x_4 \end{pmatrix}$$

Le paramétrage d'un polygone de type 1 vérifie cependant une relation supplémentaire,  $x_2 \leq x_4$ . Pour la métrique de type 2(*iii*) obtenue, ceci se traduit par l'inégalité  $\bar{a} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \bar{a} - \bar{x}_3 - \bar{x}_4$ , soit  $\bar{x}_3 + \bar{x}_4 \leq \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ . Cette inégalité n'est pas induite par les inégalités définissant  $\mathcal{P}_{2,iii}$  : seule une partie de la face  $F_1^{2,iii}$  est atteinte par l'isométrie de recollement.

L'autre partie de la face est atteinte lors du recollement de  $\mathcal{P}_1$  à  $\mathcal{P}_{2,iii}$  via la face  $F_5^1$ . Effectuons le même raisonnement que précédemment : soit  $(a, b, x_1, \dots, x_4)$  un point de  $F_5^1$ . D'après la Figure 2.60, le polygone correspondant peut être vu comme un polygone de type 2(*iii*), de paramètres  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$ . Les singularités qui coïncident correspondent au paramètres  $\bar{x}_1$ , et l'autre singularité non équatoriale est entre les triangles de paramètre  $\bar{x}_2$  et  $\bar{x}_3$ . Le nouveau paramétrage est donc donné par

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+b-x_2-x_4 \\ a+b-x_1-x_3 \\ 0 \\ b-x_1-x_4 \\ a-x_1-x_2 \\ b-x_2-x_3 \end{pmatrix}$$

L'isométrie de recollement correspondante est alors

$$r_{1,5|2iii,1} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+b-x_2-x_4 \\ a+b-x_1-x_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(a-x_3-x_4) \\ b-x_1-x_4 \\ a-x_1-x_2 \\ b-x_2-x_3 \end{pmatrix}$$

L'inégalité  $x_2 \leq x_4$  vérifiée par les paramètres de départ se traduit alors par  $\bar{a} - \bar{x}_3 - \bar{x}_4 \leq \bar{a} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ , soit  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \leq \bar{x}_3 + \bar{x}_4$ . Le reste de la face  $F_1^{2,iii}$  est donc atteint.

La face  $F_1^{2,iii}$  doit donc être artificiellement séparée en deux faces distinctes et coplanaires :

$$F_{1,1}^{2,iii} = \left\{ \frac{\bar{x}_1 = 0}{\bar{x}_3 + \bar{x}_4 \leq \bar{x}_1 + \bar{x}_2} \right\} \cap \mathcal{P}_{2,iii} \quad \text{et} \quad F_{1,2}^{2,iii} = \left\{ \frac{\bar{x}_1 = 0}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \leq \bar{x}_3 + \bar{x}_4} \right\} \cap \mathcal{P}_{2,iii}$$

$F_4^1$  est alors isométrique à  $F_{1,1}^{2,iii}$ ,  $F_5^1$  est isométrique à  $F_{1,2}^{2,iii}$ , et les isométries de recollement construites précédemment sont notées  $r_{1,4|2iii,1_1}$  et  $r_{1,4|2iii,1_2}$  pour tenir compte de la séparation des demi-faces.

Pour chaque face de recollement, la forme des polygones dégénérés correspondant permet de déterminer à quelle autre face (ou demi-face) elle est isométrique. Les changements de paramétrage (composés avec réflexion et dilatation) donnent alors l'isométrie de recollement. La Figure 2.61 montre le schéma global de recollement des différents polyèdres (seuls les recollements suivant des métriques dégénérées sont indiqués, pas ceux entre les différents polyèdres d'un même type). Les isométries explicites sont données en annexe, Table A.9.

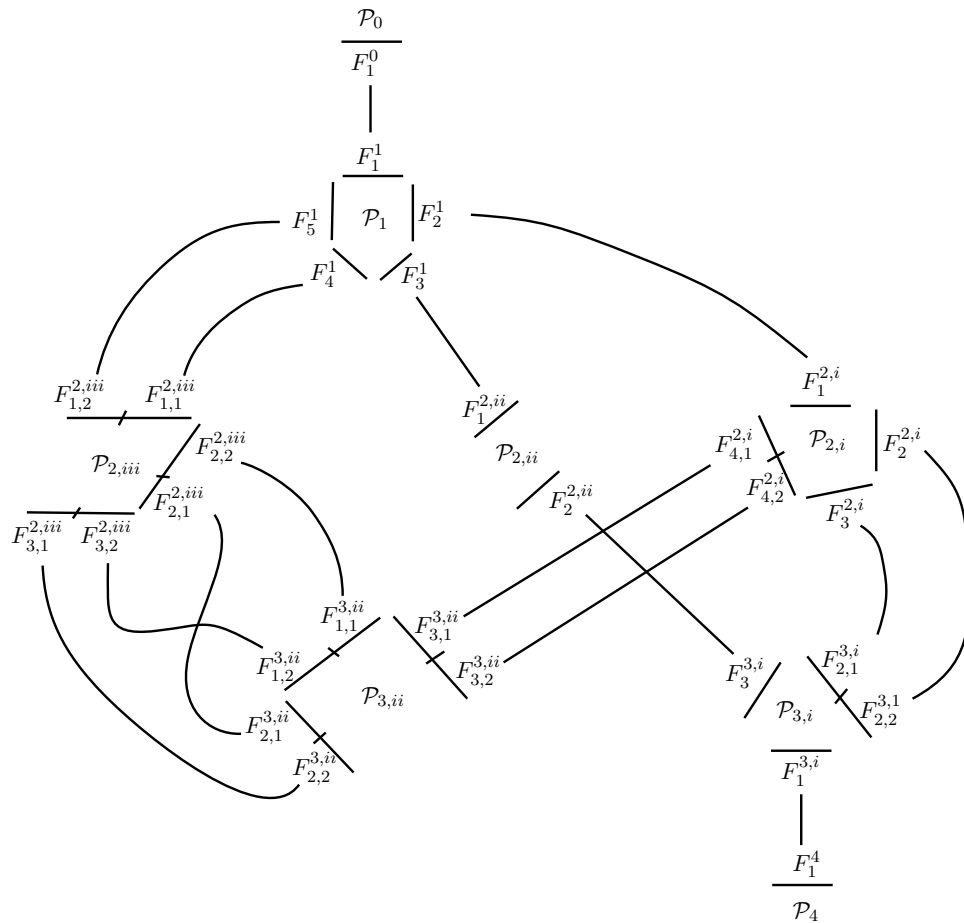


FIGURE 2.61 – Recollement des composantes de l'espace de modules des métriques à 8 singularités. Les faces de recollement sont indiquées.

L'espace de modules des métriques symétriques à 8 singularités d'angles égaux, éventuellement dégénérées, est donc donné par le quotient de l'union disjointe de tous ces polyèdres par les isométries de recollement.

### 2.5.2 Obstruction au théorème de Poincaré

La construction des isométries de recollement au paragraphe précédent permet de munir l'ensemble des polyèdres  $\{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_4\}$  d'identifications de faces, au sens du théorème

de Poincaré. On peut alors chercher si les hypothèses du théorème sont vérifiées pour ces identifications de faces.

Les cycles d'arêtes ont déjà été vus en partie lors de l'étude des composantes de l'espace de modules  $\mathcal{M}$ . Les seuls cycles à calculer ici sont ceux dont les arêtes correspondent à des métriques dégénérées. Le calcul est fastidieux, mais s'effectue de la même façon que précédemment. Ces vérifications montrent que les hypothèses du théorème de Poincaré ne sont pas vérifiées pour ces identifications de faces :

**Proposition 2.5.1.** *Les cycles des arêtes correspondant à des métriques pour lesquelles trois singularités coïncident (dégénérescences triples) forment un angle de  $3\pi/4$ . Tous les autres cycles d'arêtes vérifient la condition que l'angle de cycle est de la forme  $2\pi/m$  pour un entier  $m \geq 1$ .*

Il y a six cycles d'arêtes qui ne vérifient pas la condition du théorème de Poincaré, correspondant aux six façons pour une métrique d'admettre une dégénérescence triple (cf. Figure 2.63). Ces dégénérescences se situent toujours entre deux types  $k$  et  $k + 1$ , avec  $0 \leq k \leq 2$  : la singularité triple peut donner soit trois singularités équatoriales (on obtient alors une métrique de type  $k$ ), soit deux singularités conjuguées et une singularité équatoriale (d'où une métrique de type  $k + 1$ ), comme indiqué Figure 2.62.

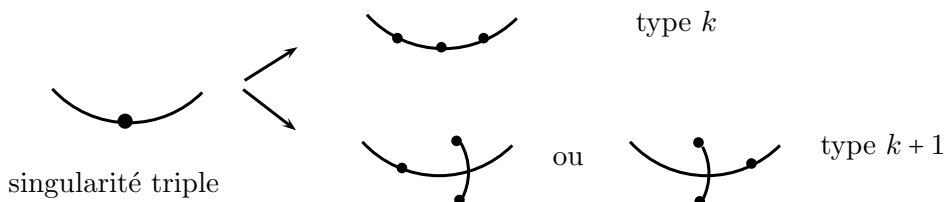


FIGURE 2.62 – Trois façons de sortir d'une dégénérescence triple.

Les six polygones correspondant à ces dégénérescences triples sont décrits Figure 2.63.

Considérons par exemple l'arête  $F_2^1 \cap F_4^1$  du polyèdre  $\mathcal{P}_1$ , porté par le sous-espace défini par  $\{x_2 = 0, x_2 + x_3 = b\}$ . Le cycle d'arête obtenu est le suivant :

$$F_2^1 \cap F_4^1 \xrightarrow{r_{1,4|2iii,1_1}} F_{1,1}^{2,iii} \cap F_5^{2,iii} \xrightarrow{\tau_5^{2,iii}} F_8^{2,i} \cap F_1^{2,i} \xrightarrow{r_{2i,1|1,2}} F_2^1 \cap F_4^1$$

Les angles dièdres pour chacune de ces arêtes sont de  $\pi/4$ , donc l'angle total du cycle est bien  $3\pi/4$ . La transformation de cycle associée est  $r_{2i,1|1,2} \cdot \tau_5^{2,iii} \cdot r_{1,4|2iii,1_1}$  : c'est une rotation d'angle  $3\pi/4$  autour de l'arête  $F_2^1 \cap F_4^1$ . On remarque que les arêtes qui apparaissent dans le cycle représentent exactement les trois façons dont on peut sortir de la dégénérescence triple, décrites Figure 2.64.

Le théorème de Poincaré ne s'applique donc pas à la famille de polyèdres  $\{\mathcal{P}_0 \dots, \mathcal{P}_4\}$  munie des identifications de faces définies dans les sections précédentes. On ne peut pas définir, via ce paramétrage, une structure orbifold sur l'espace de modules total. On montre dans la suite que le groupe engendré par les identifications de faces (au sens de la section 2.2.2.2, puisqu'il y a plusieurs polyèdres) n'est en réalité pas discret.

### 2.5.3 Le groupe associé au recollement

À un polyèdre muni d'identifications de faces, on peut associer naturellement le groupe engendré par ces identifications. Dans le cas de plusieurs polyèdres, quelques modifications

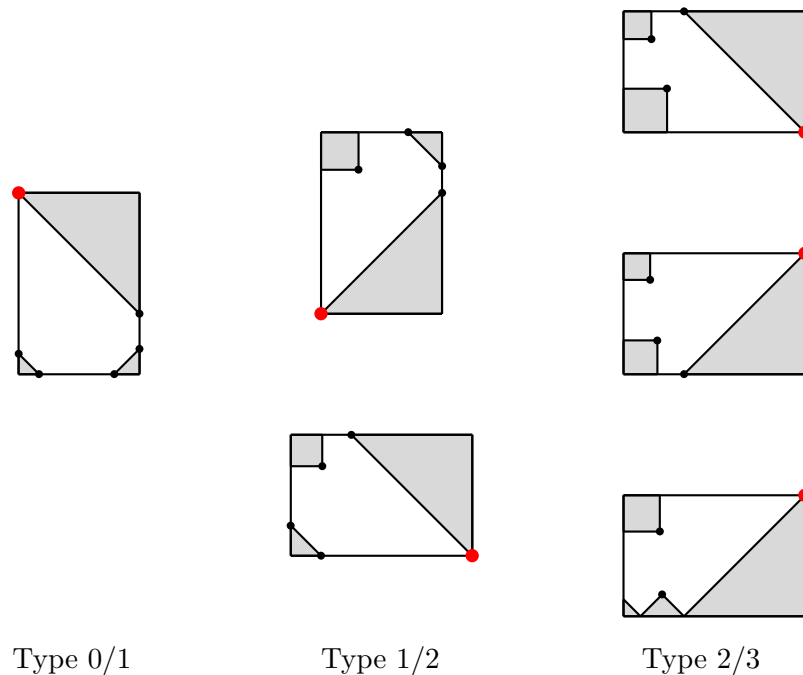


FIGURE 2.63 – Six familles de métriques admettant des dégénérescences triples.

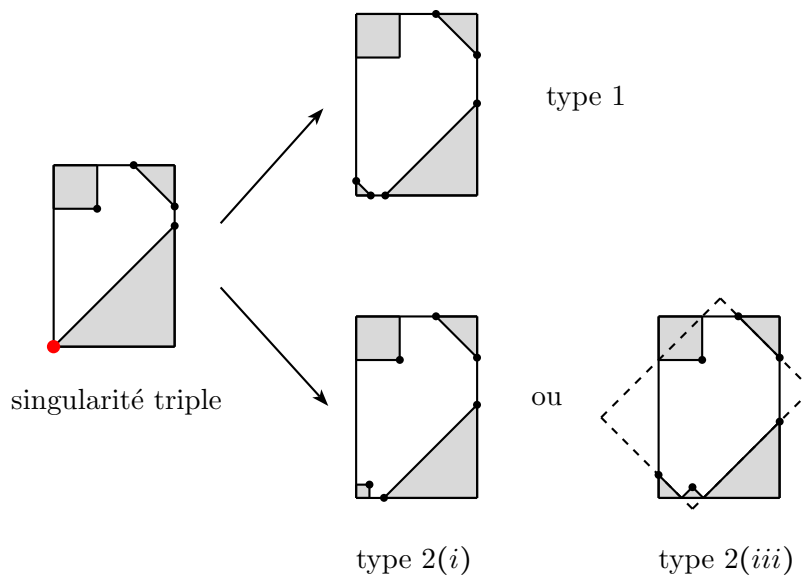


FIGURE 2.64 – La singularité triple est à l’interface entre les types 1 et 2. Il y a trois façons de sortir de la singularité : une vers le type 1, deux vers le type 2.

sur les générateurs sont nécessaires pour que l’opération fasse sens (les isométries vivent a priori dans des espaces différents), voir section 2.2.2.2. Dans le graphe dont les sommets sont les polyèdres, et les arêtes représentent les identifications de faces entre ces polyèdres, on choisit un arbre maximal, et un polyèdre de base. Ceci revient à choisir une façon de recoller ensemble une copie de chaque polyèdre à partir du polyèdre de base, de manière à obtenir un nouveau polyèdre de  $\mathbb{H}^5$  (éventuellement non plongé). Ce polyèdre est muni d’identifications de faces, obtenus à partir des identifications de faces initiales en compo-

sant de façon logique avec les isométries de recollement. Un choix différent d'arbre ou de polyèdre de base donne un groupe conjugué.

Dans notre contexte, la forme quadratique  $q_0$  est la plus simple, donc on choisit de recoller tous les polyèdres à partir de  $\mathcal{P}_0$ , dans l'espace hyperbolique obtenu via  $(\mathbb{R}^6, q_0)$ . L'arbre utilisé pour le recollement est indiqué Figure 2.65.

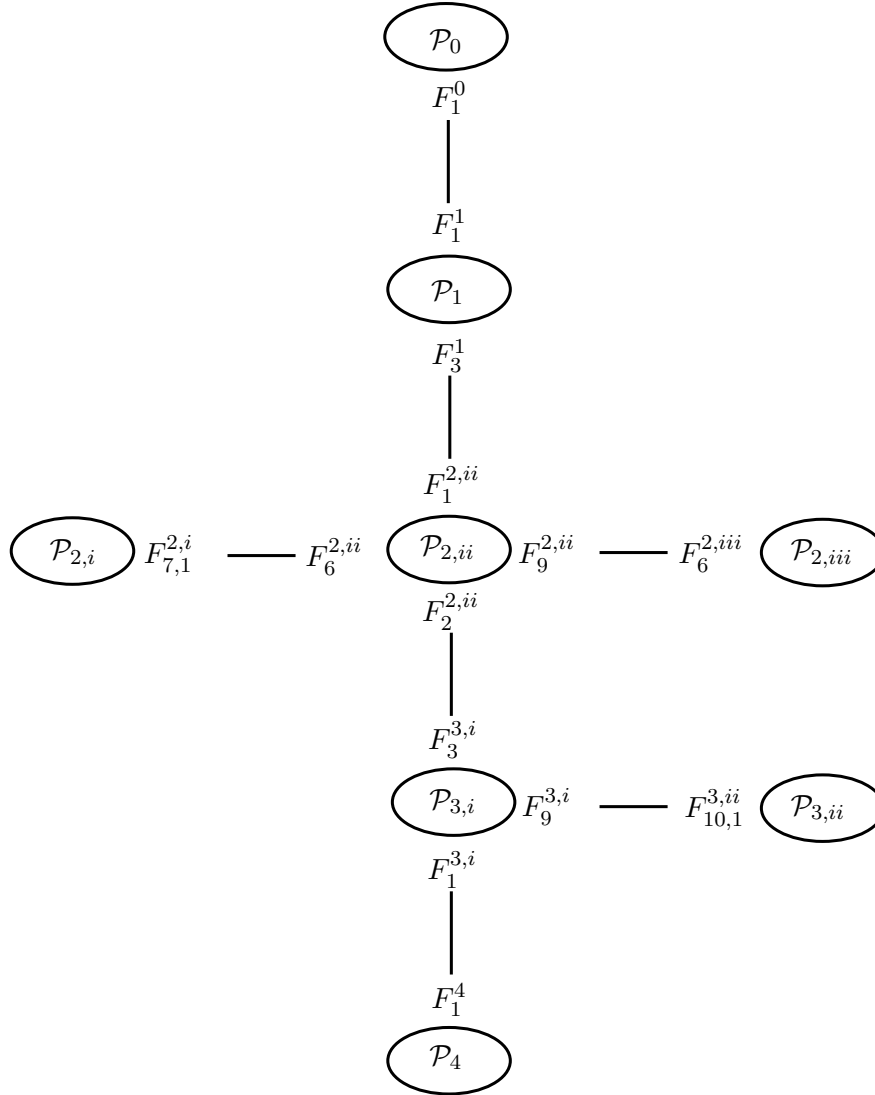


FIGURE 2.65 – Arbre utilisé pour construire le groupe  $\Gamma_t$  engendré par les identifications de faces.

Les nouvelles identifications de faces sont obtenues de la façon suivante :

- les isométries de recollement sont remplacées par l'identité,
- si  $\tau$  est une identification de faces entre deux polyèdres  $\mathcal{P}_k$  et  $\mathcal{P}_{k'}$ , on la compose à gauche par les isométries de recollement entre  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_k$ , et à droite par les isométries de recollement entre  $\mathcal{P}_{k'}$  et  $\mathcal{P}_0$ . L'application obtenue est alors bien une isométrie de  $(\mathbb{R}^6, q_0)$ .

Le recollement se faisant suivant un arbre, le "chemin de recollement" entre deux polyèdres est unique. Prenons par exemple le cas de l'identification de faces  $r_{1,4|2iii,1_1}$  étudiée précédemment.

Elle part du polyèdre  $\mathcal{P}_1$ , donc on la pré-compose par l'application de recollement entre  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$ , qui est  $r_{0,1|1,1}$  d'après la Figure 2.65. La face d'arrivée de  $r_{1,4|2iii,1,1}$  est sur  $\mathcal{P}_{2,iii}$ , donc on la compose à gauche par les isométries de recollement  $r_{1,1|0,1} \cdot r_{2ii,1|1,3} \cdot r_{2iii,6|2ii,9}$ .

Soit donc  $\Gamma_t$  le groupe engendré par les identifications de faces modifiées. Vu sous forme matricielle, c'est un sous-groupe de  $O(q_0, \mathbb{R})$ , à coefficients dans le corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . Le reste de ce chapitre a pour but de montrer que  $\Gamma_t$  n'est pas discret.

Pour ce faire, on écrit un programme qui tente de construire, pour un groupe d'isométries de  $\mathbb{H}^5$  donné par ses générateurs, un domaine fondamental numérique. Lorsque le groupe donné est discret, le programme doit converger vers un domaine fondamental conjecturel. En revanche, si le groupe n'est pas discret, le comportement du programme devrait l'indiquer (via par exemple un polyèdre de plus en plus petit à chaque étape, jusqu'à atteindre l'échelle des erreurs de calcul), et si possible pointer vers des éléments d'ordre infini dans le groupe. Dans la suite, on décrit le programme correspondant, basé sur la "procédure de Riley" [Ril83], voir section 2.5.4.1.

Après application du programme au groupe  $\Gamma_t$  construit précédemment, on a pu trouver des éléments elliptiques d'ordre infini dans le groupe, montrant ainsi que  $\Gamma_t$  n'est pas discret.

#### 2.5.4 Preuve de la non-discrétude de $\Gamma_t$

Etant donné  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  défini par un système générateur, la procédure de Riley [Ril83] construit pas à pas d'un domaine de Dirichlet partiel pour  $\Gamma$ . Si le groupe est discret, elle permet d'obtenir un domaine fondamental approché pour  $\Gamma$ . Cette procédure a été implémentée dans plusieurs contextes. Le programme SnapPy, par exemple, contient une version de la procédure pour l'espace hyperbolique réel de dimension 3 (voir la page [http://www.math.uic.edu/t3m/hg/SnapPeaKernel/code/Dirichlet\\_construction.c](http://www.math.uic.edu/t3m/hg/SnapPeaKernel/code/Dirichlet_construction.c) pour une documentation détaillée). Une version dans le plan hyperbolique complexe a été développée par Deraux [Der05]. Pour les besoins de cette thèse, on écrit un programme en Python basé sur la procédure de Riley dans l'espace hyperbolique réel de dimension 5.

##### 2.5.4.1 Principe de la procédure de Riley

Rappelons d'abord la définition et les notations d'un domaine de Dirichlet (définition 1.2.13). Soit  $\Gamma$  un groupe discret (non trivial) d'isométries de  $\mathbb{H}^n$ ,  $n \geq 2$ , et soit  $p$  un point tel que le stabilisateur de  $p$  dans  $\Gamma$  est trivial. Pour chaque élément  $\gamma \in \Gamma$  non trivial, on définit

$$H_\gamma^-(p) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, p) \leq d(x, \gamma(p))\}$$

C'est un demi-espace contenant  $p$ , et délimité par l'hyperplan médiateur entre  $p$  et son image  $\gamma(p)$  (noté  $H_\gamma(p)$ ). Le *domaine de Dirichlet* pour  $\Gamma$  de centre  $p$  est alors défini par

$$D(p) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}} H_\gamma^-(p)$$

$D(p)$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma$ . Il est muni d'identifications de faces au sens du théorème de Poincaré. Si l'hyperplan  $H_\gamma(p)$  porte une face du polyèdre  $D(p)$ , alors  $H_{\gamma^{-1}}$  porte aussi une face de  $D(p)$ , et  $\gamma^{-1}$  est une identification entre les deux ([Rat06] p.250).

Dans la suite,  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  donné par un système générateur explicite, i.e. une liste de matrices de  $O^+(n, 1)$ . On cherche à déterminer si  $\Gamma$  est discret.

Soit  $p$  un point fixé de  $\mathbb{H}^n$ . La procédure de Riley construit pas à pas le domaine de Dirichlet pour  $\Gamma$  (s'il existe) centré en  $p$ , en partant d'un domaine de Dirichlet partiel (intersection des  $H_\gamma^-(p)$  seulement pour  $\gamma$  dans un système générateur symétrique), puis en rajoutant au fur et à mesure des faces  $H_\gamma(p)$ , pour des  $\gamma$  bien choisis.

Le principe de base du programme repose sur la recherche d'identifications de faces : si le groupe est discret, le domaine final obtenu doit être un domaine fondamental, muni d'identifications de faces. Le polyèdre de Dirichlet partiel construit au départ n'a a priori aucune raison d'être muni d'identifications de faces. Le rôle de chaque étape du programme est alors d'augmenter le nombre de faces munies d'identifications en modifiant leur géométrie (pour les rendre isométriques par paires) via l'ajout de faces supplémentaires.

Pour toute la suite du paragraphe, le point  $p$  est supposé fixé, et on n'écrit plus la dépendance en  $p$  des hyperplans  $H_\gamma$  et des demi-espaces  $H_\gamma^-$ .

**Notations** Soit  $S$  un système générateur de  $\Gamma$ , symétrique (c'est-à-dire tel que  $S^{-1} = S$ ). Le polyèdre de Dirichlet partiel associé à  $S$  et de centre  $p$ , noté  $D_S$ , est défini par :

$$D_S = \bigcap_{\gamma \in S} H_\gamma^-$$

Pour  $\gamma \in S$ , si  $H_\gamma \cap D_S$  est de codimension 1, on note  $F_\gamma$  la face de  $D_S$  portée par l'hyperplan  $H_\gamma$ . Si  $F_\gamma$  et  $F_\delta$  sont des faces de  $D_S$  qui s'intersectent, on note  $a_{\gamma,\delta} = F_\gamma \cap F_\delta$  l'arête correspondante (en général de codimension 2).

Le but est d'essayer de munir le polyèdre  $D_S$  d'identifications de faces. Or pour chaque  $\gamma \in S$ ,

$$\gamma^{-1}(H_\gamma) = H_{\gamma^{-1}} \quad \text{et} \quad \gamma^{-1}(H_\gamma^-) \cap H_{\gamma^{-1}}^- = H_{\gamma^{-1}}$$

$\gamma^{-1}$  est donc un candidat naturel pour être une identification de faces entre  $F_\gamma$  et  $F_{\gamma^{-1}}$ .

Considérons alors deux faces  $F_\gamma$  et  $F_\delta$  de  $D_S$  telles que l'arête  $a_{\gamma,\delta}$  est de codimension 2. Si  $\gamma^{-1}$  est effectivement une identification de faces pour  $D_S$ , alors l'image de  $a_{\gamma,\delta}$  par  $\gamma^{-1}$  est encore une arête de  $D_S$ . Ceci donne un test simple pour savoir si  $\gamma^{-1}$  peut être une identification de faces pour  $D_S$ . C'est ce test qui sera utilisé dans le programme : on ne vérifiera pas que les faces de codimension 1 sont isométriques, mais seulement que les arêtes de codimension 2 sont envoyées sur des arêtes. C'est une condition nécessaire pour obtenir un système d'identifications de faces (elle n'est en revanche pas suffisante). Suivant les résultats du programme, on peut ensuite affiner les vérifications.

**Définition 2.5.2.** Une arête de codimension 2  $a_{\gamma,\delta}$  de  $D_S$  admet des identifications si  $\gamma^{-1}(a_{\gamma,\delta})$  et  $\delta^{-1}(a_{\gamma,\delta})$  sont des arêtes de  $D_S$ .

**Méthode** Soit  $a_{\gamma,\delta}$  une arête qui n'admet pas d'identifications. Supposons par exemple que l'image de  $a_{\gamma,\delta}$  par  $\gamma^{-1}$  n'est pas une arête de  $D_S$ . Pour y remédier, il faudrait ajouter une face au polyèdre  $D_S$  qui intersecte la face  $H_{\gamma^{-1}}$  selon le sous-espace qui porte l'image de  $a_{\gamma,\delta}$ , comme indiqué Figure 2.66. Une nouvelle arête serait ainsi créée, portée par le même sous-espace que  $\gamma^{-1}(a_{\gamma,\delta})$  et donc potentiellement égale à  $\gamma^{-1}(a_{\gamma,\delta})$ .

$H_{\gamma^{-1}\delta}$  est un candidat naturel pour cette nouvelle face, puisqu'elle vérifie  $\gamma^{-1}(H_\gamma \cap H_\delta) =$



$H_{\gamma^{-1}} \cap H_{\gamma^{-1}\delta}$ . En effet,

$$\begin{aligned} x \in H_{\gamma} \cap H_{\delta} &\Leftrightarrow d(x, p) = d(x, \gamma(p)) = d(x, \gamma(p)) = d(x, \delta(p)) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{d(\gamma^{-1}(x), \gamma^{-1}(p)) = d(\gamma^{-1}(x), p)}_{\gamma^{-1}(x) \in H_{\gamma^{-1}}} = \underbrace{d(\gamma^{-1}(x), p) = d(\gamma^{-1}(x), \gamma^{-1}\delta(p))}_{\gamma^{-1}(x) \in H_{\gamma^{-1}\delta}} \end{aligned}$$

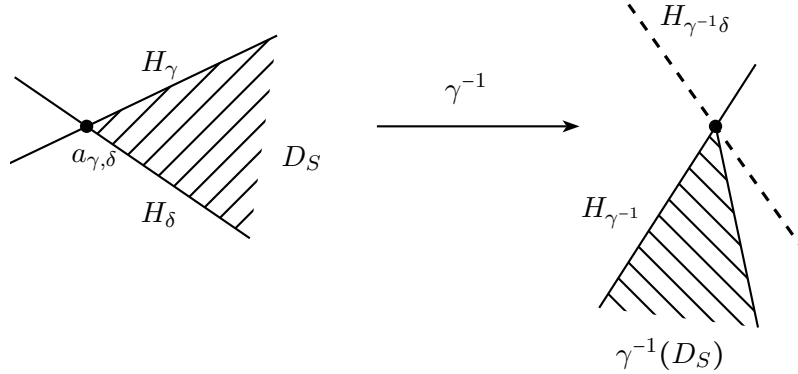


FIGURE 2.66 – Si  $\gamma^{-1}(a_{\gamma,\delta})$  n'est pas déjà une arête de  $D_S$ , ajouter l'hyperplan  $H_{\gamma^{-1}\delta}$  permet de créer une nouvelle arête, portée par le même sous-espace que  $\gamma^{-1}(a_{\gamma,\delta})$  (condition nécessaire pour qu'elles soient égales).

Ainsi, si une arête  $a_{\gamma,\delta}$  n'admet pas d'identifications, il est naturel de rajouter les faces correspondants à  $\gamma^{-1}\delta$  et  $\delta^{-1}\gamma$ , dans l'espoir de créer des identifications. (On ajoute bien les deux isométries, qui sont inverses l'une de l'autre, pour garder la propriété de symétrie du système générateur  $S$ .)

#### 2.5.4.2 Implémentation de la procédure

On implémente la procédure de Riley dans un programme écrit dans le langage Python, pour des isométries de l'espace hyperbolique réel  $\text{Isom}(\mathbb{H}^5)$ . La forme quadratique sur  $\mathbb{R}^6$  considérée est la forme lorentzienne standard.

Le programme est basé sur la recherche d'identifications de faces : à chaque étape, on détermine toutes les arêtes  $a_{\gamma,\delta}$  de codimension 2 qui n'admettent pas d'identifications, on ajoute au système générateur  $S$  les isométries  $\gamma^{-1}\delta$  et  $\delta^{-1}\gamma$  correspondantes, et on recommence le processus.

Ceci nécessite de connaître la combinatoire du polyèdre de Dirichlet partiel  $D_S$  construit à chaque étape. On utilise pour cela les sommets du polyèdre : une fois que les sommets finis et infinis du polyèdre sont connus, toute facette (de toute codimension) est décrite par les sommets qu'elle contient. En particulier, on peut déterminer les faces qui bordent effectivement le polyèdre, les arêtes de codimension 2 et leurs images par les éléments de  $S$ , etc.

**Organisation du programme** Le programme nécessite la donnée d'une liste  $S_0$  de matrices de  $O^+(5,1)$ , invariante par l'inverse ( $S_0^{-1} = S_0$ ), d'un centre  $p \in \mathbb{H}^n$ , et d'une erreur  $\varepsilon$  (tous les calculs sont effectués numériquement). On suppose de plus que le domaine de Dirichlet partiel  $D_{S_0}$  centré en  $p$  est de volume fini (condition nécessaire pour le programme tourne correctement).

La méthode récursive décrite au paragraphe précédent est alors mise en oeuvre. Chaque itération du programme se décompose en quatre grandes étapes :

- donnée à l'itération  $j$  : liste de matrices  $S_j$  (le centre et l'erreur restent les mêmes à chaque itération)
- étape 1 : recherche des sommets du polyèdre  $D_{S_j}$ ,
- étape 2 : description des facettes  $H_\gamma \cap D_{S_j}$ ,  $\gamma \in S_j$ , par les sommets qu'elles portent, et suppression des  $\gamma$  telles que la facette  $H_\gamma \cap D_{S_j}$  n'est pas de codimension 1,
- étape 3 : énumération et description des arêtes de codimension 2 en termes des sommets de  $D_{S_j}$ ,
- étape 4 : pour chaque arête  $a_{\gamma,\delta}$  de codimension 2, vérification de l'existence d'identifications de faces. Si  $a_{\gamma,\delta}$  n'admet pas d'identifications de faces, ajout des isométries  $\gamma^{-1}\delta$  et  $\delta^{-1}\gamma$  à la liste de matrices. Une fois toutes les arêtes passées en revue, on obtient une nouvelle liste de matrices  $S_{j+1}$ .
- retour à l'étape 1 avec la liste  $S_{j+1}$ .

Si le groupe  $\Gamma$  est discret, et si le centre  $p$  est choisi judicieusement vis-à-vis des générateurs, le programme devrait se rapprocher d'un domaine fondamental pour  $\Gamma$  en un nombre raisonnable d'itérations. Le nombre d'arêtes avec des identifications de faces devrait être relativement important, et le volume du polyèdre être plutôt stable.

Si le groupe  $\Gamma$  n'est pas discret, on s'attend plutôt à voir le volume du polyèdre diminuer rapidement à chaque étape, et le nombre d'arêtes avec des identifications de faces devrait rester très faible. La procédure devrait s'arrêter du fait des erreurs numériques, lorsque la "taille" du polyèdre (par exemple le diamètre des faces) s'approche de l'erreur numérique autorisée.

**Application du programme au groupe  $\Gamma_t$**  Le groupe à étudier est le groupe  $\Gamma_t$  défini section 2.5.3 : il est engendré par les isométries de recollement entre les polyèdres de types différents (voir section 2.5.1) et les identifications de faces entre polyèdres de même type, modifiées en accord avec l'arbre donné Figure 2.65. Ceci donne un système générateur symétrique de 42 isométries.

$\Gamma_t$  vérifie les hypothèses du théorème de Poincaré excepté pour six cycles d'arêtes. Si  $\Gamma_t$  n'est pas discret, l'obstruction à la discrétude doit provenir de ces cycles d'arêtes problématiques. Les transformations de cycles associées sont des rotations d'angles  $3\pi/4$  : lorsqu'on applique les puissances d'une telle rotation au polyèdre recollé, les premiers chevauchements ont lieu avec la puissance troisième, qui est une rotation d'angle  $2\pi + \pi/4$ . Il paraît donc naturel d'ajouter à la liste initiale de générateurs les transformations de cycles problématiques, leurs puissances troisièmes, et les inverses de ces éléments. Ceci devrait permettre de réduire rapidement la taille du polyèdre de Dirichlet partiel au cours de l'algorithme.

On obtient finalement un système générateur pour  $\Gamma_t$  de 64 isométries, à coefficients dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .

On applique alors le programme à cette liste d'isométries. Six itérations (comme décrites au paragraphe précédent) peuvent être effectuées avant que des aberrations numériques n'apparaissent. On fait les observations suivantes sur les polyèdres de Dirichlet partiels construits au cours de ces itérations :

- le volume approché des polyèdres décroît très rapidement, environ d'une puissance de 10 à chaque étape. Après la sixième itération, le diamètre des faces du polyèdre

devient comparable à l'erreur numérique, on arrête donc le programme.

- malgré l'ajouts des faces ad hoc à chaque itération, le nombre d'arêtes du polyèdre admettant des identifications reste extrêmement faible : dans les dernières itérations, sur plusieurs milliers d'arêtes, au plus trois admettent des identifications .

Ces observations semblent indiquer que  $\Gamma_t$  n'est pas discret. C'est ce que l'on s'attache à prouver dans la suite.

### 2.5.4.3 Existence d'un elliptique d'ordre infini

Pour montrer que  $\Gamma_t$  n'est pas discret, on exhibe un élément elliptique d'ordre infini appartenant à  $\Gamma_t$ . Le comportement des domaines de Dirichlet partiels construits par le programme peut indiquer quel élément de  $\Gamma$  considérer. A chaque itération, on détermine l'élément  $\gamma \in S_j$  qui réalise le minimum des distances  $d(p, \gamma(p))$ , où  $p$  est le centre du domaine :  $H_\gamma$  porte donc la face la plus proche du centre. Il est plausible qu'à partir d'un certain nombre d'itérations, lorsque cette distance diminue,  $\gamma$  soit un élément d'ordre infini.

Après la sixième itération, l'élément  $\gamma$  obtenu est un mot de longueur 42 en les générateurs initiaux. Il est intéressant de remarquer que tous les générateurs qui apparaissent dans le mot, à l'exception de quatre d'entre eux, sont des puissances troisièmes des transformations de cycles d'angle  $3\pi/4$ .

Après simplification du produit (par le logiciel de calcul formel Maple, ou la bibliothèque Python Sympy, par exemple), on obtient la matrice suivante :

$$\gamma = \begin{bmatrix} -29670353524 & -12870170002 & -13137370362 & 1869073322 & 18360884559 & 14194456154 \\ 2729349623 & 1183915575 & 1208495099 & -171934405 & -1689001559 & -1305735489 \\ -3645285675 & -1581223031 & -1614051143 & 229633469 & 2255809637 & 1743924205 \\ 10024469104 & 4348334490 & 4438611195 & -631487850 & -6203435352 & -4795759749 \\ 13844170015 & 6005213975 & 6129889511 & -872108545 & -8567178252 & -6623125137 \\ -23821028464 & -10332896293 & -10547419770 & 1500597179 & 14741150736 & 11396107694 \end{bmatrix}$$

$$+\sqrt{2} \begin{bmatrix} 20980108180 & \frac{18201168969}{2} & \frac{18579047345}{2} & -\frac{2643268841}{2} & -12983105980 & -\frac{20073992405}{2} \\ -1929941628 & -\frac{1674309463}{2} & -854535081 & \frac{243151967}{2} & 1194304456 & 923294419 \\ 2577606218 & 1118093527 & \frac{2282613013}{2} & -162375383 & -1595098292 & -\frac{2466281261}{2} \\ -7088370081 & -\frac{6149473609}{2} & -3138572075 & \frac{893058683}{2} & 4386491204 & 3391114239 \\ -9789306498 & -\frac{8492655049}{2} & -\frac{8668972883}{2} & \frac{1233347733}{2} & 6057909838 & \frac{9366513395}{2} \\ 16844010763 & 7306461039 & \frac{14916304089}{2} & -1061082441 & -10423567648 & -\frac{16116530059}{2} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de  $\gamma$  sont calculables de manière exacte (toujours par Maple, puis Sympy pour vérifier les résultats obtenus).  $\gamma$  admet deux valeurs propres réelles, et deux paires de valeurs propres complexes conjuguées de module 1, données par la liste suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a + 1/4c + 1/4i\sqrt{b + (55806095000 - 39460868210\sqrt{2})c} \\ a + 1/4c - 1/4i\sqrt{b + (55806095000 - 39460868210\sqrt{2})c} \\ a - 1/4c + 1/4i\sqrt{b - (55806095000 - 39460868210\sqrt{2})c} \\ a - 1/4c - 1/4i\sqrt{b - (55806095000 - 39460868210\sqrt{2})c} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} a &= -6975761875 + \frac{19730434105}{4}\sqrt{2} \\ b &= -3114320239448811896152 + 2202156960100767325028\sqrt{2} \\ c &= \sqrt{1557160119718061344118 - 1101078480045897350028\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Les vecteurs propres sont aussi calculables. En particulier, on vérifie que le vecteur propre associé à la valeur propre 1 est de norme strictement négative. L'isométrie hyperbolique correspondante admet donc un point fixe dans  $\mathbb{H}^5$  : c'est un élément elliptique. Il existe deux sous-espaces de dimension 2 sur lesquels cet élément agit comme une rotation d'angle  $\theta_1$  (respectivement  $\theta_2$ ). Les deux paires de valeurs propres conjuguées correspondent à  $e^{\pm i\theta_1}$  et  $e^{\pm i\theta_2}$ .

$\gamma$  est donc d'ordre infini si et seulement si au moins un des angles  $\theta_i$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ . Un angle  $\theta$  est un multiple rationnel de  $\pi$  si et seulement si  $e^{i\theta}$  est algébrique et a pour polynôme minimal un cyclotomique, puisque c'est une racine de l'unité. Il suffit donc de montrer que le polynôme minimal d'une des valeurs propres n'est pas un polynôme cyclotomique.

Toujours avec l'aide de Maple (ou Sympy), le polynôme minimal des valeurs propres non entières est calculable. C'est le même pour les quatre valeurs propres, il est donné par :

$$\begin{aligned} X^8 + 55806095000X^7 - 149893448080X^6 + 240481199940X^5 - 289460913971X^4 \\ + 240481199940X^3 - 149893448080X^2 + 55806095000X + 1 \end{aligned}$$

Un calcul approché de ses racines donne trois paires de racines complexes conjuguées sur le cercle unité, et deux racines réelles, de valeur environ  $-5,58061 \cdot 10^{10}$  et  $-1,79192 \cdot 10^{-11}$ . En particulier, ses racines ne sont pas toutes sur le cercle unité, donc ce n'est pas un polynôme cyclotomique. Donc  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des multiples irrationnels de  $\pi$ , et  $\gamma$  est donc d'ordre infini. D'où le résultat :

**Théorème 2.5.3.** *L'espace de modules des métriques plates symétriques à 8 singularités d'angles égaux, éventuellement dégénérées, est le quotient d'une union de polyèdres de  $\mathbb{H}^5$  par des identifications de faces. Le groupe  $\Gamma_t$  engendré par ces identifications de faces n'est pas discret.*

## Chapitre 3

# Sous-groupe discret de $PU(2, 1)$ dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger

Ce chapitre a pour objectif la construction d'un exemple explicite de sous-groupe discret de  $PU(2, 1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger. On adapte pour cela la construction de [Bou97b] au cas du plan hyperbolique complexe : on construit une représentation fidèle, discrète et convexe cocompacte du groupe

$$\Gamma_{6,3} = \langle r_1, \dots, r_6 \mid r_i^3 = 1, [r_i, r_{i+1}] = 1, i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rangle$$

dans  $PU(2, 1)$ . L'image de cette représentation a alors la propriété souhaitée, et il existe une famille continue de déformations de ce groupe dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger.

### 3.1 Préliminaires

#### 3.1.1 Ensembles limites

On note  $\mathbb{H}^n$  l'espace hyperbolique réel ou le plan hyperbolique complexe. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ , et soit  $x \in \mathbb{H}^n$ . L'orbite  $\Gamma \cdot x$  ne peut s'accumuler qu'au bord de l'espace, et l'ensemble de ses points d'accumulation est donc  $\overline{\Gamma \cdot x}^\infty \cap \partial_\infty \mathbb{H}^n$ , où l'adhérence  $\overline{\Gamma \cdot x}^\infty$  est prise pour la topologie sur  $\mathbb{H}^n \cup \partial_\infty \mathbb{H}^n$ . Cet ensemble ne dépend en fait pas du point  $x \in \mathbb{H}^n$  choisi, on a donc la définition suivante :

**Définition 3.1.1.** L'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$  d'un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  est l'ensemble  $\overline{\Gamma \cdot x}^\infty \cap \partial_\infty \mathbb{H}^n$  pour un certain  $x \in \mathbb{H}^n$ . L'ensemble de discontinuité de  $\Gamma$ , noté  $\Omega\Gamma$ , est le complémentaire de l'ensemble limite :  $\Omega\Gamma = \partial_\infty \mathbb{H}^n \setminus \Lambda\Gamma$ .

Si  $\Gamma$  est fini, par exemple, alors son ensemble limite est vide. Soit  $\gamma$  un élément parabolique ou hyperbolique de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  : alors l'ensemble limite du groupe  $\langle \gamma \rangle$  est exactement l'ensemble des points fixes de  $\gamma$ , i.e. un ou deux points du bord  $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ . Inversement, si le groupe  $\Gamma$  est un réseau, c'est-à-dire si le quotient  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  est de volume fini, alors  $\Lambda\Gamma$  est tout le bord  $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ .

Le cardinal de l'ensemble limite est sujet à la dichotomie suivante :

**Proposition 3.1.2.**  $\Lambda\Gamma$  est soit de cardinal inférieur ou égal à 2, soit de cardinal infini, auquel cas  $\Lambda\Gamma$  est parfait : tous ses points sont des points d'accumulation. Lorsque  $\Lambda\Gamma$  est de cardinal fini,  $\Gamma$  est dit élémentaire.

$\Lambda\Gamma$  est un fermé de  $\partial_{\infty}\mathbb{H}^n$ , donc il est compact. Lorsque  $\Gamma$  est non-élémentaire,  $\Lambda\Gamma$  est le plus petit fermé de  $\partial_{\infty}\mathbb{H}^n$  invariant par  $\Gamma$  (cf. par exemple [Rat06]). Lorsque  $\Lambda\Gamma$  n'est pas homéomorphe à une sphère, il peut avoir une structure fractale. On verra de tels exemples d'ensembles limites dans la suite.

Un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  agit proprement discontinument sur  $\mathbb{H}^n$ , mais l'action de  $\Gamma$  sur le bord  $\partial_{\infty}\mathbb{H}^n$  est en général plus compliquée. On peut montrer (voir [Bow95] Lemme 3.2.5) que  $\Gamma$  agit proprement discontinument sur  $\mathbb{H}^n \cup \Omega\Gamma$ . Le quotient  $(\mathbb{H}^n \cup \Omega\Gamma)/\Gamma$  est donc bien défini, c'est un orbifold à bord.

La question qui nous intéresse dans la suite est de savoir quels espaces apparaissent comme ensembles limites de sous-groupes discrets de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Cette question est étudiée en détail dans l'article de M. Kapovich [Kap08]. On rappelle ici seulement certains faits utiles pour la suite.

Lorsque la dimension topologique des ensembles limites est petite, une classification partielle existe. On rappelle la définition de dimension topologique utilisée ici, qui est la dimension de recouvrement de Lebesgue :

**Définition 3.1.3.** Soit un espace topologique  $X$ .  $X$  est de dimension au plus  $n$  si pour tout recouvrement d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$ , il existe un recouvrement d'ouverts  $(V_j)_{j \in J}$  plus fin (i.e. pour tout  $j \in J$  il existe  $i \in I$  tel que  $V_j \subset U_i$ ) tel que tout point de  $X$  appartient à au plus  $n + 1$  ouverts  $V_j$ .  $X$  est de dimension  $n$  s'il est de dimension au plus  $n$ , mais pas de dimension au plus  $n - 1$ .

Un ensemble de dimension 0 est donc totalement discontinu : chaque point est une composante connexe de l'ensemble. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  : si  $\dim(\Lambda\Gamma) = 0$ , alors  $\Lambda\Gamma$  est soit fini (et donc  $\Gamma$  est élémentaire), soit homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Une classe d'exemples de groupes dont l'ensemble limite est un Cantor est donné par les groupes de Schottky (voir [Rat06] p.612, ou [Kap08] pour une généralisation aux groupes de type Schottky et de nombreux résultats). Considérons un nombre pair de demi-espaces fermés disjoints de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , notés  $(B_j^+)_{1 \leq j \leq 2k}$ . On note  $B_j^-$  l'adhérence dans  $\mathbb{H}^n$  du complémentaire de  $B_j^+$ . On suppose données des isométries hyperboliques  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  telles que  $\gamma_j(B_{2j-1}^-) = B_{2j}^+$ . Alors le groupe  $\Gamma$  engendré par les  $\gamma_j$  est discret et un domaine fondamental pour  $\Gamma$  est donné par  $D = \bigcap_{j=1}^{2k} B_j^-$ . L'ensemble limite de  $\Gamma$  est donné par l'ensemble des points de  $\partial_{\infty}\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  qui se trouvent dans une "suite infinie" de demi-espaces à partir de  $D$ . Il est compact, parfait et totalement discontinu, donc homéomorphe à l'ensemble de Cantor, voir Figure 3.1.

Lorsque l'ensemble limite est de dimension 1, il est déjà plus compliqué d'établir une classification des espaces qui apparaissent. On doit alors se restreindre à une classe plus petite de groupes, qui correspond à une généralisation des réseaux cocompacts : les groupes *convexes cocompacts*. Ces groupes sont liés aux espaces Gromov-hyperboliques, dont on rappelle la définition et quelques propriétés.

### 3.1.2 Espaces Gromov-hyperboliques

Pour un aperçu des résultats de la théorie des groupes hyperboliques et de leur bord, on peut se référer à l'article de I. Kapovich et N. Benakli [KB02] et à son impression-

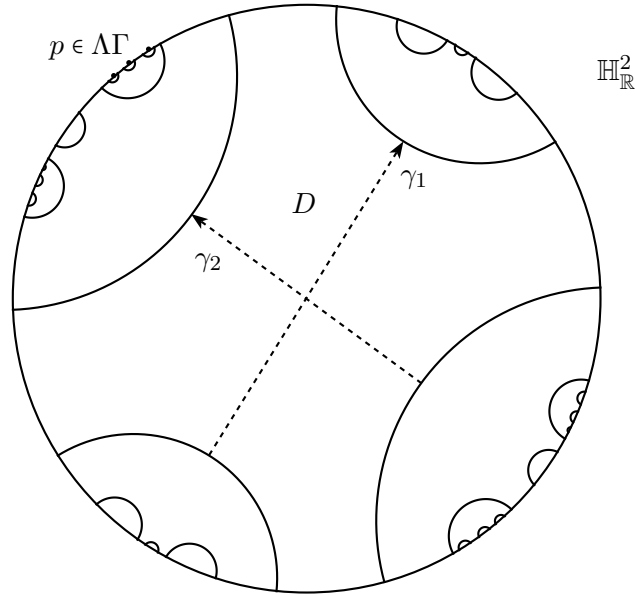


FIGURE 3.1 – Début du pavage de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  par un groupe de Schottky : l'ensemble limite est un ensemble de Cantor.

nante bibliographie. Sauf mention contraire, les résultats présentés ici sont tirés de [BH99] et [GdlH90].

**Définition 3.1.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique, et soit  $\delta \geq 0$ .  $(X, d)$  est dit  $\delta$ -hyperbolique si pour tout triangle géodésique  $\Delta \subset X$ , chaque côté est inclus dans le  $\delta$ -voisinage de l'union des deux autres côtés.  $(X, d)$  est dit *hyperbolique* (ou Gromov-hyperbolique, pour distinguer de  $\mathbb{H}^n$ ) s'il est  $\delta$ -hyperbolique pour un certain  $\delta \geq 0$ .

Le plan hyperbolique réel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  est Gromov-hyperbolique, avec  $\delta = \ln(\sqrt{2} + 1)$  (voir par exemple [And99]). Plus généralement, les espaces  $CAT(-\kappa)$ ,  $\kappa > 0$ , forment aussi une classe d'exemples d'espaces Gromov-hyperboliques. En particulier, on en déduit que les espaces hyperboliques standards  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ , où  $\mathbb{K}$  peut être  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , le corps des quaternions ou (si  $n = 2$ ) des octonions sont bien des espaces hyperboliques au sens de Gromov ([Hel78]). Les arbres sont des espaces 0-hyperboliques.

Les espaces Gromov-hyperboliques admettent un bord à l'infini, qui permet de compactifier l'espace  $(X, d)$ . Ce bord à l'infini correspond en quelque sorte aux directions des géodésiques dans  $X$ . Soient  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \infty[ \rightarrow X$  deux rayons géodésiques.  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont dits *équivalents* s'il existe une constante  $K > 0$  telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < K$  : les deux rayons restent à distance bornée l'un de l'autre. On note  $[\gamma]$  la classe d'équivalence du rayon  $\gamma$  pour cette relation.

**Définition 3.1.5.** Soit  $(X, d)$  un espace hyperbolique, et soit  $x \in X$  un point base de  $X$ . Le bord à l'infini de  $(X, d)$  par rapport à  $x$ , noté  $\partial_x X$ , est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques partant de  $x$  :

$$\partial_x X = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, \infty[ \rightarrow X \text{ rayon géodésique tel que } \gamma(0) = x\}$$

Le produit de Gromov sur  $X$  par rapport à  $x$  est défini par

$$(y|z)_x = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(x, z) - d(y, z))$$

pour tous points  $x, y, z \in X$ . Si  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique, alors deux segments géodésiques  $[x, y]$  et  $[x, z]$  restent  $2\delta$ -proches sur une longueur de  $(y|z)_x$  ([GdlH90]). On peut définir une topologie sur le bord  $\partial_x X$ , engendrée par les ensembles

$$V(p, r) = \left\{ q \in \partial_x X \mid \exists \gamma_1, \gamma_2 : [0, \infty[ \rightarrow X, [\gamma_1] = p, [\gamma_2] = q, \text{ et } \liminf_{t \rightarrow \infty} (\gamma_1(t) | \gamma_2(t))_x > r \right\}$$

pour tout  $p \in \partial_x X$  et  $r > 0$ . Un tel voisinage correspond aux rayons géodésiques partant de  $x$  qui restent  $2\delta$ -proches du rayon  $p$  sur une longueur au moins égale à  $r$  à partir de  $x$ .

**Proposition 3.1.6** ([BH99]). *Soit  $(X, d)$  un espace métrique hyperbolique propre (i.e. tel que les boules fermées sont compactes). Alors pour tous  $x, y \in X$ , les espaces topologiques  $\partial_x X$  et  $\partial_y X$  munis de la topologie définie précédemment sont homéomorphes. On note alors  $\partial X$  pour le bord à l'infini de  $X$  : c'est un espace compact.*

On peut aussi définir une topologie sur  $X \cup \partial X$ , qui coïncide avec la topologie de  $X$  sur  $X$ , et avec celle de  $\partial X$  sur  $\partial X$ , voir [BH99] p.429.  $X \cup \partial X$  est compact pour cette topologie.

Dans la suite, on s'intéresse à l'hyperbolicité de groupes de type fini. Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini, et  $S$  une partie génératrice finie symétrique (i.e.  $S = S^{-1}$ ) et ne contenant pas le neutre. Le *graphe de Cayley*  $C(\Gamma, S)$  de  $\Gamma$  par rapport à  $S$  est le graphe qui a pour sommets les éléments  $g \in \Gamma$ , et tel que deux sommets  $g$  et  $g'$  sont reliés par une arête s'il existe un élément  $s \in S$  tel que  $g' = gs$ . Muni de la métrique des mots  $d_S$ , le graphe  $C(\Gamma, S)$  devient un espace métrique.

**Définition 3.1.7.** Un groupe de type fini  $\Gamma$  est dit hyperbolique s'il existe une partie génératrice finie  $S$  telle que le graphe de Cayley  $C(\Gamma, S)$  muni de sa métrique usuelle est hyperbolique. Son bord à l'infini, noté  $\partial\Gamma$ , est défini comme le bord  $\partial C(\Gamma, S)$  du graphe de Cayley.

Notons que si l'espace métrique  $(C(\Gamma, S), d_S)$  est hyperbolique pour une partie génératrice finie  $S$ , il l'est pour toute partie génératrice finie. La topologie du bord est indépendante du choix de  $S$ .

Le résultat suivant, dû (séparément) à Schwarz et Milnor (voir par exemple [BH99], p.140), permet de faire le lien entre les actions de groupes et l'hyperbolicité :

**Proposition 3.1.8.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique propre, et  $\Gamma$  un groupe agissant sur  $X$  par isométries, cocompactement et proprement discontinument. (On dit alors que l'action est géométrique.) Alors  $\Gamma$  est de type fini, et pour tout point base  $x \in X$  et toute partie génératrice finie  $S$ , l'application  $(G, d_S) \rightarrow (X, d), g \mapsto g \cdot x$ , est une quasi-isométrie.*

On rappelle qu'une application  $f$  entre deux espaces métriques  $(X_1, d_1)$  et  $(X_2, d_2)$  est une quasi-isométrie s'il existe des constantes  $a \geq 1, b, c \geq 0$  telles que

$$\frac{1}{a}d_1(x, y) - b \leq d_2(f(x), f(y)) \leq ad_1(x, y) + b, \quad \forall x, y \in X_1$$

et tout point de  $X_2$  est à distance au plus  $c$  de  $f(X_1)$ . Une quasi-isométrie entre deux espaces hyperboliques propres s'étend naturellement en un homéomorphisme entre leur bord à l'infini ([BH99], p.430). On en déduit alors le résultat suivant :



**Théorème 3.1.9** (Gromov). *Soit  $\Gamma$  un groupe.  $\Gamma$  est hyperbolique si et seulement si il existe un espace hyperbolique  $(X, d)$  sur lequel  $\Gamma$  agit géométriquement. Dans ce cas,  $\partial X$  et  $\partial\Gamma$  sont homéomorphes.*

Ce résultat permet de construire une grande famille de groupes hyperboliques. Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte sans bord de dimension  $n$  : alors  $\pi_1(M)$  est hyperbolique, et son bord est homéomorphe à  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ . Les groupes convexes cocompacts de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ , décrits dans la suite, donnent d'autres exemples de groupes hyperboliques.

### 3.1.3 Groupes convexes cocompacts et ensembles limites de dimension 1

**Groupes convexes cocompacts : définition** Les réseaux cocompacts de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  agissent cocompactement sur  $\mathbb{H}^n$ . Les groupes convexes cocompacts sont une généralisation des réseaux cocompacts :

**Définition 3.1.10.** Un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  est dit convexe cocompact s'il existe un ensemble convexe fermé non vide  $K \subset \mathbb{H}^n$  sur lequel  $\Gamma$  agit cocompactement. En particulier, si  $\Gamma$  est non-élémentaire, c'est équivalent au fait que  $\Gamma$  agit cocompactement sur l'enveloppe convexe  $C(\Lambda\Gamma)$  de son ensemble limite  $\Lambda\Gamma$ , où  $C(\Lambda\Gamma)$  est le plus petit convexe fermé inclus dans  $\mathbb{H}^n$  contenant toutes les géodésiques entre deux points de  $\Lambda\Gamma$ .

Tout réseau cocompact de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  est clairement convexe cocompact. Une autre classe d'exemples convexes cocompacts est donnée par les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes à bord totalement géodésique. Le revêtement universel d'une telle variété est un sous-espace convexe de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  (obtenu comme intersection d'un nombre dénombrable de demi-espaces disjoints), sur lequel le groupe agit cocompactement.

Les groupes convexes cocompacts forment une famille naturelle à étudier dans le cadre des ensembles limites : ils sont fortement reliés aux groupes Gromov-hyperboliques, et les nombreux outils et résultats à disposition dans le cadre Gromov-hyperbolique peuvent être appliqués aux sous-groupes convexes cocompacts de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Le résultat de base est la proposition classique suivante :

**Proposition 3.1.11.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe convexe cocompact de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Alors  $\Gamma$  est hyperbolique au sens de Gromov, et l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$  est homéomorphe au bord du groupe  $\partial\Gamma$ .*

*Démonstration.*  $\Gamma$  est convexe cocompact, donc il agit cocompactement sur  $C(\Lambda\Gamma)$ .  $C(\Lambda\Gamma)$  est un sous-espace convexe de  $\mathbb{H}^n$ , donc c'est un espace géodésique, et ses géodésiques sont des géodésiques dans l'espace hyperbolique. En particulier,  $C(\Lambda\Gamma)$  est un espace Gromov-hyperbolique. Puisque  $\Gamma$  agit proprement et cocompactement par isométries sur  $C(\Lambda\Gamma)$ , on peut appliquer le théorème 3.1.9 :  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique, et son bord  $\partial\Gamma$  est homéomorphe à  $\partial C(\Lambda\Gamma)$ .

Il reste donc à montrer que le bord hyperbolique  $\partial C(\Lambda\Gamma)$  est exactement l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$ . On le voit par double inclusion. Soit  $p \in \partial C(\Lambda\Gamma)$ , et soit  $x$  un point de  $C(\Lambda\Gamma)$ . Par définition du bord hyperbolique, il existe une géodésique  $r$  dans  $C(\Lambda\Gamma)$  qui tend vers  $p$  et telle que  $r(0) = x$ . Puisque la métrique sur  $C(\Lambda\Gamma)$  est la métrique hyperbolique,  $r$  est une géodésique de  $\mathbb{H}^n$ . On sait que  $\Gamma$  agit cocompactement sur  $C(\Lambda\Gamma)$ , donc il existe une constante  $K > 0$  (par exemple le diamètre du quotient) telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $\gamma_m \in \Gamma$  tel que  $d(r(m), \gamma_m(x)) \leq K$  (où  $d$  désigne la distance hyperbolique). La suite

$(\gamma_m(x))$  tend donc vers le bord de  $\mathbb{H}^n$  en restant à distance bornée de la géodésique  $r$ , donc elle tend vers le point  $p$ . Par définition de l'ensemble limite de  $\Gamma$ ,  $p$  appartient à  $\Lambda\Gamma$ .

L'autre inclusion est immédiate : soit  $p \in \Lambda\Gamma$ , et soit un point  $x \in C(\Lambda\Gamma)$  (on suppose que l'ensemble limite n'est pas vide, alors il n'est pas réduit à un point puisque  $\Gamma$  est convexe cocompact, et donc son enveloppe convexe intersecte  $\mathbb{H}^n$ ). Par convexité de  $C(\Lambda\Gamma)$ , la géodésique  $r$  passant par  $p$  et  $x$  est entièrement incluse dans  $C(\Lambda\Gamma)$ . Puisque la distance sur l'espace Gromov-hyperbolique  $C(\Lambda\Gamma)$  est exactement la restriction de la distance hyperbolique,  $p$  est un point du bord  $\partial C(\Lambda\Gamma)$   $\square$

**Le théorème de M. Kapovich et B. Kleiner** On cherche à étudier les sous-groupes de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  dont l'ensemble limite est de dimension 1. D'après la proposition précédente, on peut utiliser un théorème de M. Kapovich et B. Kleiner [KK00], qui traite des groupes Gromov-hyperboliques dont le bord est de dimension topologique 1. Ce théorème peut être reformulé dans le cadre des groupes convexes cocompacts de la façon suivante :

**Théorème 3.1.12** (Kapovich-Kleiner [KK00]). *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  convexe cocompact, dont l'ensemble limite est de dimension topologique 1. Si  $\Gamma$  ne se scinde pas sur groupe fini ou virtuellement cyclique, alors  $\Lambda\Gamma$  est homéomorphe à  $S^1$ , ou au tapis de Sierpinski  $\mathcal{S}$ , ou à l'éponge de Menger  $\mu$ .*

Un groupe  $\Gamma$  est dit *scindé* sur un sous-groupe  $H$  s'il se décompose de façon non triviale comme produit amalgamé  $\Gamma = \Gamma_1 *_H \Gamma_2$  ou comme extension HNN de la forme  $\Gamma = \Gamma_1 *_H$  (voir [Ser80] pour les détails de ces notions).

Les hypothèses algébriques sur le groupe  $\Gamma$  dans le théorème 3.1.12 se traduisent simplement en terme de l'ensemble limite :  $\Lambda\Gamma$  doit être connexe, et dans le cas où  $\Lambda\Gamma$  n'est pas homéomorphe à  $S^1$ , il ne doit pas avoir de points de coupure locaux (voir [KB02]). Ces restrictions permettent d'étudier seulement les ensembles limites "de base" qui apparaissent : on ne s'intéresse pas aux ensembles limites obtenus par combinaison de deux groupes via un produit amalgamé ou une extension HNN (voir par exemple les théorèmes de combinaison de Klein et Maskit dans [Mas88, Kap01]).

Le tapis de Sierpinski et l'éponge de Menger sont des objets fractals, définis comme suit. Le tapis de Sierpinski est un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^2$  construit récursivement, de la même façon que l'ensemble de Cantor. L'ensemble initial est le carré unité, que l'on découpe en 9 carrés identiques. L'intérieur du carré central est ôté, et on recommence l'opération sur les 8 carrés restants. L'ensemble limite obtenu après un ensemble dénombrable d'étapes est appelé "tapis de Sierpinski".

L'éponge de Menger  $\mu$  est une courbe fractale de dimension topologique 1, obtenue comme une généralisation du tapis de Sierpinski, voir [Kap08]. C'est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$ , construit à partir du cube unité  $C \subset \mathbb{R}^3$ . Pour chaque face  $F_i$  de  $C$ , on note  $S_i$  la copie du tapis de Sierpinski correspondante, et  $p_i$  la projection orthogonale sur  $F_i$ . Alors

$$\mu = \bigcap_{i=1}^8 p_i^{-1}(S_i)$$

Les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes réelles de dimension 3 à bord totalement géodésique (non vide) fournissent une famille d'exemples dont l'ensemble limite est homéomorphe au tapis de Sierpinski (cf. [Kap08]). Un tel groupe agit sur

un ensemble convexe de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ , obtenu comme le complémentaire d'un nombre dénombrable de demi-espaces disjoints. Les bords de ces demi-espaces forment un ensemble de disques disjoints dans  $\mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ . L'ensemble limite est exactement le complémentaire de l'union de ces disques dans  $\mathbb{S}^2$ , voir [Kap08] p.516.

Pour obtenir des exemples explicites de groupes dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger  $\mu$ , il faut attendre les travaux de M. Bourdon [Bou97b], détaillés section 3.2. Pour tout  $n \geq 4$  pair, Bourdon construit une famille infinie de sous-groupes de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  convexes cocompacts dont l'ensemble limite est homéomorphe à  $\mu$ . A ma connaissance, ce sont les seuls exemples explicites de tels groupes. En particulier, on ne connaît pas d'exemples dans le cas du plan hyperbolique complexe. L'objectif de ces travaux est de construire un tel exemple.

### 3.1.4 Groupes géométriquement finis

On étudie dans cette partie les groupes géométriquement finis, qui forment une classe plus large que les groupes convexes cocompacts. La notion de finitude géométrique a d'abord été introduite dans le cadre des groupes kleinien sous la forme suivante : un groupe kleinien est géométriquement fini s'il admet un domaine fondamental convexe avec un nombre fini de faces. Cette notion a par exemple été utilisée par Ahlfors [Ahl66] pour montrer que sous cette hypothèse, l'ensemble limite est soit tout le bord de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ , soit de mesure 0. Des définitions différentes ont été données par Marden [Mar74], Beardon et Maskit [BM74] et enfin Thurston [Thu80], toutes dans le cadre de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ . Dans son article [Bow93], Bowditch précise ces définitions et montre leur équivalence dans le cas des groupes d'isométries de l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ . Il étend ensuite cette équivalence au cas de la courbure variable dans [Bow95] : dans ce cas, la caractérisation initiale (existence d'un domaine fondamental avec un nombre fini de faces) n'est plus valable, mais l'équivalence entre les autres définitions demeure.

$\mathbb{H}^n$  désigne toujours l'espace hyperbolique réel ou complexe. On montre dans cette partie que  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  est convexe cocompact si et seulement s'il est géométriquement fini et sans parabolique. Cette caractérisation des groupes convexes cocompacts, plus facilement vérifiable que la définition, sera utilisée en pratique dans la suite.

On commence par introduire certaines notions nécessaires pour définir la finitude géométrique (on réfère le lecteur aux articles de Bowditch [Bow93] et [Bow95] pour plus de détails). Soit donc  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . On note  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  le quotient de  $\mathbb{H}^n$  par  $\Gamma$ ,  $M_c = (\mathbb{H}^n \cup \Omega)/\Gamma$  l'orbifold à bord obtenue en ajoutant le domaine de discontinuité, et  $C(\Lambda\Gamma)$  l'enveloppe convexe de l'ensemble limite. Enfin, on note  $CM(\Gamma)$  le quotient  $C(\Lambda\Gamma)/\Gamma \subset M$ , appelé *coeur convexe* de  $M$ .

**Points coniques et points paraboliques bornés** On commence par décrire deux types de points de l'ensemble limite.  $p \in \Lambda\Gamma$  est un *point conique* s'il existe une suite  $(\gamma_n)$  dans  $\Gamma$ , un point  $x \in \mathbb{H}^n$  et une géodésique  $r$  d'extrémité  $p$  telles que  $\gamma_n(x)$  tend vers  $p$  en restant à distance bornée de la géodésique  $r$ . Si  $p$  est un point conique, cette propriété est vraie pour tout choix de  $x$  et de géodésique  $r$  d'extrémité  $p$ .

$p \in \Lambda\Gamma$  est un *point parabolique borné* s'il est le point fixe d'un élément parabolique de  $\Gamma$ , et si l'espace  $(\Lambda\Gamma \setminus \{p\})/\text{Stab}_{\Gamma}(p)$  est compact. Un point de l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$  ne peut pas être à la fois conique et parabolique borné.

**Espace des bouts** Etant donné un espace topologique  $X$  possédant une suite exhaustive de compacts  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , l'espace des bouts de  $X$  est l'ensemble des suites de la forme  $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$ , où  $U_i$  est une composante connexe de  $X \setminus K_i$ . (Une autre suite exhaustive de compacts donne un espace des bouts en bijection naturelle avec le premier.) Chaque bout représente une façon de “partir à l'infini” dans l'espace  $X$ .

L'espace  $M_c = (\mathbb{H}^n \cup \Omega)/\Gamma$  en particulier admet un espace de bouts. On dit qu'un point  $p \in \Lambda\Gamma$  est associé à un bout  $b$  de  $M_c$  s'il existe une suite  $(p_n)$  de points de  $\mathbb{H}^n$  telle que  $p_n$  tend vers  $p$  et  $\pi(p_n)$  tend vers  $b$ , où  $\pi$  est la projection  $\mathbb{H}^n \rightarrow M_c$ . Un bout  $b$  de  $M_c$  est dit *parabolique* s'il est associé à un point parabolique borné (voir [Bow95] pour les détails).

**Décomposition fine-épaisse d'un orbifold ([Bow95] p.250)** L'espace hyperbolique réel ou complexe  $\mathbb{H}^n$  est une variété riemannienne connexe, simplement connexe, complète, et de courbure négative et minorée, donc le “lemme de Margulis” (voir par exemple [BGS85]) s'applique : il existe une constante  $\varepsilon_n$ , dépendant seulement de la dimension et de la courbure, telle que pour tout groupe  $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  discret et tout  $x \in \mathbb{H}^n$ , le sous-groupe

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \langle \gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma(x)) \leq \varepsilon \rangle$$

est virtuellement nilpotent pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_n$ . La constante  $\varepsilon_n$  s'appelle *constante de Margulis*.

Pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_n$ , on définit alors

$$T_\varepsilon(\Gamma) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \Gamma_\varepsilon(x) \text{ est infini}\}$$

$T_\varepsilon(\Gamma)$  est  $\Gamma$ -invariant et fermé dans  $\mathbb{H}^n$ . La *partie fine* de  $M$  est définie comme  $T_\varepsilon(\Gamma)/\Gamma$ . La *partie épaisse* de  $M$  est alors définie comme l'adhérence dans  $M$  du complémentaire de la partie fine de  $M$ . On la note  $\text{thick}_\varepsilon(M)$ .

**Finitude géométrique** On peut maintenant donner la définition d'un groupe géométriquement fini.

**Définition 3.1.13** ([Bow95]). Un sous-groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  (réel ou complexe) est géométriquement fini si l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- $M_c$  admet un nombre fini de bouts, et ils sont tous paraboliques,
- tout point de l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$  est soit un point conique, soit un point parabolique borné,
- l'intersection du coeur convexe  $CM(\Gamma)$  et de  $\text{thick}_\varepsilon M$  pour un certain  $\varepsilon < \varepsilon_m$  est compacte,
- l'ordre des sous-groupes finis de  $\Gamma$  est majoré, et il existe  $\eta > 0$  tel que le voisinage  $N_\eta(CM(\Gamma))$  du coeur convexe est de volume fini.

Dans le cas hyperbolique réel, une cinquième caractérisation est l'existence d'un domaine fondamental se décomposant comme union finie de polyèdres convexes avec un nombre fini de faces ([Bow93]). Elle n'est cependant plus valable en courbure variable.

Dans le cas hyperbolique réel, il est bien connu qu'un groupe  $\Gamma$  est convexe cocompact si et seulement s'il est géométriquement fini et sans parabolique. La propriété “géométriquement fini sans parabolique” est parfois utilisée comme définition de convexe cocompacté, voir par exemple [Kap01]. On prouve cette équivalence dans le cas de la courbure variable, en se basant sur [Bow95].

**Proposition 3.1.14.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$ , l'espace hyperbolique réel ou complexe. Alors  $\Gamma$  est convexe cocompact si et seulement s'il est géométriquement fini et sans parabolique.*

On utilise pour prouver cette proposition un résultat d'Anderson ([And83], théorème 3.3 p.714) : l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$  est par définition fermé dans  $\partial_\infty\mathbb{H}^n$ , et l'espace hyperbolique complexe est à courbure négative pincée, donc  $\overline{C(\Lambda\Gamma)} \cap \partial_\infty\mathbb{H}^n = \Lambda\Gamma$ . Les points au bord de  $C(\Lambda\Gamma)$  sont donc exactement les points de l'ensemble limite.

*Démonstration.* On suppose d'abord que  $\Gamma$  est géométriquement fini et sans parabolique. Soit  $D$  un domaine de Dirichlet pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^n$ .  $\Gamma$  agit sur  $C(\Lambda\Gamma)$ , donc  $D \cap C(\Lambda\Gamma)$  est un domaine fondamental pour cette action. Pour montrer que  $\Gamma$  agit cocompactement sur  $C(\Lambda\Gamma)$ , on cherche à montrer que  $D \cap C(\Lambda\Gamma)$  est d'adhérence compacte dans  $\mathbb{H}^n$ . Il suffit de voir que son adhérence n'a pas de point au bord. Noter que si un point  $p \in \partial_\infty\mathbb{H}^n$  est dans  $\Lambda\Gamma$ , puisque  $\Gamma$  est géométriquement fini et qu'il n'admet pas de parabolique, alors  $p$  est un point limite conique.

Montrons d'abord que tout point au bord de  $D$  est un point de discontinuité. Supposons le contraire : soit  $p \in \overline{D} \cap \Lambda\Gamma$ . Soit  $x \in D$  : d'après [Bow95] p.249,  $\overline{D}$  est  $\lambda$ -quasi-convexe (où la constante  $\lambda$  ne dépend pas du groupe ni de la dimension), donc la géodésique  $r = (xp)$  est dans le  $\lambda$ -voisinage de  $\overline{D}$ . Mais  $p$  est un point limite conique de  $\Gamma$ , donc il existe une suite d'éléments  $(\gamma_n)$  de  $\Gamma$  telle que la suite  $(\gamma_n(x))$  tend vers  $p$  en restant à distance bornée de la géodésique  $r$ . Il existe donc une suite d'éléments  $z_n \in D$  qui tend vers  $p$ , et telle que l'ensemble des distances  $d(\gamma_n(x), z_n)$  est borné. Notons alors  $\pi$  la projection  $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$  : l'ensemble des distances  $d(\pi(x), \pi(z_n))$  est borné, mais puisque  $D$  est isométrique à  $\mathbb{H}^n/\Gamma$ ,  $d(\pi(z_0), \pi(z_n)) = d(z_0, z_n) \rightarrow \infty$ . Absurde, donc  $p$  est un point de discontinuité.

Soit maintenant  $p \in \overline{D \cap C(\Lambda\Gamma)} \cap \partial_\infty\mathbb{H}^n$ .  $p$  est dans  $\overline{D} \cap \partial_\infty\mathbb{H}^n$  donc c'est un point de discontinuité de  $\Gamma$ . Mais d'après le résultat d'Anderson,  $\overline{C(\Lambda\Gamma)} \cap \partial_\infty\mathbb{H}^n$  est exactement  $\Lambda\Gamma$ , donc  $p \in \Lambda\Gamma$ . C'est absurde, donc  $\overline{D \cap C(\Lambda\Gamma)}$  n'a pas de point au bord de l'espace hyperbolique et donc  $D \cap C(\Lambda\Gamma)$  est d'adhérence compacte.

Prouvons maintenant la deuxième implication. Soit  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  convexe cocompact : le quotient  $CM(\Gamma)$  est compact. Par définition,  $\text{thick}_\varepsilon(M)$  est un ensemble fermé de  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ , donc son intersection avec  $CM(\Gamma)$  est compacte. Une des caractérisations de la finitude géométrique est donc vérifiée. On vérifie ensuite que tout point de l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$  est un point conique. Ceci assure que  $\Gamma$  n'admet pas d'élément parabolique.

Soit donc  $p \in \Lambda\Gamma$ , et soit  $x \in C(\Lambda\Gamma)$ . La géodésique  $r = (xp)$  est entièrement incluse dans  $C(\Lambda\Gamma)$ . Soit  $D_C$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $C(\Lambda\Gamma)$  :  $D_C$  est compact, donc  $r$  rencontre une infinité de copies de  $D_C$ . Il existe donc une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments distincts de  $\Gamma$  telle que  $\gamma_n(x)$  tend vers  $p$  en restant à distance bornée de  $r$ . Donc  $p$  est un point conique.  $\square$

Cette caractérisation des groupes convexes cocompacts est utile en pratique, puisque les différentes caractérisations de la finitude géométrique sont alors autant de moyens de vérifier qu'un groupe est convexe cocompact. Elle donne par exemple directement que les groupes de Schottky définis section 3.1.1 sont convexes cocompacts.

C'est le corollaire suivant qui sera utilisé dans la suite de ces travaux pour montrer qu'un groupe est convexe cocompact, voir section 3.6.2 :

**Corollaire 3.1.15.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$ .  $\Gamma$  est convexe cocompact si et seulement si le quotient  $M_c = (\mathbb{H}^n \cup \Omega\Gamma)/\Gamma$  est compact.*

Cette caractérisation de la convexe cocompactité est vérifiable (sous certaines conditions) de manière effective sur un domaine fondamental  $D$  de  $\Gamma$ , en étudiant les points à l'infini de  $D$ .

*Démonstration.* Il suffit de vérifier l'équivalence

$$M_c \text{ compact} \Leftrightarrow \Gamma \text{ géométriquement fini et sans paraboliques}$$

Si  $M_c$  est compact, il n'admet pas de bouts, donc  $\Gamma$  est géométriquement fini. Tout point parabolique de  $\Gamma$  est alors un point parabolique borné ([Bow95] lemme 6.4), et donc est associé à un bout de  $M_c$ . Donc  $\Gamma$  n'admet pas d'élément parabolique.

Réciproquement, si  $\Gamma$  est géométriquement fini, alors tous les bouts de  $M_c$  sont associés à des points paraboliques bornés. Mais  $\Gamma$  n'admet pas de paraboliques, donc  $M_c$  n'a pas de bouts :  $M_c$  est compact.  $\square$

## 3.2 La construction de Bourdon

On décrit dans cette partie les objets utilisés par Bourdon [Bou97b] pour construire un sous-groupe de  $PO(n, 1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger. Le principe est de trouver un groupe Gromov-hyperbolique dont le bord à l'infini est homéomorphe à  $\mu$ , puis de le plonger de façon convexe cocompacte dans  $PO(n, 1)$ . Le groupe considéré est le groupe suivant, noté  $\Gamma_{pq}$  et défini par la présentation suivante :

$$\Gamma_{pq} = \langle r_1, \dots, r_p \mid r_i^q = 1, [r_i, r_{i+1}] = 1, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rangle$$

où  $p, q \in \mathbb{N}$  avec  $p \geq 5$  et  $q \geq 3$ .

### 3.2.1 L'immeuble hyperbolique à angles droits $I_{pq}$

Pour montrer que le groupe  $\Gamma_{pq}$  vérifie les propriétés voulues, il suffit de voir qu'il agit cocompactement sur un espace Gromov-hyperbolique dont le bord est homéomorphe à l'éponge de Menger, d'après le théorème 3.1.9. Cet espace est un immeuble hyperbolique à angles droits, comme décrit dans la suite. La définition théorique précise d'un immeuble ne sera pas détaillée dans ces travaux : on peut se référer aux articles [Bou97a, BP99, BP00] de Bourdon et Pajot sur les immeubles hyperboliques à angles droits.

Considérons un complexe cellulaire  $I$ . Les cellules de dimension maximale  $I$  sont appelées "chambres". Elles sont organisées en sous-complexes, appelés "appartements".  $I$  est un *immeuble* si  $I$  est l'union de ses appartements, et s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- deux chambres de  $I$  sont toujours contenues dans un même appartement
- si deux chambres  $C$  et  $C'$  sont dans l'intersection de deux appartements  $A_1$  et  $A_2$ , alors il existe un isomorphisme de complexes cellulaires entre  $A_1$  et  $A_2$  qui fixe les chambres  $C$  et  $C'$ .

Un exemple d'immeuble est donné par le plan hyperbolique réel, pavé par les copies d'un polygone de Coxeter. Les copies du polygone constituent les chambres de l'immeuble, et il est constitué d'un unique appartement,  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Dans la suite, on considère la réalisation géométrique de certains immeubles, appelés immeubles hyperboliques fuchsien à angles droits. Les chambres sont des polygones hyperboliques réguliers à angles droits, organisés en appartements isométriques à  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Soit donc  $P$  un  $p$ -gone hyperbolique régulier à angles droits (d'où la condition  $p \geq 5$ ). Il existe un 2-complexe cellulaire  $I_{pq}$  connexe et simplement connexe, vérifiant les propriétés suivantes :

- les 2-cellules de  $I_{pq}$  sont isométriques à  $P$ ,
- les 2-cellules sont rattachées suivant les arêtes et les sommets de  $P$ , deux 2-cellules ont au plus un sommet ou une arête en commun,
- le link de chaque sommet de  $I_{pq}$  est le  $q$ -graphe biparti complet.

On rappelle que le  $q$ -graphe biparti complet est le graphe  $G = (S, A)$ , où  $S$  est l'ensemble des sommets de  $G$  et  $A$  l'ensemble des arêtes, qui vérifie :  $|S| = 2q$ , et il existe une partition de  $S$  en deux ensembles  $S_1$  et  $S_2$  de cardinal  $q$  tels que  $A = \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ . Le link d'un sommet  $x$  dans un 2-complexe cellulaire  $I$  est le graphe dont les sommets correspondent aux 1-cellules de  $I$  incidentes à  $x$ , et tel que deux sommets sont joints par une arête si et seulement si il existe une 2-cellule incidente aux deux 1-cellules correspondantes.

La dernière propriété indique qu'autour de chaque arête sont attachées  $q$  2-cellules. Un sommet du complexe est incident à  $2q$  arêtes, et à  $q^2$  2-cellules.

$I_{pq}$  est muni d'une structure d'espace de longueur, en prenant la longueur induite par la métrique hyperbolique sur les 2-cellules. Il est unique à isométrie près, et vérifie la proposition suivante (voir [Bou97a]).

**Proposition 3.2.1.**  *$I_{pq}$  est un espace  $CAT(-1)$ . En particulier il est Gromov-hyperbolique, et on peut définir son bord  $\partial I_{pq}$ .*

Lorsque  $q = 2$ , le complexe  $I_{p,2}$  est isométrique au plan hyperbolique réel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Pour  $q \geq 3$ , il est plus difficile de visualiser l'immeuble  $I_{pq}$  : il n'est plus planaire, et il est impossible de le plonger dans l'espace hyperbolique de dimension 3 [Bou97b].

Le groupe  $\Gamma_{pq}$  peut-être vu comme un sous-groupe du groupe des isométries de  $I_{pq}$ . Fixons une 2-cellule de base  $P$ , et une numérotation cohérente des arêtes de toutes les copies de  $P$  (c'est possible sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , donc sur chaque appartement, et les propriétés de l'immeuble permettent de l'étendre à tout  $I_{pq}$ ). L'élément  $r_i$  de  $\Gamma_{pq}$  agit comme une "rotation" autour de l'arête  $i$ , en permutant cycliquement les copies de  $P$  attachées à l'arête  $i$  (et de même, on en déduit l'action de  $r_i$  sur tout  $I_{pq}$ ).  $\Gamma_{pq}$  agit proprement discontinument sur  $I_{pq}$ , et le quotient est isométrique au  $p$ -gone  $P$ .  $\Gamma_{pq}$  agit donc géométriquement sur l'espace Gromov-hyperbolique  $I_{pq}$ . D'après le théorème 3.1.9,  $\Gamma_{pq}$  est donc un groupe hyperbolique, et  $\partial\Gamma_{pq}$  est homéomorphe à  $\partial I_{pq}$ .

La thèse (non publiée) de N. Benakli [Ben92], ainsi que des travaux plus récents de J. Dymara et D. Osajda [DO07], montrent que le bord à l'infini de l'immeuble hyperbolique  $I_{pq}$  est homéomorphe à l'éponge de Menger, lorsque  $p \geq 5$  et  $q \geq 3$ . La preuve de cette propriété est basée sur la caractérisation topologique de l'éponge de Menger, due à Bestvina :

**Théorème 3.2.2** ([Bes88]). *Soit  $X$  un espace métrique de dimension topologique 1, compact, connexe, localement connexe (i.e. tout point admet une base de voisinages connexes) satisfaisant la propriété suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout couple de fonctions continues  $f, g : I = [0, 1] \rightarrow X$ , il existe  $f' : I \rightarrow X$  (resp.  $g' : I \rightarrow X$ ),  $\varepsilon$ -proche de  $f$  (resp.  $g$ ) telles que  $f'(I) \cap g'(I) = \emptyset$ . Alors  $X$  est homéomorphe à l'éponge de Menger.*

On en déduit donc le résultat voulu :

**Théorème 3.2.3.** *Pour tous  $p \geq 5$  et  $q \geq 3$ ,  $\partial\Gamma_{pq}$  est homéomorphe à l'éponge de Menger.*

### 3.2.2 Représentations convexes cocompactes de $\Gamma_{pq}$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$

Le groupe  $\Gamma_{pq}$  est hyperbolique, et d'après le paragraphe précédent, son bord est homéomorphe à l'éponge de Menger. L'image d'une représentation fidèle discrète de  $\Gamma_{pq}$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  aura alors les mêmes propriétés. Si cette représentation est en plus convexe cocompacte, alors d'après la proposition 3.1.11, l'ensemble limite de la représentation est homéomorphe à  $\partial\Gamma_{pq}$ . C'est l'argument utilisé par Bourdon [Bou97b] pour construire une famille de sous-groupes discrets de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger.

Soient  $p, q \in \mathbb{N}$  avec  $p \geq 6$  pair et  $q \geq 3$ . Considérons l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  de dimension  $n = 2q - 2$ . Soit  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  une copie (fixée) du plan hyperbolique plongée dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , et  $P \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  un  $p$ -gone hyperbolique régulier à angles droits. On note  $a_i, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , les



arêtes de  $P$ , et  $A_i$  les sommets de  $P$ , où  $a_i = [A_i, A_{i+1}]$ . Soient  $V$  et  $W$  deux sous-espaces hyperboliques de dimension  $q-2$  orthogonaux à la copie de  $\mathbb{H}^2$  portant  $P$  et orthogonaux entre eux. A chaque arête  $a_i$  de  $P$ , on associe une isométrie hyperbolique  $r_i$  d'ordre  $q$ , définie comme suit :

- si  $i$  est pair (respectivement impair),  $r_i$  fixe le sous-espace de dimension  $q-1$  engendré par  $a_i$  et la direction de  $V$  (respectivement  $W$ ). La condition "  $p$  pair " permet d'avoir alternance des directions sur chaque arête.
- dans la direction orthogonale, engendrée par la direction de  $W$  (respectivement  $V$ ) et la direction orthogonale à  $a_i$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ ,  $r_i$  est telle que l'orbite de l'extrémité d'un vecteur de base décrit les sommets d'un simplexe régulier de dimension  $q-1$  centré en l'origine. En particulier, puisque le polygone  $P$  est à angles droits, l'orbite du point  $A_{i+2}$  sous  $r_i$  est l'ensemble des sommets d'un  $q-1$ -simplexe centré en  $A_{i+1}$ , et l'orbite du point  $A_{i-1}$  est l'ensemble des sommets d'un  $q-1$ -simplexe centré en  $A_{i-1}$ .

Soit alors  $\Gamma$  le groupe engendré par les  $r_i$  : c'est une représentation de  $\Gamma_{pq}$  ( $P$  est à angles droits, donc les  $r_i$  commutent). Considérons le domaine de Dirichlet partiel suivant pour  $\Gamma$  (voir définition 1.2.13), centré au centre du polygone  $P$ , noté  $p_0$  :

$$D = \bigcap_{\gamma \in S} H_{\gamma}^{-}(p_0)$$

où  $S = \{(r_i)^j \mid i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq q-1\}$ . Sous la condition

$$\sin \frac{\pi}{p} < \frac{1}{\sqrt{q}},$$

Bourdon décrit la combinatoire de  $D$  et montre que  $D$  est muni d'identifications de faces qui vérifient les hypothèses du théorème de Poincaré. La représentation est donc discrète, et les relations données par le théorème de Poincaré montrent qu'elle est fidèle.  $D$  a un nombre fini de faces, donc  $\Gamma$  est géométriquement fini d'après la définition 3.1.13 (cette caractérisation est valable dans le cas hyperbolique réel), et l'étude du domaine fondamental  $D$  montre que  $\Gamma$  n'admet pas de parabolique. La représentation construite est donc discrète, fidèle et convexe cocompacte d'après la proposition 3.1.14. D'après les résultats des paragraphes précédents, l'ensemble limite de  $\Gamma$  est donc homéomorphe à l'éponge de Menger.

L'étude de la combinatoire de  $D$  utilise fortement les propriétés dues à la courbure constante de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  : les polyèdres de Dirichlet sont bordés par des hyperplans totalement géodésiques, ils sont convexes, et l'angle d'intersection entre deux faces du polyèdre est constant. Dans la suite, on adaptera cette construction au cas du plan hyperbolique complexe, mais avec une preuve plus calculatoire (et moins générale) que celle de [Bou97b].

### 3.3 Outils

Cette section détaille les notions et résultats nécessaires à la construction d'un groupe d'isométrie de  $PU(2, 1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger. Les polyèdres considérés dans ce chapitre sont des polyèdres de Dirichlet, bordés par des bissecteurs. On présente donc les propriétés de base des bissecteurs et de leurs intersections. On donne aussi une version du théorème de Poincaré adaptée au type de polyèdres apparaissant dans ces travaux.

#### 3.3.1 Bissecteurs dans l'espace hyperbolique complexe

L'espace hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  est défini section 1.1. Dans la suite de ce chapitre, on considère seulement le plan hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . La forme sesquilinéaire sur  $\mathbb{C}^3$  utilisée est la forme standard de signature  $(2, 1)$  :

$$\langle Z, Z' \rangle = -\overline{Z_0} \cdot Z'_0 + \overline{Z_1} \cdot Z'_1 + \overline{Z_2} \cdot Z'_2, \quad \forall Z, Z' \in \mathbb{C}^3.$$

On rappelle que  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  possède deux types de sous-espaces totalement géodésiques. Les *droites complexes*  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$  sont des copies isométriques du disque de Poincaré de courbure  $-1$ . Dans le modèle de la boule  $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}^2$ , ce sont des droites complexes affines. En particulier, étant donnés deux points de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , il existe une unique droite complexe passant par ces points. Les *lagrangiens* sont des sous-espaces totalement géodésiques réels, qui sont des copies isométriques du modèle de Klein de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , de courbure  $-1/4$ . Un exemple de lagrangien est donné par l'ensemble  $\mathbb{B}^2 \cap \mathbb{R}^2$  des points réels de la boule.

Il n'y a pas d'hypersurfaces totalement géodésiques dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , donc pas de choix canonique pour les faces d'un polyèdre. Les *bissecteurs*, décrits dans la partie suivante, sont un choix possible : ils ne sont pas totalement géodésiques, mais possèdent deux feuilletages par des sous-variétés totalement géodésiques. Ils ont été introduits par Giraud ([Gir21], voir aussi le résumé de l'article dans [Gol99], annexe A), et Mostow [Mos80]. D'autres types d'hypersurfaces peuvent être utilisés, voir par exemple [Sch02, FZ99, FP04, Wil06].

Mentionnons que  $\mathbb{C}^{2,1}$  est muni d'un produit vectoriel lorentzien, noté  $\boxtimes$  (cf. [Gol99] p.45). Pour tout  $Z, Z' \in \mathbb{C}^{2,1}$ , on a  $Z \boxtimes Z' = (H \cdot \overline{Z}) \wedge (H \cdot \overline{Z}')$ , où  $\wedge$  est le produit vectoriel euclidien usuel et  $H$  est la matrice associée à la forme lorentzienne. Le produit vectoriel lorentzien  $\boxtimes$  vérifie bien que  $Z \boxtimes Z'$  est nul si et seulement si  $Z$  et  $Z'$  sont  $\mathbb{C}$ -colinéaires. Dans le cas contraire,  $Z \boxtimes Z'$  est orthogonal (pour la forme hermitienne) à  $Z$  et  $Z'$ .

##### 3.3.1.1 Bissecteurs

La théorie des bissecteurs et de leurs intersections est étudiée en détail dans le livre de W. Goldman [Gol99]. Tous les résultats cités ici sont issus de [Gol99].

Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux points distincts de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . L'hypersurface équidistante de  $z_1$  et  $z_2$ , notée  $B(z_1, z_2)$ , est appelée *bissecteur* entre  $z_1$  et  $z_2$  :

$$B(z_1, z_2) = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \mid d(x, z_1) = d(x, z_2)\}.$$

Dans le modèle de la boule, si  $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^{2,1}$  sont des relevés de  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $\langle Z_1, Z_1 \rangle = \langle Z_2, Z_2 \rangle$ , le bissecteur s'écrit simplement

$$B(z_1, z_2) = (\{1\} \times \mathbb{B}^2) \cap \{X \in \mathbb{C}^{2,1} \mid |\langle X, Z_1 \rangle| = |\langle X, Z_2 \rangle|\}.$$

La droite complexe  $\Sigma$  engendrée par  $z_1$  et  $z_2$  est appelée *épine complexe* du bissecteur. L'intersection  $\sigma = \Sigma \cap B(z_1, z_2)$  est la géodésique réelle équidistante de  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\Sigma$ . C'est l'*épine réelle* de  $B(z_1, z_2)$ .

Un bissecteur n'est pas totalement géodésique, mais admet deux feuilletages par des sous-variétés totalement géodésiques, complexes ou réelles :

**Théorème 3.3.1** (Giraud, Mostow). *Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux points distincts de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ,  $B(z_1, z_2)$  le bissecteur équidistant de  $z_1$  et  $z_2$ , et  $\Sigma, \sigma$  les épines complexe et réelle de  $B(z_1, z_2)$ .*

- *Soit  $\pi_{\Sigma}$  la projection orthogonale sur la droite complexe  $\Sigma$ .  $B(z_1, z_2)$  est feuilleté par les sous-variétés totalement géodésiques complexes de la forme  $\pi_{\Sigma}^{-1}(\{s\})$ , où  $s \in \sigma$ . Ces sous-variétés sont appelées tranches complexes de  $B(z_1, z_2)$ .*
- *$B(z_1, z_2)$  est l'union de tous les lagrangiens de dimension  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ) contenant la géodésique réelle  $\sigma$ . On les appelle méridiens de  $B(z_1, z_2)$ .*

Les épines complexe et réelle du bissecteur  $B(z_1, z_2)$  sont en fait intrinsèques à la géométrie du bissecteur, et ne dépendent pas de la paire  $\{z_1, z_2\}$  utilisée pour le définir ([Gol99] p.154).

On s'intéressera dans la suite aux intersections entre deux bissecteurs (ou plus). La première étape est de définir un paramétrage explicite des tranches d'un bissecteur donné. On raisonne d'abord dans  $\mathbb{C}^{2,1}$ , sans s'occuper de l'intersection avec  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Soient donc  $Z_1, Z_2$  des relevés de  $z_1$  et  $z_2$ , choisis tels que  $\langle Z_1, Z_1 \rangle = \langle Z_2, Z_2 \rangle = -1$ , et tels que  $\langle Z_1, Z_2 \rangle \in \mathbb{R}_-$ . Il est toujours possible de trouver des relevés satisfaisant les deux conditions, quitte à multiplier l'un des deux par un scalaire de module 1 : si  $Z_1, Z_2$  satisfont la première condition, alors  $\langle -\frac{|Z_1, Z_2|}{\langle Z_2, Z_1 \rangle} Z_1, Z_2 \rangle = -|\langle Z_1, Z_2 \rangle| \in \mathbb{R}_-$ . Ces conditions assurent que  $Z_1 + Z_2$  est un relevé du milieu du segment géodésique  $[z_1, z_2]$  (cf. [Gol99] p.70). On note  $V = Z_1 + Z_2$ , et  $W = Z_1 - Z_2$  (noter que ces vecteurs forment une base orthogonale du plan engendré par  $Z_1$  et  $Z_2$  dans  $\mathbb{C}^{2,1}$ ). Alors l'application

$$t \in \mathbb{R} \mapsto V + itW$$

paramètre un relevé de l'épine réelle  $\sigma$  du bissecteur  $B(z_1, z_2)$ , voir Figure 3.2.

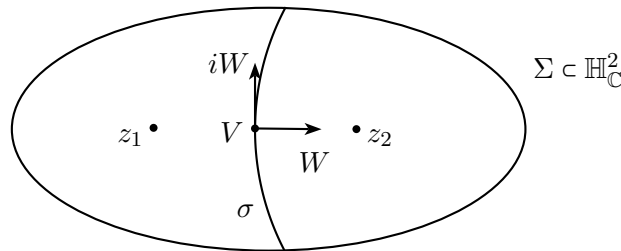


FIGURE 3.2 – L'épine réelle de  $B(z_1, z_2)$  est la géodésique médiatrice entre  $z_1$  et  $z_2$  dans la droite complexe  $\Sigma$ .

Le sous-espace orthogonal à la droite complexe  $\Sigma$  (qui correspond donc, dans  $\mathbb{C}^{2,1}$ , au sous-espace engendré par  $Z_1$  et  $Z_2$ ) est de dimension 1, et il est engendré par le produit vectoriel  $V \boxtimes W$ . D'après le théorème 3.3.1, le bissecteur (étendu dans  $\mathbb{C}^{2,1}$ )  $B(z_1, z_2)$  est paramétré par

$$V + itW + \lambda V \boxtimes W, \quad t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Chaque valeur de  $t$  correspond à une tranche complexe du bissecteur. Noter ce paramétrage ne permet pas d'obtenir la "tranche" projetée sur  $W$ , mais  $W$  est un vecteur positif, donc cette tranche n'intersecte pas  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Un deuxième paramétrage, légèrement différent, peut être obtenu en paramétrant les tranches complexes par leur orthogonal. C'est un paramétrage adapté à l'étude de l'intersection de deux bissecteurs. Remarquons que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\langle V + itW, W + i \frac{\langle W, W \rangle}{\langle V, V \rangle} tV \right\rangle = 0$$

donc (le relevé de) la tranche complexe qui se projette sur le point  $V + itW \in \sigma$  est exactement le sous-espace orthogonal au vecteur  $W + i \frac{\langle W, W \rangle}{\langle V, V \rangle} tV$ . On peut donc paramétrer les tranches complexes du bissecteur étendu  $B(z_1, z_2)$  par

$$(W + itV)^\perp, \quad t \in \mathbb{R}.$$

### 3.3.1.2 Intersection de bissecteurs coéquadistants

Les bissecteurs n'étant pas totalement géodésiques, l'étude de l'intersection de deux (ou plus) bissecteurs est un problème compliqué. C'est l'un des problèmes traités en détail dans [Gol99]. Dans la suite, on s'intéresse seulement aux intersections de deux bissecteurs *coéquadistants*, c'est-à-dire de la forme  $B(z_0, z_1)$  et  $B(z_0, z_2)$ , où  $z_0, z_1, z_2$  sont trois points distincts de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . C'est le seul type d'intersection qui apparaît dans l'étude de domaines de Dirichlet, puisque tous les bissecteurs sont de la forme  $B(o, \cdot)$ , où  $o$  est le centre du domaine.

Le cas le plus simple est le cas où les trois points  $z_0, z_1, z_2$  sont sur une même droite complexe.  $B(z_0, z_1)$  et  $B(z_0, z_2)$  ont alors la même épine complexe : on dit qu'ils sont *cospinaux*. L'intersection entre les deux bissecteurs est alors entièrement déterminée par l'intersection entre les épines réelles :

**Théorème 3.3.2** ([Gol99] p.169). *Soient  $B_1, B_2$  deux bissecteurs cospinaux (supposés différents), d'épine complexe  $\Sigma$ , et d'épine réelle  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  respectivement.*

- *Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  s'intersectent dans  $\Sigma$ , alors l'intersection  $B_1 \cap B_2$  est exactement la tranche complexe correspondant au point d'intersection, et l'angle d'intersection est constant.*
- *Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont parallèles, les tranches de  $B_1$  et celles de  $B_2$  sont ultraparallèles, mais  $B_1 \cap \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  et  $B_2 \cap \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  s'intersectent en un point du bord de l'espace hyperbolique.*
- *Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont ultraparallèles,  $B_1$  et  $B_2$  ne s'intersectent pas dans  $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ .*

On suppose maintenant que  $z_0, z_1, z_2$  ne sont pas sur une même droite complexe. La structure de l'intersection  $B(z_0, z_1) \cap B(z_0, z_2)$  (dans l'espace hyperbolique) est particulièrement simple :

**Théorème 3.3.3** ([Gol99] lemme 9.1.5, théorèmes 9.2.6 et 9.2.7). *Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux bissecteurs coéquadistants. Alors si l'intersection  $B_1 \cap B_2$  est non vide, elle est difféomorphe à un 2-disque ouvert, qui est totalement géodésique si et seulement si  $B_1$  et  $B_2$  sont cospinaux et admettent une tranche en commun.*

Le théorème suivant, du à Giraud, est aussi utile dans l'étude des intersections de bissecteurs coéquadistants :

**Théorème 3.3.4** ([Gir21], [Gol99] théorème 8.3.3). *Soient  $z_0, z_1, z_2$  trois points distincts de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et qui ne sont pas sur une même droite complexe. L'intersection des bissecteurs  $B(z_0, z_1)$  et  $B(z_0, z_2)$ , lorsqu'elle est non vide, est contenue dans exactement un autre bissecteur,  $B(z_1, z_2)$ .*

Dans la suite, on appellera “disque de Giraud” l'intersection entre deux bissecteurs coéquidistants non cospinaux. En utilisant les résultats du paragraphe précédent, on obtient une façon de paramétrer un disque de Giraud. Soient donc  $z_0, z_1, z_2$  trois points vérifiant les hypothèses du théorème 3.3.4. On note  $B_1 = B(z_0, z_1)$  et  $B_2 = B(z_0, z_2)$ . Soient  $Z_0, Z_1, Z_2$  des relevés de  $z_0, z_1, z_2$  qui vérifient  $\langle Z_0, Z_0 \rangle = \langle Z_1, Z_1 \rangle = \langle Z_2, Z_2 \rangle = -1$ , et  $\langle Z_0, Z_1 \rangle, \langle Z_0, Z_2 \rangle \in \mathbb{R}_-$ . On note  $V_j = Z_0 + Z_j, W_j = Z_0 - Z_j$  pour  $j = 1, 2$ . Alors les tranches complexes de  $B_j$  (éventuellement hors de l'espace hyperbolique) sont paramétrées par leurs polaires  $W_j + it_j V_j$ , avec  $t_j \in \mathbb{R}$ .

Un point  $z \in B_1 \cap B_2$  correspond au point d'intersection d'une tranche de  $B_1$ , donnée par un paramètre  $t_1$ , et d'une tranche de  $B_2$ , donnée par un paramètre  $t_2$ . Un relevé  $Z$  de  $z$  est donc orthogonal aux vecteurs  $W_1 + it_1 V_1$  et  $W_2 + it_2 V_2$ . En particulier, on peut prendre

$$Z = (W_1 + it_1 V_1) \boxtimes (W_2 + it_2 V_2).$$

L'intersection  $B_1 \cap B_2$  est alors donnée par les paramètres  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$  pour lesquels la fonction polynomiale (de degré 2 en chaque variable)

$$f_0(t_1, t_2) = \langle (W_1 + it_1 V_1) \boxtimes (W_2 + it_2 V_2), (W_1 + it_1 V_1) \boxtimes (W_2 + it_2 V_2) \rangle$$

est négative.

*Remarque 3.3.5.* Les tranches complexes de  $B_1$  et  $B_2$  qui intersectent le disque de Giraud le font suivant une géodésique, donnée par l'équation  $t_j = \text{constante}$ ,  $j = 1$  ou  $2$ . De même, les tranches complexes du troisième bissecteur (cf. théorème 3.3.4) qui intersectent le disque de Giraud  $B_1 \cap B_2$  le font suivant une géodésique, donnée par une équation du type  $-1 - t_0 t_1 + \alpha(t_0 - t_1) = 0$ , où  $\alpha$  est un paramètre réel, ou par l'équation  $t_1 = t_0$ .

### 3.3.1.3 Sphères spinales

La section 1.1.3 décrit plusieurs modèles pour le plan hyperbolique complexe. Dans ce paragraphe, on se place dans le modèle de Siegel : la forme hermitienne considérée est donnée par

$$\langle Z, Z' \rangle = \overline{Z_0} Z'_0 + \overline{Z_1} Z'_1 + \overline{Z_2} Z'_2$$

et dans la carte  $Z_0 = 1$ , le plan hyperbolique complexe est défini par  $2\text{Re}(Z_2) + |Z_1|^2 < 0$ . Dans ce modèle, le bord à l'infini de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  peut être identifié avec  $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ , où  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  est muni de la structure du groupe de Heisenberg. Il admet alors une métrique, dite métrique de Cygan ([Gol99] p.160).

Le bord d'une droite complexe est un cercle topologique dans  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , appelé  $\mathbb{C}$ -cercle. Si la droite complexe passe par le point à l'infini, alors le  $\mathbb{C}$ -cercle correspondant est une droite verticale. Le bord d'un lagrangien est appelé un  $\mathbb{R}$ -cercle. Le bord à l'infini d'un bissecteur est difféomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$  ([Gol99] corollaire 5.1.3), et est appelé une *sphère spinale*. Les bissecteurs admettent deux feuilletages, par des droites complexes et par des lagrangiens, ce qui donne un feuilletage des sphères spinales par des  $\mathbb{C}$ - (respectivement  $\mathbb{R}$ -) cercles.

L'étude de l'intersection des bissecteurs peut se ramener en partie à l'étude de l'intersection des sphères spinales, voir [Gol99] chapitre 9. Un résultat en particulier nous sera utile dans la suite de cette partie :

**Théorème 3.3.6** ([Gol99] p.277). *Soient  $B_1, B_2$  deux bissecteurs dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $S_1, S_2$  leurs sphères spinales. Alors l'intersection  $B_1 \cap B_2$  admet le même nombre de composantes connexes que  $S_1 \cap S_2$ .*

En particulier, si les sphères spinales sont disjointes, alors les bissecteurs sont disjointes aussi.

Parmi les sphères spinales, certaines sont des sphères métriques pour la métrique de Cygan évoquée plus haut : c'est le cas des sphères spinales verticales, dont l'épine complexe est une droite verticale et qui ne passent pas par le point à l'infini ([Gol99] p.161).

### 3.3.2 Le théorème de Poincaré, version complexe

Dans le plan hyperbolique complexe, il n'existe pas d'hypersurfaces totalement géodésiques, donc il n'y a pas de notion standard de "face" d'un polyèdre. Les bissecteurs définis précédemment ne sont pas totalement géodésiques, mais ils en sont aussi proches que possible : ils admettent un feuilletage par des sous-variétés totalement géodésiques. Tous les polyèdres que nous étudierons dans cette partie seront bordés par des bissecteurs. Ce seront même des bissecteurs coéquidistants, puisque les polyèdres sont construits comme domaines de Dirichlet.

#### 3.3.2.1 Contexte

Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  un polyèdre bordé par des bissecteurs, et muni d'un système d'identifications de faces (voir section 1.3). On suppose dans la suite de cette partie que  $\mathcal{P}$  muni de ces identifications de faces vérifie les conditions de cycles d'arêtes. On note  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$  le groupe engendré par les identifications de faces.

Rappelons les définitions des objets qui interviennent dans la preuve du théorème de Poincaré (on reprend les notations de [EP94]). Soit  $G$  le groupe abstrait engendré par les identifications de faces, modulo les relations de cycles et les relations de paires. Il existe alors un morphisme naturel surjectif  $\varphi : G \rightarrow \Gamma$ . Le groupe  $G$  est muni de la topologie discrète, et on définit l'espace  $Z$  associé par  $Z = G \times \mathcal{P} / \sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par les

$$(g, x) \sim (g \cdot \gamma_F^{-1}, \gamma_F(x))$$

pour tout  $g \in G$ , toute face  $F$  de  $\mathcal{P}$  et tout  $x \in F$  (voir Figure 1.2, section 1.3).  $Z$  est muni de la topologie quotient. L'application développante de  $Z$ , notée  $D_Z$ , est définie par :

$$D_Z : \begin{array}{ccc} Z & \rightarrow & \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \\ [(g, x)] & \mapsto & \varphi(g)(x) \end{array}$$

où  $[(g, x)]$  est la classe de  $(g, x)$  dans  $Z$ , pour tout  $g \in G$  et  $x \in \mathcal{P}$ .

La preuve du théorème de Poincaré se fait alors en deux étapes. La première est de montrer que  $D_Z$  est un homéomorphisme local, et que la structure cellulaire de  $Z$  est localement finie. On peut alors définir une métrique sur  $Z$  pour laquelle  $D_Z$  est une isométrie locale. La deuxième étape est de montrer que c'est en fait une isométrie globale : ceci

revient à montrer que  $Z$  muni de cette métrique est complet. La complétude est garantie si le polyèdre  $\mathcal{P}$  est compact, mais il faut la vérifier lorsque  $\mathcal{P}$  admet des points à l'infini.

L'article de Mostow [Mos80] présente une version du théorème de Poincaré dans le cas complexe, mais il manque dans la preuve l'étude de la complétude de l'espace  $Z$  ([Mos80] théorèmes 6.3.1 et 6.3.2 pp.199-200, l'hypothèse de complétude manque dans l'énoncé du théorème 6.3.2). Dans le contexte hyperbolique complexe, la preuve de la complétude de  $Z$  dans le cas général est difficile, et il n'existe pas pour l'instant de référence détaillée complète. Dans la suite, on détaille donc la complétude de  $Z$  dans le cas particulier qui nous intéresse, décrit au paragraphe suivant. Il s'agit en quelque sorte de la situation contraire à celle décrite au chapitre 2 : les points à l'infini ne sont plus des sommets idéaux (cf. définition 2.2.6), pour chaque point à l'infini il existe un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de copies du polyèdre dans le pavage de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  par  $\mathcal{P}$ .

### 3.3.2.2 Hypothèse sur les points à l'infini

Pour étudier les points à l'infini de  $\mathcal{P}$ , on commence par étudier leurs cycles sous les identifications de faces de  $\mathcal{P}$ . Considérons le graphe orienté défini de la façon suivante :

- les sommets sont les points à l'infini de  $\mathcal{P}$ ,
- pour tout  $p \in \partial_{\infty}\mathcal{P}$ , si  $F$  est une face de  $\mathcal{P}$  contenant  $p$ , on construit une arête orientée de  $p$  à  $\gamma_F(p)$  (où  $\gamma_F$  est l'identification de faces associée à  $F$ ).

Etant donné un point à l'infini  $p \in \partial_{\infty}\mathcal{P}$ , on note  $C_p$  la composante connexe contenant  $p$  de ce graphe.  $C_p$  décrit le cycle de  $p$  sous les identifications de faces de  $\mathcal{P}$ . La figure 3.3 donne un exemple simple de tels graphes.

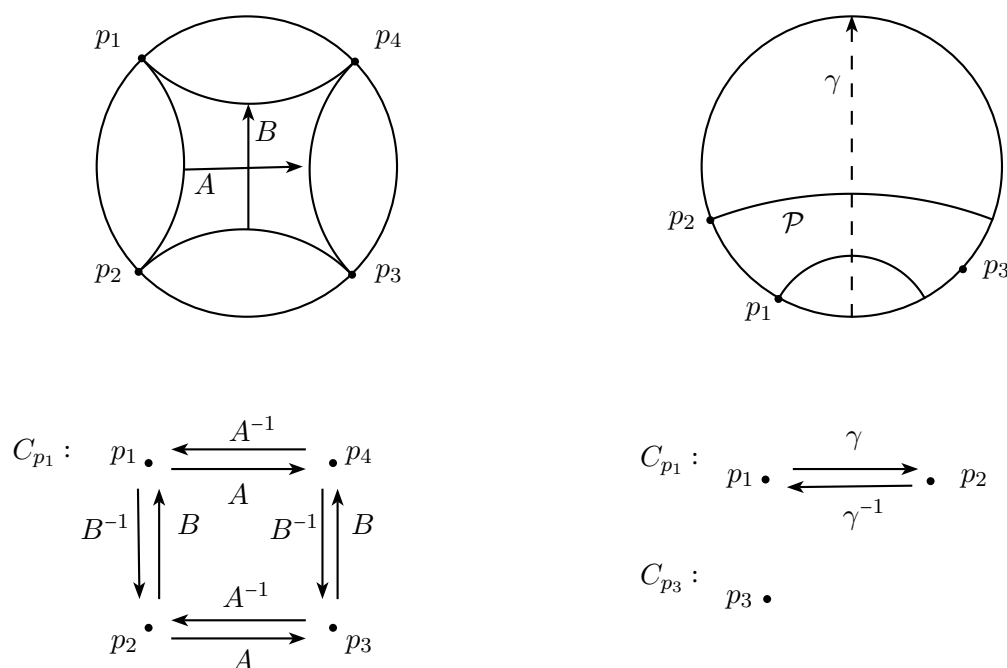


FIGURE 3.3 – Exemples de cycles de sommets à l'infini dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

A partir du graphe  $C_p$ , on construit un sous-espace de  $Z$ , noté  $Z_p$ , qui correspond à l'ensemble des copies de  $\mathcal{P}$  dans  $Z$  incidentes à  $p$ . Soit  $c$  un chemin fini partant de  $p$  dans le graphe orienté  $C_p$ . Si  $c$  traverse (dans l'ordre) les arêtes orientées associées aux

identifications de face  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , on note  $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ . Le sous-espace  $Z_p$  de  $Z$  est défini par

$$(3.1) \quad Z_p = \left( \bigcup_{\substack{\text{chemin } c=(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \\ \text{de } C_p \text{ partant de } p}} \{\gamma_1^{-1} \dots \gamma_k^{-1}\} \times \mathcal{P} \right) / \sim \subset Z$$

$Z_p$  peut être développé dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et on note  $D_p : Z_p \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  l'application développante restreinte. L'image de  $D_p$  est donc obtenue en développant les copies de  $\mathcal{P}$  seulement suivant les faces incidentes au point  $p \in \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Pour les exemples de la Figure 3.3, l'image de la développante restreinte est donnée Figure 3.4.

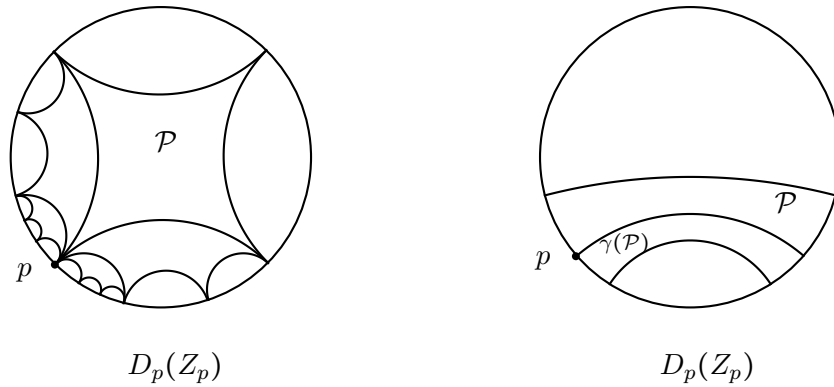


FIGURE 3.4 – Image de la développante restreinte  $D_p(Z_p)$ . À gauche :  $Z_p$  est composé d'une infinité de copies de  $\mathcal{P}$ . À droite :  $Z_p$  est formé de deux copies de  $\mathcal{P}$ .

Les polyèdres étudiés dans la suite de ce chapitre vérifieront la propriété suivante :

*Propriété 3.3.7.* Pour tout point à l'infini  $p \in \partial_{\infty} \mathcal{P}$ , le sous-ensemble  $Z_p$  de  $Z$ , défini par (3.1), est formé d'un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$ .

On veut donc montrer la version suivante du théorème de Poincaré :

**Théorème 3.3.8** (Théorème de Poincaré, version complexe). *Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  un polyèdre bordé par des bissecteurs, et muni d'identifications de faces qui vérifient les conditions de cycles (voir section 1.3) ainsi que la propriété 3.3.7. Soit  $\Gamma$  le sous-groupe de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$  engendré par les identifications de faces. Alors  $\Gamma$  est discret,  $\mathcal{P}$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma$ , une présentation de  $\Gamma$  donnée par les relations de paires et les relations de cycles.*

### 3.3.2.3 Preuve de la complétude de $Z$

On suppose dans toute cette partie que les hypothèses du théorème 3.3.8 sont vérifiées. D'après l'article de Mostow [Mos80], l'application développante  $D_Z : Z \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est un homéomorphisme local, et la structure cellulaire de  $Z$  est localement finie.

Rappelons d'abord la métrique considérée sur  $Z$  :

- la métrique sur une copie  $\{\gamma\} \times \mathcal{P}$  de  $\mathcal{P}$  est la métrique hyperbolique complexe,



- étant donnés deux points  $x$  et  $y$  de  $Z$ , on considère l'ensemble des chemins entre  $x$  et  $y$  qui sont une union finie de sous-chemins  $\mathcal{C}^1$ , chacun inclus dans une copie de  $\mathcal{P}$ . On les appelle *chemins admissibles*. La longueur d'un chemin admissible est la somme des longueurs hyperboliques des sous-chemins. La distance entre  $x$  et  $y$  est alors l'infimum des longueurs des chemins admissibles entre  $x$  et  $y$ .

Notons  $d_Z$  cette métrique. L'application développante  $D_Z : (Z, d_Z) \rightarrow (\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2, d_{hyp})$  décroît alors les distances : l'image d'un chemin admissible par  $D_Z$  est un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  de même longueur, et cette longueur est supérieure à la distance hyperbolique entre ses extrémités.

Cette métrique sur  $Z$  fait de  $D_Z$  une isométrie locale. En effet, supposons que  $D_Z|_U : U \subset Z \rightarrow V \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est un homéomorphisme (où  $U$  et  $V$  sont des ouverts). Le relevé à  $U$  d'un segment géodésique dans  $V$  est un chemin admissible pour  $Z$  (la structure cellulaire de  $Z$  est localement finie, donc le relevé intersecte bien un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$ ), et sa longueur dans  $Z$  est égale à la longueur hyperbolique. Donc  $D_Z|_U$  est une isométrie.

Pour montrer la complétude de  $Z$  sous les hypothèses du théorème 3.3.8, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 3.3.9.** *Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  un polyèdre bordé par des bissecteurs et admettant un système d'identifications de faces qui vérifie les conditions de cycles et la propriété 3.3.7. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $g \in G$ , le  $\varepsilon$ -voisinage de  $\{g\} \times \mathcal{P}$  dans  $Z$  intersecte seulement un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$ .*

Montrons d'abord la complétude de  $Z$  avec le lemme 3.3.9. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $Z$ . D'après le lemme précédent,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  visite seulement un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$  dans  $Z$ . Quitte à extraire une sous-suite et à composer par un élément de  $\Gamma$ , on peut donc supposer que tous les termes  $x_n$  sont dans  $\{id\} \times \mathcal{P}$ . Mais  $\mathcal{P}$  est fermé dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , donc complet, donc toute suite de Cauchy dans  $\mathcal{P}$  converge. Donc par définition de la métrique sur  $Z$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et  $Z$  est complet.

Montrons à présent le lemme 3.3.9.

*Démonstration.*  $G$  agit par isométries sur  $Z$ , donc il suffit de montrer le lemme pour  $\{id\} \times \mathcal{P}$ . La structure cellulaire de  $Z$  est localement finie, donc pour tout point  $[(id, x)] \in \{id\} \times \mathcal{P}$ , il existe  $\varepsilon_x > 0$  tel que la boule (dans  $Z$ ) de rayon  $\varepsilon_x$  autour de  $[(id, x)]$  rencontre seulement un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$ .

$\mathcal{P}$  n'est pas compact en général, donc on ne peut pas en déduire l'existence d'un sous-recouvrement fini. On va montrer cependant que l'hypothèse sur les points à l'infini implique l'existence d'un  $\varepsilon$  uniforme hors d'un compact de  $\mathcal{P}$ , ce qui donne le résultat voulu.

Soit  $p \in \partial_{\infty} \mathcal{P}$  un point à l'infini de  $\mathcal{P}$ . On se place dans le modèle de Siegel, et on suppose que  $p$  est le point à l'infini dans ce modèle. D'après la propriété 3.3.7, l'image de la développante du sous-ensemble  $Z_p$  de  $Z$  est formée seulement d'un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$ .  $\mathcal{P}$  admet un nombre fini de faces, donc il y a seulement un nombre fini de faces non verticales (i.e. non adjacentes à  $p$ ) dans la développante de  $Z_p$ . Les sphères spinales des bissecteurs portant les faces non verticales sont bornées dans  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , donc il existe une sphère spinale qui les contient toutes strictement. Soit  $B_p$  le bissecteur correspondant. D'après le théorème 3.3.6, puisque la sphère spinale de  $B_p$  est disjointe de celles des bissecteurs portant les faces non verticales,  $B_p$  n'intersecte que les faces verticales des

copies de  $\mathcal{P}$ , et sépare  $p$  des faces non verticales, voir Figure 3.5. On note  $B_p^-$  le demi-espace contenant les faces non verticales, et  $B_p^+$  celui contenant  $p$ .

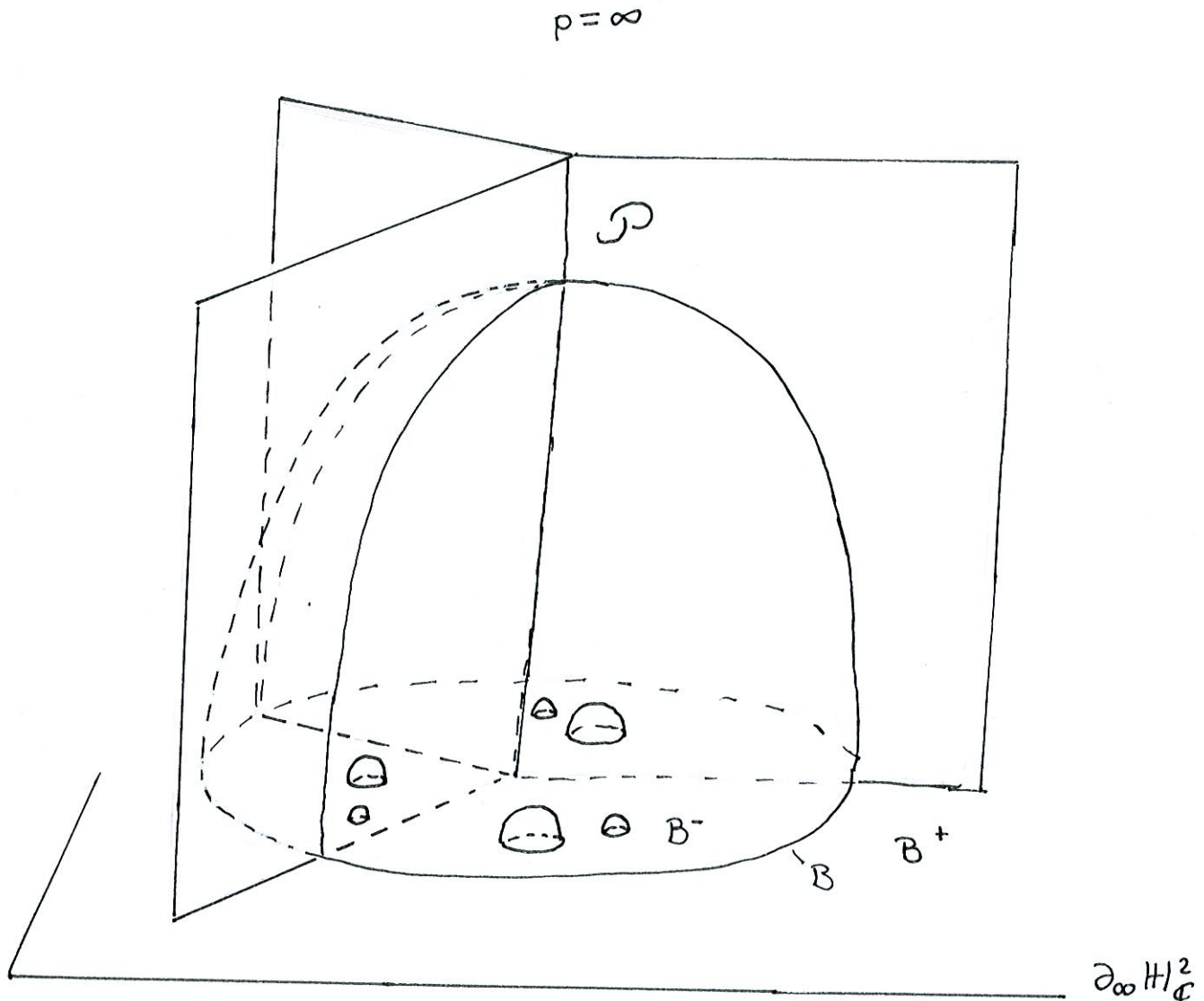


FIGURE 3.5 – Exemple dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  :  $Z_p$  est formé de trois copies de  $\mathcal{P}$ . Dans ce contexte,  $B$  est un hémisphère, qui englobe toutes les faces non verticales.

$B_p$  est à distance strictement positive des faces non verticales, donc il existe  $\varepsilon_p$  tel que le  $\varepsilon_p$ -voisinage de  $\mathcal{P} \cap B_p^+$  est entièrement inclus dans la développante de  $Z_p$ . Montrons alors que dans  $Z$ , le  $\varepsilon_p$ -voisinage de  $\{id\} \times (\mathcal{P} \cap B_p^+)$  est inclus dans  $Z_p$ . Soit  $x$  un point de  $\{id\} \times (\mathcal{P} \cap B_p^+)$ , et  $y \in Z \setminus Z_p$ . Alors tout chemin de  $x$  à  $y$  sort de  $Z_p$  et donc traverse une face qui n'est pas incidente à  $p$  dans  $Z$ . L'image dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  d'un tel chemin traverse  $B$  et l'une des faces non verticales de la développante de  $Z_p$ . Sa longueur hyperbolique est donc supérieure à  $\varepsilon_p$ , et il en est donc de même de sa longueur dans  $Z$ .

Puisque  $Z_p$  est composé d'un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$  par hypothèse, le  $\varepsilon_p$ -voisinage de  $\{id\} \times (\mathcal{P} \cap B_p^+)$  rencontre seulement un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$ .

Notons de plus que  $\partial_\infty \mathcal{P} \subset \partial_\infty \mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  est un compact de  $\partial_\infty \mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ , et que pour tout bissecteur  $B$ ,  $\partial_\infty(\mathcal{P} \cap B^+)$  est un ouvert pour la topologie induite sur  $\partial_\infty \mathcal{P}$  par la topologie du bord de l'espace hyperbolique (voir section 1.1.3). Il existe donc un nombre fini de points à l'infini  $p_1, \dots, p_m$  de  $\mathcal{P}$  tels que  $\partial_\infty \mathcal{P}$  est recouvert par les  $\partial_\infty(\mathcal{P} \cap B_{p_i}^+)$ , en reprenant les notations du paragraphe précédent.

$\mathcal{P}$  privé des demi-espaces  $B_{p_i}^+$  est compact, donc son image dans  $\{id\} \times \mathcal{P}$  est recouverte par un nombre fini de boules  $B(x, \varepsilon_x)$  comme ci-dessus. Soit  $\varepsilon$  le minimum de ces  $\varepsilon_x$  et des  $\varepsilon_{p_i}$  : alors le  $\varepsilon$ -voisinage de  $\{id\} \times \mathcal{P}$  dans  $Z$  intersecte seulement un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$ .  $\square$

### 3.3.2.4 Vérification du reste des hypothèses

**Identifications de faces** Dans le cas général, si le polyèdre est bordé par des hypersurfaces non totalement géodésiques, la vérification des propriétés des identifications de faces peut être laborieuse. Cependant, les polyèdres étudiés dans ce chapitre sont seulement des domaines de Dirichlet, ou domaines de Dirichlet partiels (cf. définition 1.2.13) : ils sont de la forme

$$\mathcal{P} = \bigcap_{\gamma \in S} H_\gamma^-, \text{ avec } H_\gamma^- = \{z \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^n \mid d(z, o) \leq d(z, \gamma(o))\}$$

où  $o$  est le centre du domaine, et  $S$  est un sous-ensemble (stable par l'inverse) d'un groupe d'isométries  $\Gamma$ . Pour tout  $\gamma$ , on a

$$\gamma(H_{\gamma^{-1}}^-) = \{z \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^n \mid d(z, \gamma(o)) \leq d(z, o)\} = H_\gamma^+$$

donc  $\gamma(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P}$  est porté par le bissecteur  $H_\gamma$ , et  $\gamma(\mathring{\mathcal{P}}) \cap \mathring{\mathcal{P}} = \emptyset$ . Pour que les  $\gamma \in S$  forment un système d'identifications de faces, il reste donc à vérifier que chaque  $\gamma$  préserve la structure cellulaire entre les faces de  $\mathcal{P}$  portées par  $H_{\gamma^{-1}}$  et  $H_\gamma$ . Ceci nécessite de déterminer la combinatoire de  $\mathcal{P}$ , voir par exemple section 3.5.

**Pavage autour des arêtes** La vérification du pavage d'un voisinage de chaque arête par les copies du polyèdre est à nouveau facilitée par le fait que les polyèdres considérés sont tous des domaines de Dirichlet : ils sont bordés par des bissecteurs coéquidistants, de la forme  $H_\gamma = B(o, \gamma(o))$  où  $o$  est le centre du domaine. On distingue deux cas, suivant que les bissecteurs bordant l'arête sont cospinaux ou non, donc selon que l'arête est portée par une droite complexe ou par un disque de Giraud (cf. théorème 3.3.4). La référence principale pour ce paragraphe est [DPP15].

Soit  $e = F_{\gamma_1} \cap F_{\gamma_2}$  une arête de  $\mathcal{P}$ , telle que les bissecteurs  $H_{\gamma_1}$  et  $H_{\gamma_2}$  portant les deux faces sont cospinaux :  $o$ ,  $\gamma_1(o)$  et  $\gamma_2(o)$  appartiennent à une même droite complexe. Les bissecteurs  $H_{\gamma_1}$  et  $H_{\gamma_2}$  s'intersectent suivant une droite complexe  $L$  orthogonale à leur épine, et l'angle d'intersection est constant d'après le théorème 3.3.2. Dans tout le chapitre, les arêtes portées par des droites complexes seront de la forme  $e = F_\gamma \cap F_{\gamma^{-1}}$ , et telles que l'identification de faces  $\gamma : F_{\gamma^{-1}} \rightarrow F_\gamma$  est une réflexion complexe par rapport à la droite complexe  $L$  : elle agit comme une rotation d'angle  $\theta$  sur les droites complexes orthogonales à  $L$ , où  $\theta$  est l'angle entre les deux bissecteurs.

La transformation de cycle associée à l'arête  $e$  est alors juste  $\gamma$ . En tout point intérieur  $z$  de  $e$ , on peut considérer la droite complexe  $L_z^\perp$  orthogonale à  $L$  passant par  $z$ . L'intersection de  $L_z^\perp$  avec  $\mathcal{P}$  est un secteur angulaire bordé par des géodésiques, d'angle  $\theta$ . Les copies de ce secteur par  $\gamma$  pavent un voisinage de  $z$  dans  $L_z^\perp$  si et seulement si  $\theta = 2\pi/k$ ,  $k \leq 1$ .

En appliquant le raisonnement à tous les points  $z \in \mathring{e}$ , on obtient la propriété suivante : si la réflexion complexe  $\gamma : F_{\gamma^{-1}} \rightarrow F_\gamma$  par rapport à la droite complexe  $L$  est d'ordre  $k$ , et agit sur l'orthogonal de  $L$  comme une rotation d'angle  $2\pi/k$ , alors les polyèdres  $\mathcal{P}, \gamma(\mathcal{P}), \dots, \gamma^{k-1}(\mathcal{P})$  pavent un voisinage de l'arête  $e = F_\gamma \cap F_{\gamma^{-1}}$ .

Supposons maintenant que  $e = F_{\gamma_1} \cap F_{\gamma_2}$  est portée par un disque de Giraud : il existe alors un unique bissecteur contenant l'intersection  $H_{\gamma_1} \cap H_{\gamma_2}$ . C'est le bissecteur  $B(\gamma_1(o), \gamma_2(o))$ . Les trois points  $o, \gamma_1(o)$  et  $\gamma_2(o)$  permettent de définir trois régions, bordées par ces bissecteurs et dont l'intersection est exactement le disque de Giraud : en reprenant les notations de [DPP15], on note  $Y_0$  l'ensemble des points  $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  plus près de  $o$  que de  $\gamma_1(o)$  et  $\gamma_2(o)$  :  $Y_0 = \{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \mid d(z, o) \leq d(z, \gamma_1(o)) \text{ et } d(z, o) \leq d(z, \gamma_2(o))\}$ . De même,  $Y_1$  (respectivement  $Y_2$ ) est l'ensemble des points plus proches de  $\gamma_1(o)$  (respectivement  $\gamma_2(o)$ ). Ces trois régions sont d'intérieur disjoint. On a alors la proposition suivante ([DPP15], Lemme 3.3) :

**Proposition 3.3.10.** *Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre bordé par des bissecteurs cospinaux, et  $e = F_1 \cap F_2$  une arête telle que l'intersection des bissecteurs portant  $F_1$  et  $F_2$  est un disque de Giraud. Soient  $Y_0, Y_1$  et  $Y_2$  les trois régions associées à ce disque de Giraud. Si chacune contient exactement un des polyèdres  $\mathcal{P}, \gamma_{F_1}^{-1}(\mathcal{P})$  et  $\gamma_{F_2}^{-1}(\mathcal{P})$ , où  $\gamma_{F_i}$  est l'identification de face associée à  $F_i$ , et si  $\gamma_{F_1}^{-1}(\mathcal{P}) \cap \gamma_{F_2}^{-1}(\mathcal{P})$  est contenu dans le troisième bissecteur du disque de Giraud, alors  $\mathcal{P}, \gamma_{F_1}^{-1}(\mathcal{P})$  et  $\gamma_{F_2}^{-1}(\mathcal{P})$  pavent un voisinage de  $e$ .*

**Points à l'infini** Pour chaque point à l'infini  $p \in \partial_\infty \mathcal{P}$ ,  $C_p$  est le graphe représentant le cycle de  $p$  sous les identifications de faces : c'est la composante connexe contenant  $p$  du graphe dont les sommets sont les points à l'infini de  $\mathcal{P}$ , et dont les arêtes représentent les identifications de faces entre ces points. Dans la suite du chapitre, les exemples étudiés seront tels que  $C_p$  admet seulement un nombre fini de sommets et peut être exploré à la main.

Le but est de vérifier la propriété 3.3.7, c'est-à-dire que le sous-espace  $Z_p$  de  $Z$  (voir (3.1)) est formé seulement d'un nombre fini de copies de  $\mathcal{P}$ . Etant donnée la définition de  $Z_p$ , la propriété 3.3.7 est clairement vérifiée si le groupe engendré par les identifications de faces apparaissant dans le graphe  $C_p$  est fini. Ce sera le cas dans tous les exemples étudiés par la suite.

### 3.4 Construction d'une représentation de $\Gamma_{pq}$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$

Le but de ce chapitre est de construire un sous-groupe discret de  $PU(2, 1)$  dont l'ensemble limite est homéomorphe à l'éponge de Menger. On adapte pour cela la construction de [Bou97b], en construisant une représentation fidèle, discrète et convexe cocompacte du groupe hyperbolique  $\Gamma_{pq}$  défini section 3.2. Considérons un lagrangien de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  : c'est une copie isométrique du modèle de Beltrami-Klein de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , de courbure  $-1/4$ . Soit  $P$  un  $p$ -gone régulier à angles droits porté par ce lagrangien. Chaque côté de  $P$  définit une unique droite complexe. On étudie alors le groupe  $\Gamma \subset PU(2, 1)$  engendré par les réflexions complexes d'ordre  $q$  par rapport aux droites complexes portant les côtés de  $P$ . Puisque  $P$  est à angles droits, c'est bien une représentation de  $\Gamma_{pq}$ .

La première étape de l'étude de  $\Gamma$  est la construction d'un domaine fondamental, sur lequel on puisse lire les propriétés de la représentation. Ce domaine fondamental sera un domaine de Dirichlet, et on présente dans la suite un domaine de Dirichlet partiel, candidat pour être un domaine fondamental pour  $\Gamma$ .

L'objectif de cette section est de construire explicitement les objets étudiés : polygone  $P$ , générateurs du groupe  $\Gamma$ , et domaine de Dirichlet partiel. Une section à part sera consacrée à l'étude de la combinatoire de ce polyèdre, nécessaire pour appliquer le théorème de Poincaré.

La construction du groupe  $\Gamma$  peut être faite pour tout couple  $(p, q)$ , avec  $p \geq 5$  et  $q \geq 3$ . Pour l'étude du domaine de Dirichlet, en revanche, nous n'avons pas trouvé de méthode générale géométrique permettant de traiter tous les cas. Les calculs seront donc faits pour le cas  $p = 6$  et  $q = 3$ , pour lequel la combinatoire du domaine de Dirichlet est la plus simple. L'étude effectuée dans la suite est sûrement adaptable à d'autres valeurs de  $p$  et  $q$ , mais nous ne l'avons pas mise en pratique.

#### 3.4.1 Construction du groupe

Pour étudier facilement les réflexions dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$  et utiliser l'algèbre linéaire, on se place dans le modèle projectif :  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est l'ensemble des droites négatives de  $\mathbb{C}^3$  pour la forme lorentzienne  $\langle z, z \rangle = -|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2$ . On utilisera aussi le modèle de la boule ( $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est alors la boule unité  $B$  dans le plan  $\{z_0 = 1\}$ ). Les isométries de l'espace hyperbolique sont représentées par des matrices unitaires pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Les sous-espaces totalement géodésiques complexes de codimension  $k$  sont donnés par le projectivisé (ou par l'intersection avec la boule) de sous-espaces linéaires de codimension complexe  $k$  dans  $\mathbb{C}^3$ .

Pour simplifier les calculs, on suppose que le polygone  $P$  est porté par le lagrangien  $\mathbb{R}^3 \cap B$ , et qu'il est centré en l'origine  $o = (1, 0, 0)$ . Pour déterminer les coordonnées des sommets de  $P$ , il suffit de travailler dans le modèle de Beltrami-Klein (ou modèle projectif) du plan hyperbolique réel de courbure  $-1/4$ . Le  $p$ -gone régulier  $P$  est centré à l'origine, où les angles euclidiens et hyperboliques coïncident, donc les sommets  $x_j$  de  $P$ ,  $0 \leq j \leq p-1$ , auront pour coordonnées  $s \left( \cos\left(\frac{2j\pi}{p}\right), \sin\left(\frac{2j\pi}{p}\right) \right)$ , où  $s$  est la distance euclidienne de  $o$  à  $x_j$ .

$P$  doit être un  $p$ -gone régulier à angles droits. Il peut être décomposé comme  $p$  triangles d'angles  $\left(\frac{2\pi}{p}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ . Pour déterminer la distance hyperbolique de  $o$  à  $x_j$ , on applique la loi

des cosinus dans un espace de courbure constante  $-1/4$  (cf. [Gol99] p.85), et on trouve

$$d(o, x_j) = 2 \operatorname{arcosh} \left( \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)} \right)$$

où  $d$  est la distance hyperbolique dans le modèle de Beltrami-Klein de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

Pour déterminer finalement les coordonnées des sommets  $x_j$  de  $P$  dans la boule  $B$ , il suffit de calculer la distance euclidienne correspondante, donnée par  $s = \tanh(d(o, x_j)/2)$  (cf. [Gol99] p.78). Après simplification de l'expression, on trouve les coordonnées suivantes :

$$x_j = \begin{pmatrix} 1 \\ s \cos\left(\frac{2j\pi}{p}\right) \\ s \sin\left(\frac{2j\pi}{p}\right) \end{pmatrix}, \text{ où } s = \frac{\sqrt{2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)}}{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)}$$

Pour tout  $0 \leq j \leq p-1$ , l'arête  $a_j = (x_j x_{j+1})$  de  $P$  détermine une unique droite complexe, notée  $C_j$ . Le produit vectoriel lorentzien  $e_j = x_j \boxtimes x_{j+1}$  (voir section 3.3.1) est un vecteur polaire pour  $C_j$ . Pour le cas  $j = 0$ , par exemple, on trouve après simplification :

$$e_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)} \\ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$$

On peut alors déterminer la matrice de la réflexion  $\gamma_0$  d'ordre  $q$  par rapport à la droite complexe  $C_0$ . Dans la base  $(x_0, x_1, e_0)$  de  $\mathbb{C}^3$ ,  $\gamma_0$  est simplement donnée par la matrice diagonale

$$\operatorname{diag} \left( 1, 1, \exp\left(\frac{2i\pi}{q}\right) \right).$$

Il suffit alors d'appliquer le changement de base pour trouver la matrice de  $\gamma_0$  dans la base canonique usuelle. D'autre part, le  $p$ -gone  $P$  est régulier, donc invariant par la rotation

$$R_p = \operatorname{diag} \left( 1, \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{p}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) \end{pmatrix} \right).$$

Pour tout  $0 \leq j \leq p-1$ , la réflexion  $\gamma_j$  d'ordre  $q$  par rapport à la droite complexe  $C_j$  est donc donnée par

$$(3.2) \quad \gamma_j = R_p^j \cdot \gamma_0 \cdot R_p^{-j}$$

Dans toute la suite, on se limite au cas  $p = 6$  et  $q = 3$ . On obtient alors

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{6}}{4} + i \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3\sqrt{6}}{4} - i \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{5}{4} + i \frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} - i \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i & \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad R_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Les autres réflexions  $\gamma_j$  sont obtenues grâce à la relation (3.2). On note  $\Gamma$  le groupe engendré par  $\gamma_0, \dots, \gamma_5$ .

### 3.4.2 Domaine de Dirichlet partiel

Pour montrer que le groupe  $\Gamma$  est discret et admet la présentation voulue, on cherche un domaine fondamental pour  $\Gamma$ . On choisit d'étudier un domaine de Dirichlet. Les symétries du problème incitent à choisir l'origine  $o = (1, 0, 0)$  comme centre pour le domaine de Dirichlet, pour maximiser les symétries du polyèdre obtenu. On cherche donc à étudier

$$D_\Gamma(o) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}} H_\gamma^-, \text{ ou } H_\gamma^- = \{z \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^2 \mid d(z, o) \leq d(z, \gamma(o))\}$$

Une des difficultés de l'étude du domaine de Dirichlet  $D_\Gamma(o)$  est due au nombre infini de demi-espaces qui interviennent dans la définition du domaine. Dans certains cas, cependant, le domaine est en fait bordé seulement par un nombre fini de bissecteurs  $H_\gamma$ .

La procédure de Riley, décrite au paragraphe 2.5.4.1, part d'un domaine de Dirichlet partiel et ajoute des faces au fur et à mesure pour augmenter le nombre de faces du polyèdre admettant des identifications. Si le groupe est discret, le processus devrait finir par donner un domaine fondamental pour le groupe. Un programme de Deraux, similaire à celui décrit dans [Der05], permet de tester cette procédure pour le groupe  $\Gamma$  étudié. La procédure s'arrête après un nombre fini d'étapes, et fournit le domaine de Dirichlet partiel

$$D = \bigcap_{\gamma \in S} H_\gamma^-$$

où  $S$  est le sous-ensemble de  $\Gamma$  donné par

$$S = \{\gamma_j, \gamma_j^{-1}, \gamma_j \cdot \gamma_{j+1}^{-1}, \gamma_{j+1} \cdot \gamma_j^{-1} \mid j \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\}$$

$D$  est donc un domaine fondamental *potentiel* pour  $\Gamma$  : au moins numériquement, les isométries  $\gamma \in S$ ,  $\gamma : H_{\gamma^{-1}} \rightarrow H_\gamma$ , forment un système d'identifications de faces pour  $D$ . Il faut donc étudier de façon rigoureuse la combinatoire de  $D$  pour pouvoir tester l'existence d'identifications de faces et le reste des hypothèses du théorème de Poincaré. La conclusion du théorème donnera alors la discrétude de  $\Gamma$ , et une présentation et un domaine fondamental pour  $\Gamma$ .

Il y a trois types de vérifications à effectuer pour tester les hypothèses de Poincaré :

- pour tout  $\gamma \in S$ ,  $H_\gamma \cap D$  est une face de codimension 1 de  $D$ . De plus, l'isométrie associée  $\gamma^{-1}$  l'envoie exactement sur la face  $H_{\gamma^{-1}} \cap D$  en préservant la structure de complexe cellulaire.
- les conditions de cycles d'arêtes sont vérifiées (voir section 3.3.2.4).
- les points à l'infini vérifient la propriété 3.3.7.

Pour toutes ces vérifications, il faut commencer par certifier la combinatoire des arêtes de  $D$ . Pour chaque paire de bissecteurs  $H_\gamma, H_{\gamma'}$ , on étudie si les deux s'intersectent dans l'espace hyperbolique, et si oui, quelle est la combinatoire de  $H_\gamma \cap H_{\gamma'} \cap D$ . Une fois connues les facettes de codimension 2, on peut en déduire la structure cellulaire des faces de  $D$ . L'étude de la combinatoire de  $D$  est effectuée section 3.5.

### 3.4.3 Notations pour la suite

On introduit quelques notations pour l'étude de la combinatoire du polyèdre  $D$ . Considérons la carte affine  $\{Z_0 = 1\} \simeq \mathbb{C}^2$  de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^{2,1}$  : pour tout  $z \in \mathbb{C}^2$ , on note  $\tilde{z} = (1, z)$  le relevé correspondant. Pour tout  $z \in \mathbb{C}^2$ , notons

$$f_0(z) = \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle$$

Un point  $z \in \mathbb{C}^2$  est dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  si et seulement si  $f_0(z) < 0$ , et au bord de l'espace hyperbolique si et seulement si  $f_0(z) = 0$ . En pratique,  $f_0(z) \leq 0$  sera l'une des conditions qui définissent le polytope  $D$  dans ce modèle.

Les autres conditions sont données par  $d(z, o) \leq d(\gamma(o), z)$ , pour tout  $\gamma \in S$  et tout  $z \in \mathbb{C}^2$ . Notons alors

$$f_{\gamma}(z) = |\langle \tilde{z}, o \rangle|^2 - |\langle \tilde{z}, \gamma(o) \rangle|^2$$

Comme vu section 3.3.1.1, puisque  $o$  et  $\gamma(o)$  sont de même norme,  $z \in \mathbb{C}^2$  est sur le bissecteur étendu  $H_{\gamma}$  (respectivement dans le demi-espace  $H_{\gamma}^-$ ) si et seulement si  $f_{\gamma}(z) = 0$  (resp.  $f_{\gamma}(z) \leq 0$ ). Le polytope  $D$  est donc défini par l'ensemble des inégalités

$$f_s(z) \leq 0, \quad \forall s \in S' = S \cup \{0\}$$

Les facettes de  $D$  sont (des composantes) des sous-ensembles de  $D$  de la forme

$$\begin{cases} f_i(z) = 0 & \forall i \in I \\ f_s(z) \leq 0 & \forall s \in S' \setminus I \end{cases} \quad \text{où } I \text{ est un sous-ensemble de } S$$

Pour tous sous-ensembles disjoints  $I, J \subset S'$ , on note  $F_{I,J}$  l'ensemble

$$F_{I,J} = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid f_i(z) = 0 \quad \forall i \in I \text{ et } f_j(z) \leq 0 \quad \forall j \in J\}$$

En particulier, les faces de codimension 1 de  $D$  peuvent être décrites comme les sous-ensembles de la forme  $F_{\{\gamma\}, S' \setminus \{\gamma\}}$  (notés aussi  $F_{\gamma}$  dans la suite pour plus de lisibilité), et de même les facettes de dimension inférieure sont les  $F_{I, S' \setminus I}$  avec  $I \subset S$ . Les relations d'adjacence entre les facettes sont faciles à lire : si  $I, J \subset S'$  sont disjoints, et  $K \subset J$ , alors  $F_{I \cup K, J \setminus K}$  est une facette incidente à  $F_{I,J}$ .



### 3.5 Certification de la combinatoire de $D$

L'objectif de cette partie est de certifier la combinatoire du domaine

$$D = \bigcap_{\gamma \in S} H_{\gamma}^{-}, \quad \text{où } S = \{\gamma_j, \gamma_j^{-1}, \gamma_j \cdot \gamma_{j+1}^{-1}, \gamma_{j+1} \cdot \gamma_j^{-1} \mid j \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\}$$

Toute l'étude se fait à partir des intersections de paires de bissecteurs. Soit  $I = \{g_1, g_2\}$  un sous-ensemble de  $S$  à deux éléments, tel que les bissecteurs associés  $H_{g_1}$  et  $H_{g_2}$  ne soient pas cospinaux. Dans notre contexte, c'est le cas si et seulement si  $I$  n'est pas de la forme  $\{\gamma_j, \gamma_j^{-1}\}$ . Alors, en reprenant les notations de la section 3.3.1.2, l'intersection entre les deux bissecteurs étendus est paramétrée par

$$(3.3) \quad Z = (W_1 + i t_1 V_1) \boxtimes (W_2 + i t_2 V_2), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

où  $V_j$  et  $W_j$  sont obtenus à partir de relevés particuliers de  $o$  et  $g_j(o)$ . Si cette intersection est non vide, c'est un disque de Giraud (voir théorème 3.3.3). On peut alors étudier la facette  $F_{I, S' \setminus I}$  de  $D$ , définie par les inégalités  $f_s(Z) \leq 0$  pour tout  $s \in S' \setminus I$ , dans les coordonnées  $t_1$  et  $t_2$ . (On rappelle que  $S' = S \cup \{0\}$ .)

Noter que le vecteur  $Z \in \mathbb{C}^{2,1}$  ainsi construit n'est pas forcément dans la carte affine  $\{Z_0 = 1\}$ . Ce n'est pas un problème pour la suite des calculs, puisque le signe des fonctions  $f_0$  ou  $f_{\gamma}$  (vues comme fonctions sur  $\mathbb{C}^{2,1}$ ) est invariant par multiplication de  $Z$  par un scalaire.

Lorsque  $I = \{\gamma_j, \gamma_j^{-1}\}$ , l'intersection des bissecteurs correspondants est la droite complexe engendrée par l'arête  $[x_j, x_{j+1}]$  du polygone  $P$ . Elle est orthogonale à l'épine complexe des bissecteurs  $H_{\gamma_j}$  et  $H_{\gamma_j^{-1}}$  (i.e. la droite complexe engendrée par les points  $o$  et  $\gamma_j(o)$ ), et on peut la paramétrer par

$$Z = p + (t_1 + i t_2) o \boxtimes \gamma_j(o), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

où  $p$  est le point d'intersection des deux droites complexes. La facette  $F_{I, S' \setminus I}$  de  $D$  est donc de même définie par les inégalités  $f_s(Z) \leq 0$  pour tout  $s \in S' \setminus I$ .

Les arêtes portées par une droite complexe sont plus faciles à étudier que celles portées par un disque de Giraud, d'après le résultat de Mostow suivant (voir [Gol99], théorème 7.3.9) : l'intersection d'une droite complexe étendue (i.e. une copie de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ) avec un bissecteur étendu est un cercle. Une arête portée par une droite complexe est donc obtenue comme intersection de compléments de cercles, et ne pose pas de problèmes de certification. Dans la suite, on considèrera donc seulement des arêtes portées par des disques de Giraud.

*Remarque 3.5.1.* Pour alléger les notations, les bissecteurs  $H_{\gamma_j}$ ,  $H_{\gamma_j^{-1}}$ ,  $H_{\gamma_j \cdot \gamma_{j+1}^{-1}}$  et  $H_{\gamma_{j+1} \cdot \gamma_j^{-1}}$  seront notés respectivement  $H_j$ ,  $H_{j-1}$ ,  $H_{j, j+1-1}$  et  $H_{j+1, j-1}$  dans la suite de cette partie.

#### 3.5.1 Restriction du nombre de facettes à étudier

Le centre du domaine de Dirichlet  $D$  a été choisi pour que  $D$  soit le plus symétrique possible. Ces symétries qui préservent  $D$  simplifient grandement l'étude de la combinatoire du polyèdre. Une partie des symétries de  $D$  provient des symétries de l'hexagone  $P$  à partir duquel on a défini les isométries  $\gamma_j$ .

La rotation  $R_6$ , définie section 3.4.1, agit comme une rotation d'angle  $\pi/3$  sur  $P$  et vérifie  $\gamma_j = (R_6)^j \cdot \gamma_0 \cdot (R_6)^{-j}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Elle préserve le polyèdre  $D$ , et pour tout

$j \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $H_j$  (resp.  $H_{j-1}$ ,  $H_{j,j+1-1}$ ,  $H_{j+1,j-1}$ ) est l'image par  $R_6^j$  de  $H_0$  (resp.  $H_{0-1}$ ,  $H_{0,1-1}$ ,  $H_{1,0-1}$ ).

Notons  $\sigma_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , la réflexion (d'ordre 2) qui préserve  $P$  et dont l'axe passe par le milieu de l'arête  $[x_j, x_{j+1}]$  de  $P$  (cf. Figure 3.6) : alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $\sigma_j \gamma_{j+k} \sigma_j = \gamma_{j-k}$ . En particulier,  $\sigma_j$  échange les bissecteurs  $H_{j-k}$  et  $H_{j+k}$  (et de même pour les autres types de bissecteurs).

De même, soit  $\tau_j$  est la réflexion d'ordre 2 qui préserve  $P$  et dont l'axe passe par les sommets  $x_j$  et  $x_{3+j}$  (les indices sont pris modulo 6). Alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $\sigma_j \gamma_{j+k} \sigma_j = \gamma_{j-1-k}$ , et  $\sigma_j$  échange les bissecteurs  $H_{j+k}$  et  $H_{j-1-k}$  (et de même pour les autres).

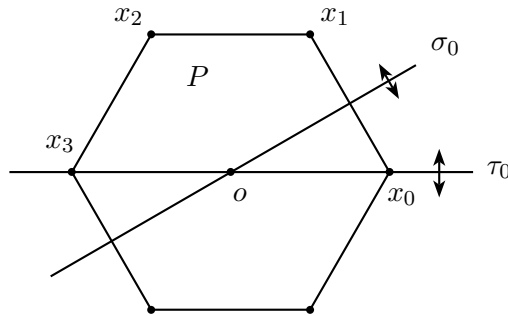


FIGURE 3.6 – Symétries du polygone  $P$ .

Enfin,  $D$  est aussi préservé par conjugaison complexe : en effet,  $o$  est un vecteur réel, et pour tout  $j$ ,  $\gamma_j^{-1} = \overline{\gamma_j}$ . Donc pour tout  $\gamma \in S$ , le bissecteur  $H_\gamma$  est l'image de  $H_{\gamma^{-1}}$  par conjugaison complexe.

Ainsi, il n'y a à isométrie près que deux types de faces dans  $D$  : celui de la face portée par le bissecteur  $H_0$ , et celui de la face portée par  $H_{0,1-1}$ . Il suffit donc d'étudier ces deux faces pour déterminer la combinatoire de  $D$ . Le reste se déduira par symétrie.

### 3.5.2 Bissecteurs ne s'intersectant pas dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Pour simplifier les calculs dans la suite, on commence par montrer que certains bissecteurs ne s'intersectent pas dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . On rappelle que l'intersection de deux bissecteurs cospinaux est paramétrée par  $Z$  comme dans (3.3). Pour montrer que l'intersection n'a pas lieu dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , il suffit de voir que pour tous paramètres  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ , la norme de  $Z$  est positive.  $f_0(Z) = \langle Z, Z \rangle$  est un polynôme  $T(t_1, t_2)$  de degré 2 en chacune des variables  $t_1$  et  $t_2$ . Pour prouver qu'il est toujours strictement positif, il suffit de montrer :

- pour toute valeur de  $t_1$ ,  $T(t_1, t_2)$  vu comme polynôme en  $t_2$  n'a pas de racines (donc ne change pas de signe) : il faut vérifier que son discriminant, un polynôme de degré 4 en  $t_1$ , est strictement négatif.
- le polynôme  $T(t_1, 0)$ , de degré 2 en la variable  $t_1$ , est strictement positif.

On applique cette méthode aux deux bissecteurs  $H_0$  et  $H_{0,1-1}$  (le cas des autres bissecteurs est obtenu par symétrie, d'après le paragraphe précédent). On trouve les intersections suivantes :

	intersecte dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$
$H_0$	$H_{0^{-1}}, H_1, H_{1^{-1}}, H_5, H_{5^{-1}}, H_{0,1^{-1}}, H_{1,0^{-1}}, H_{0,5^{-1}}, H_{5,0^{-1}}$
$H_{0,1^{-1}}$	$H_0, H_{0^{-1}}, H_1, H_{1^{-1}}, H_{1,0^{-1}}, H_{2,1^{-1}}$ et $H_{0,5^{-1}}$

### 3.5.3 Intersections dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ - Méthode générale

Lorsque les deux bissecteurs de  $I$  s'intersectent dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , on veut étudier la combinatoire de la facette  $F_{I,S' \setminus I}$ . Noter qu'en pratique, il n'est pas nécessaire de considérer tout  $S' \setminus I$ , puisque l'on sait déjà que certains bissecteurs ne s'intersectent pas dans l'espace hyperbolique.

La méthode pour déterminer la combinatoire de  $F_{I,S' \setminus I}$  est de partir du disque de Giraud  $F_{I,\{0\}}$ , et d'ajouter une par une les conditions supplémentaires  $f_s(Z) \leq 0$ ,  $s \in S$ . A chaque étape, on détermine les arcs délimitant le domaine  $F_{I,\{0\} \cup J}$  (y compris ceux correspondant au bord hyperbolique), et les sommets du domaine.

Supposons que l'on ait déterminé la combinatoire de  $F_{I,\{0\} \cup J}$ , où  $J$  est un sous-ensemble de cardinal  $k$  de  $S$ . Soit  $s \in S \setminus J$  : on cherche la combinatoire de  $F_{I,J \cup \{0,s\}}$ . On va donc déterminer :

- la liste des sommets de  $F_{I,J \cup \{0,s\}}$  : les sommets de  $F_{I,\{0\} \cup J}$  qui ne vérifient pas la condition  $f_s(Z) \leq 0$  sont éliminés de la liste, et les points d'intersection de la courbe  $f_s(Z) = 0$  avec les arcs de  $F_{I,\{0\} \cup J}$  sont ajoutés, ainsi que les points doubles de la courbe s'il en existe dans  $F_{I,\{0\} \cup J}$ .
- la liste des arcs de  $F_{I,J \cup \{0,s\}}$  : les arcs déjà existants sont modifiés ou supprimés en accord avec la nouvelle liste de sommets, et les arcs provenant de la courbe  $f_s(Z) = 0$  sont ajoutés.
- pour que la liste des arcs donnée précédemment soit complète, il faut s'assurer que la courbe  $f_s(Z) = 0$  n'a pas de composante connexe entièrement comprise dans  $F_{I,\{0\} \cup J}$ . Pour les détecter, on utilise les points critiques : si une telle composante existait, alors  $f_s$  aurait un point critique dans  $F_{I,\{0\} \cup J}$ . Une étude supplémentaire serait alors nécessaire pour déterminer si  $f_s(Z) = 0$  admet effectivement une composante connexe supplémentaire. Ce cas de figure n'apparaît pas dans notre étude.

En théorie, l'ordre dans lequel on ajoute les conditions ne joue aucun rôle. En pratique, on peut cependant simplifier les calculs en choisissant les étapes de manière adéquate.

Pour que toutes ces étapes soient effectuées de façon certifiée, il faut d'abord pouvoir définir les isométries et les fonctions  $f_s$  de façon exacte, en travaillant dans un corps de nombres. D'autre part, pour décrire les intersections des différentes courbes, et rechercher les points critiques, il faut une méthode pour décrire effectivement les solutions d'un système polynomial, et évaluer un polynôme en l'une de ces solutions pour en déterminer le signe.

Dans notre cas, toutes les données du problème sont exprimables dans un corps de nombre qui dépend des paramètres  $p$  et  $q$ . Pour  $p = 6$  et  $q = 3$ , tous les calculs se font dans le corps de nombre  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$ . L'arithmétique d'intervalles permet de déterminer exactement le nombre de racines réelles d'un polynôme univarié, ainsi que leur localisation dans des intervalles de longueur arbitrairement petite. Elle permet aussi d'évaluer le signe d'un polynôme en une valeur (donnée éventuellement sous forme d'un intervalle).

Il reste à pouvoir déterminer les solutions réelles d'un système de polynôme à plusieurs

variables, lorsqu'il n'est pas possible de se ramener à un problème plus simple. La méthode de la représentation rationnelle univariée, développée par F. Rouillier, permet de résoudre ce dernier problème.

**Représentation Univariée Rationnelle** Soit  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_m]$  un système polynomial rationnel à  $m$  variables, dont on cherche les solutions. Si  $\mathcal{F}$  est zéro-dimensionnel, alors il existe un algorithme, nommé "représentation univariée rationnelle" (ou RUR), qui permet d'exprimer les solutions de  $\mathcal{F}$  comme fonctions rationnelles des racines d'un polynôme à une seule variable. Cet algorithme a été développé par F. Rouillier dans [Rou98]. L'algorithme fournit des polynômes rationnels univariés  $h, g_0, g_1, \dots, g_m \in \mathbb{Q}[T]$  tels que les solutions de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{C}$  sont exactement les éléments

$$\left( \frac{g_1(t)}{g_0(t)}, \dots, \frac{g_m(t)}{g_0(t)} \right) \in \mathbb{C}^n \text{ avec } t \in \mathbb{C} \text{ tel que } h(t) = 0$$

De plus, la représentation préserve le caractère réel des solutions, et la multiplicité. En particulier : les racines réelles de  $h$  donnent exactement les solutions réelles de  $\mathcal{F}$ .

Pour déterminer les points d'intersection de deux de nos courbes  $f_s(Z) = 0$ , on cherche les solutions réelles du système polynomial correspondant. Les polynômes en  $t_1$  et  $t_2$  donnés par les  $f_s$  n'ont pas de raison d'être rationnels, mais ils appartiennent à une extension de  $\mathbb{Q}$  ( $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$  pour le cas  $p = 6, q = 3$ ). Pour se ramener à un système polynomial rationnel, on transforme les générateurs de l'extension en variables, et on ajoute au système leur polynôme minimal. Dans le cas de  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$ , les racines  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{7}$  sont remplacées par les variables  $s_3$  et  $s_7$ , et les polynômes  $s_3^2 - 3$  et  $s_7^2 - 7$  sont ajoutés au système étudié. Cette manipulation permet d'appliquer la RUR. Il faut cependant faire attention une fois les solutions réelles du système obtenues : seules les solutions donnant les racines initiales des polynômes minimaux ajoutés (par exemple  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{7}$  dans notre cas) correspondent à des points d'intersection des courbes.

Il faut ensuite vérifier que le système polynomial rationnel obtenu est zéro-dimensionnel. Il existe des algorithmes, utilisant les bases de Groebner, qui effectuent cette vérification. En pratique, on utilise le logiciel Giac/Xcas [Par15] pour appliquer la représentation rationnelle univariée à nos systèmes d'intersection de courbes. La vérification de la dimension du système est effectuée automatiquement dans l'implémentation de la RUR dans Xcas.

### 3.5.4 Exemple de certification : facette de codimension 2

On décrit en détail l'étude de l'intersection des faces  $F_{\gamma_0}$  et  $F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}$ . Seules cinq bissecteurs bordant  $D$  intersectent les bissecteurs  $H_0$  et  $H_{0,1^{-1}}$  dans l'espace hyperbolique :  $H_{0^{-1}}, H_1, H_{1^{-1}}, H_{1,0^{-1}}$  et  $H_{0,5^{-1}}$ . On se restreint donc à l'étude de ces conditions.

On rappelle les isométries intervenant dans l'étude de cette intersection :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{6}}{4} + i \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3\sqrt{6}}{4} - i \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{5}{4} + i \frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} - i \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i & \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad R_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = R_6 \cdot \gamma_0 \cdot R_6^{-1}, \quad \gamma_5 = R_6^{-1} \cdot \gamma_0 \cdot R_6$$

Le centre du domaine est le point  $o = (1, 0, 0)$ . L'intersection des bissecteurs  $H_0$  et  $H_{0,1^{-1}}$  est paramétrée par les vecteurs de la forme

$$Z = (W_0 + it_0 V_0) \boxtimes (W_1 + it_1 V_1), \quad t_0, t_1 \in \mathbb{R}$$

où

$$V_0 = -\frac{|\langle \gamma_0(o), o \rangle|}{\langle \gamma_0(o), o \rangle} o + \gamma_0(o), \quad W_0 = -\frac{|\langle \gamma_0(o), o \rangle|}{\langle \gamma_0(o), o \rangle} o - \gamma_0(o)$$

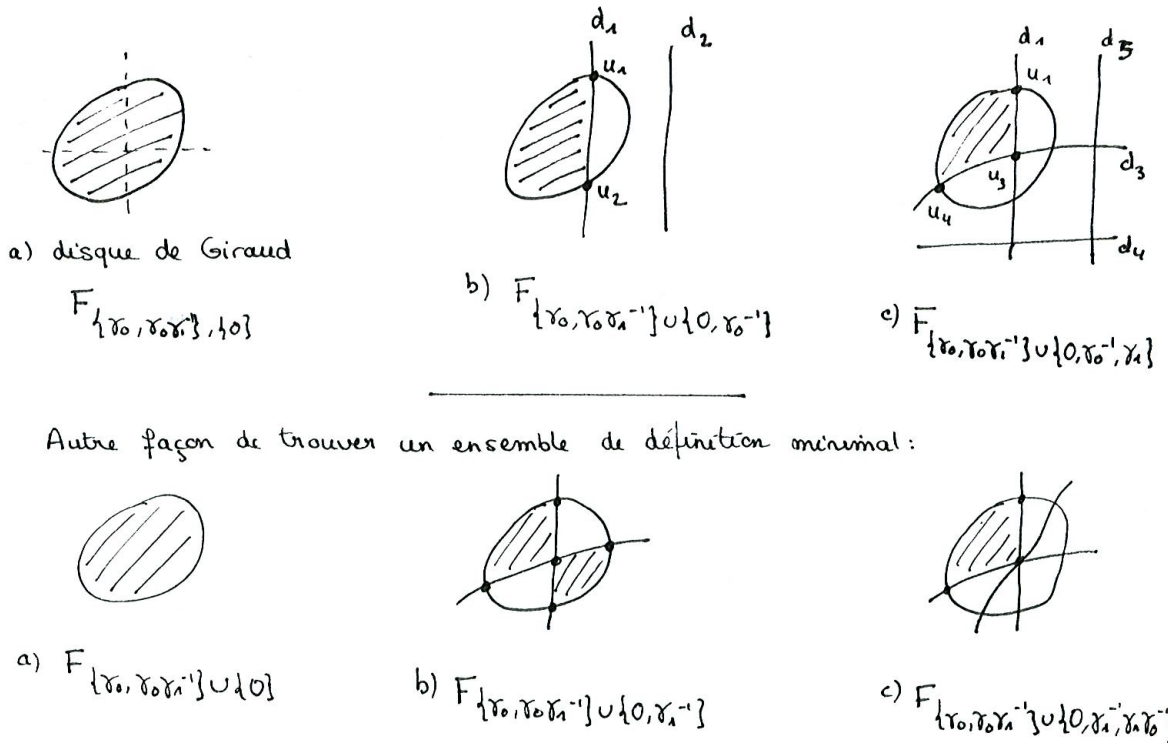
$$V_1 = -\frac{|\langle \gamma_0 \gamma_1^{-1}(o), o \rangle|}{\langle \gamma_0 \gamma_1^{-1}(o), o \rangle} o + \gamma_0 \gamma_1^{-1}(o), \quad W_1 = -\frac{|\langle \gamma_0 \gamma_1^{-1}(o), o \rangle|}{\langle \gamma_0 \gamma_1^{-1}(o), o \rangle} o - \gamma_0 \gamma_1^{-1}(o)$$

comme indiqué dans le paragraphe 3.3.1.2.

L'équation du bord, qui définit le disque de Giraud dans les coordonnées  $t_0, t_1$  (voir Figure 3.7), est donnée par

$$f_0(t_0, t_1) = |\langle Z, Z \rangle|^2 = 33 t_0^2 t_1^2 - 24 \sqrt{7} t_0 t_1 + (21 + 12 \sqrt{7}) t_0^2 + 33 t_1^2 + 21 - 12 \sqrt{7}$$

L'intérieur du disque correspond à l'ensemble  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0\}}$  (noter qu'il contient le point  $(t_0, t_1) = (0, 0)$ ).



Autre façon de trouver un ensemble de définition minimal:

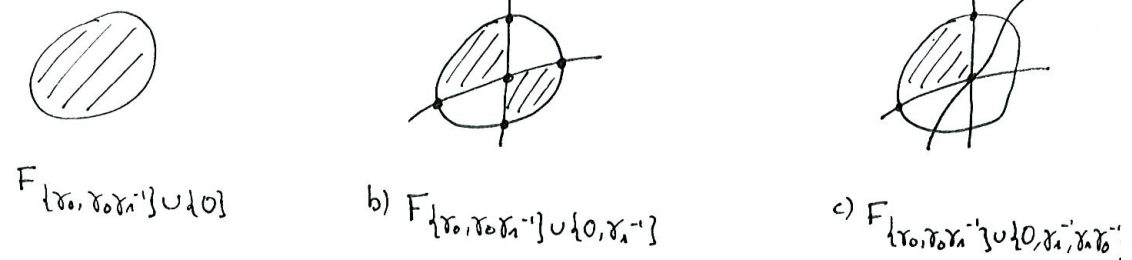


FIGURE 3.7 – Etapes de l'étude de la combinatoire de la facette  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_0 \gamma_1^{-1}}$ .

On rajoute ensuite les inégalités correspondant aux autres bissecteurs pour déterminer la facette  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, S'}$ . On commence par la condition donnée par le bissecteur  $H_{0^{-1}}$  :

$$f_{\gamma_0^{-1}}(t_0, t_1) = |\langle Z, o \rangle|^2 - |\langle Z, \gamma_0^{-1}(o) \rangle|^2$$

$$= -\frac{3}{7} (7 + \sqrt{7}) (1 + t_1^2) \underbrace{(-5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}\sqrt{3} - 3t_0)}_{d_1} \underbrace{(2\sqrt{3} + \sqrt{7}\sqrt{3} - 3t_0)}_{d_2}$$

Le signe de  $f_{\gamma_0^{-1}}$  dépend seulement du signe des facteurs  $d_1$  et  $d_2$ . Ils sont linéaires, donc leur intersection avec le bord du disque de Giraud est donnée par les racines d'un polynôme de degré 2 à une variable. En effet, en remplaçant  $t_0$  par la valeur correspondante  $c$  dans l'expression de  $f_0$ , on obtient un polynôme en  $t_1$  de degré 2. Les racines de ce polynôme donnent les ordonnées des points d'intersection du bord du disque avec la droite  $t_0 = c$  considérée.

Pour la droite  $d_2 = 0$ , le polynôme correspondant n'a pas de racine réelle, donc la droite  $d_2 = 0$  n'intersecte pas le disque de Giraud :  $d_2$  ne change pas de signe sur le disque de Giraud.  $d_2$  est positif en l'origine, donc est positif en tout point du disque de Giraud. La droite  $d_1$  intersecte le bord du disque de Giraud en deux points

$$u_1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{7} - 5), \frac{\sqrt{3} + 6}{11} \right), \quad u_2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{7} - 5), \frac{\sqrt{3} - 6}{11} \right)$$

Lorsque  $d_2$  est positif,  $f_{\gamma_0^{-1}}$  est du signe opposé à  $d_1$ , donc sur le disque de Giraud,  $f_{\gamma_0^{-1}}$  est négatif si et seulement si  $d_1$  est positif. L'ensemble  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}\}}$  correspond donc à la portion du disque vérifiant  $t_0 \leq \frac{\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{7} - 5)$ , délimitée par la droite verticale entre les sommets  $u_1$  et  $u_2$ , voir Figure 3.7.

On ajoute ensuite la condition correspondant au bissecteur  $H_1$  :

$$f_{\gamma_1}(t_0, t_1) = \frac{(-7 + 4\sqrt{7})}{7} \underbrace{\left( \sqrt{3}(5 + 2\sqrt{7})(t_0 - t_1) - 3 - 3t_0 t_1 \right)}_{d_3} \underbrace{\left( -\sqrt{3} + 2\sqrt{7}\sqrt{3} - 9t_0 \right)}_{d_4} \underbrace{\left( t_1 + \sqrt{3} \right)}_{d_5}$$

On vérifie que les facteurs linéaires  $d_4$  et  $d_5$  ne changent pas de signe sur le disque de Giraud, puisque les droites correspondantes n'intersectent pas le bord du disque. Ils sont tous les deux positifs en l'origine, donc sur le disque de Giraud,  $f_{\gamma_1}$  est négatif si et seulement si  $d_3$  est négatif. On étudie donc l'intersection du domaine obtenu précédemment avec l'ensemble  $d_3(t_0, t_1) \leq 0$ . Le sommet  $u_1$  est dans cet ensemble (l'évaluation de  $d_3$  en  $u_1$  se fait de manière exacte), mais  $u_2$  est en dehors. L'hyperbole  $d_3 = 0$  admet un unique point d'intersection avec la droite verticale  $d_1 = 0$  :

$$u_3 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{7} - 5), 0 \right)$$

Il reste à déterminer les points d'intersection de l'hyperbole avec le bord du disque, ainsi que ses points critiques. On obtient les points d'intersection en faisant une représentation rationnelle univariée (par exemple avec le logiciel Xcas) : le système étudié est donné par  $\{\tilde{f}_0(t_1, t_2, s_3, s_7), \tilde{d}_3(t_0, t_1, s_3, s_7), s_3^2 - 3, s_7^2 - 7\}$ , où  $\tilde{f}_0$  et  $\tilde{d}_3$  sont obtenues à partir de  $f_0$  et  $d_3$  en remplaçant les racines  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{7}$  par les variables  $s_3$  et  $s_7$ . Le système est bien zéro-dimensionnel, et on trouve deux solutions réelles correspondant aux points d'intersection du bord avec l'hyperbole (donnés sous forme d'intervalles) :

$$u_4 = ([-0.478060196, -0.478060181], [-0.702913720, -0.702913701])$$

$$u_5 = ([0.595157871, 0.595157881], [0.387995375, 0.387995387])$$

Seul  $u_4$  vérifie la condition  $f_{\gamma_0^{-1}}(u_4) \leq 0$ .  $u_4$  est donc un autre sommet de l'ensemble  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}, \gamma_1\}}$ , avec  $u_1$  et  $u_3$ . On vérifie de plus que  $d_3$  n'admet pas de points critiques dans le disque de Giraud, donc il n'y a pas de composante connexe supplémentaire.

On a alors déterminé la combinatoire de l'ensemble  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}, \gamma_1\}}$ . Il est représenté Figure 3.7.

On va voir maintenant qu'il s'agit en fait exactement de la facette étudiée,  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_0 \gamma_1^{-1}}$ . La condition provenant du bissecteur  $H_{1-1}$  n'ajoute aucune condition, puisqu'elle reprend des facteurs déjà étudiés :

$$f_{\gamma_1^{-1}}(t_0, t_1) = \frac{6}{7} \sqrt{7} \sqrt{3} \underbrace{\left( \sqrt{3} (5 + 2\sqrt{7}) (t_0 - t_1) - 3 - 3t_0 t_1 \right)}_{d_3} \underbrace{\left( -5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}\sqrt{3} - 3t_0 \right)}_{d_1}$$

$f_{\gamma_1^{-1}}$  est négative si et seulement si  $d_1$  et  $d_3$  sont de signes opposés, ce qui est le cas sur  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}, \gamma_1\}}$ . Cette condition supplémentaire ne modifie donc pas l'ensemble obtenu.

On considère ensuite la condition associée à  $\gamma_1 \gamma_0^{-1}$  :

$$f_{\gamma_1 \gamma_0^{-1}}(t_0, t_1) = -162 + \frac{324}{7} \sqrt{7} - 54 t_0^2 t_1^2 + \frac{648}{7} \sqrt{7} t_0 t_1 - \frac{216}{7} \sqrt{7} \sqrt{3} t_1 (1 - t_0^2) \\ + \frac{432}{7} \sqrt{7} \sqrt{3} t_0 - \frac{324}{7} \sqrt{7} t_0^2 - 54 t_1^2 - 162 t_0^2$$

Les sommets  $u_1$  et  $u_4$  vérifient  $f_{\gamma_1 \gamma_0^{-1}}(u_j) < 0$ , et on a de plus  $f_{\gamma_1 \gamma_0^{-1}}(u_3) = 0$  ( $u_3$  est donné de façon exacte, donc il n'y a pas de problème de certification). Les trois sommets sont donc préservés, et on sait de plus que la courbe  $f_{\gamma_1 \gamma_0^{-1}} = 0$  intersecte l'hyperbole  $d_3 = 0$  et la droite  $d_1 = 0$  en  $u_3$ . On cherche les autres points d'intersection de la courbe avec le bord du domaine. Il est facile de voir qu'elle a un unique point d'intersection dans le disque de Giraud avec la droite  $d_1 = 0$ , qui est donc  $u_3$ . Les intersections avec l'hyperbole et le bord du disque nécessitent d'utiliser une représentation rationnelle univariée. On trouve deux points d'intersection avec l'hyperbole  $d_3 = 0$  : un seul des deux est dans le disque de Giraud, c'est donc  $u_3$ . L'intersection avec le bord du disque consiste en deux points, tous les deux hors de  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}, \gamma_1\}}$  (on le vérifie en évaluant  $f_{\gamma_1}$  et  $f_{\gamma_0^{-1}}$  en ces points). Il n'y a donc aucuns sommets supplémentaires. L'étude des points critiques (toujours en utilisant une RUR) montre qu'ils sont tous hors du disque de Giraud, donc la courbe n'admet pas de composante connexe isolée dans le domaine  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}, \gamma_1\}}$ . L'ajout de la condition  $f_{\gamma_1 \gamma_0^{-1}} \leq 0$  ne modifie donc pas le domaine.

Enfin, on peut vérifier en faisant une représentation rationnelle univariée que  $f_{\gamma_0 \gamma_5^{-1}}$  ne change pas de signe sur le disque de Giraud (et est négative en l'origine), donc c'est une condition superflue pour la définition de la facette.

On en déduit finalement l'égalité

$$F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, S'} = F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0, \gamma_1, \gamma_0^{-1}\}}$$

et la combinatoire de la facette  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, S'}$  est entièrement connue. Noter que ce n'est pas la seule façon de définir la facette : l'étude précédente montre qu'on a aussi  $F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, S'} = F_{\{\gamma_0, \gamma_0 \gamma_1^{-1}\}, \{0, \gamma_1^{-1}, \gamma_1 \gamma_0^{-1}\}}$ , voir Figure 3.7.

### 3.5.5 Exemple de certification : facette de codimension supérieure à 2

Dans certains cas, l'intersection de deux faces est de codimension supérieure à 2 dans le polyèdre  $D$ . Suivant les cas, on trouve l'ensemble vide (par exemple  $F_{\gamma_0 \gamma_1^{-1}} \cap F_{\gamma_0 \gamma_5^{-1}}$ ),

un point (par exemple  $F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}} \cap F_{\gamma_1\gamma_0^{-1}}$ ), un segment (par exemple  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_1\gamma_0^{-1}}$ ) ou une union de deux segments (par exemple  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_1^{-1}}$ ). On décrit en détail l'étude de l'arête  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_1\gamma_0^{-1}}$ . Elle reprend les mêmes techniques que la section précédente. L'étude des autres intersections mentionnées ne présente pas de difficultés particulières.

Comme précédemment, on se restreint aux bissecteurs qui intersectent  $H_0$  et  $H_{1,0^{-1}}$  dans l'espace hyperbolique. Il y en a cinq :  $H_{0^{-1}}$ ,  $H_1$ ,  $H_{1^{-1}}$ ,  $H_{0,1^{-1}}$  et  $H_{5,0^{-1}}$ . On note à nouveau  $t_0$  le paramètre utilisé pour les tranches de  $H_0$ , et  $t_1$  celui pour les tranches de  $H_{1,0^{-1}}$ . L'équation du bord du disque de Giraud est alors donnée par :

$$f_0(t_0, t_1) = 30 - \frac{93}{7}\sqrt{7} + \left(\frac{15}{7}\sqrt{7} + 48\right)t_0^2 t_1^2 - 18\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{7}}{7} + 1\right)t_0^2 t_1 - \frac{90}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}t_1^2 t_0 \\ + \left(\frac{93}{7}\sqrt{7} + 30\right)t_0^2 + \left(48 - \frac{15}{7}\sqrt{7}\right)t_1^2 + \frac{156}{7}\sqrt{7}t_0 t_1 + 18\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{7}}{7} + 1\right)t_1 - \frac{54}{7}\sqrt{7}\sqrt{3}t_0$$

La première condition que l'on considère est celle associée à  $H_{0^{-1}}$  : après factorisation,

$$f_{\gamma_0^{-1}}(t_0, t_1) = -\frac{3}{7}(7 + \sqrt{7})(t_1^2 + 1) \underbrace{\left(-3t_0 + \sqrt{7}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right)}_{d_1} \underbrace{\left(-3t_0 - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}\sqrt{3}\right)}_{d_2}$$

Les deux facteurs  $d_1$  et  $d_2$  sont linéaires, donc les intersections des droites correspondantes avec le bord du disque de Giraud sont calculables exactement (ce sont des racines de polynômes de degré 2). La droite  $d_1 = 0$  n'intersecte pas le bord du disque :  $d_1$  reste positif sur le disque de Giraud. L'ensemble  $F_{\{\gamma_0, \gamma_1\gamma_0^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}\}}$  est donc donné par l'intersection du disque de Giraud avec l'ensemble  $d_2 \geq 0$ . On détermine les points d'intersection de  $d_2 = 0$  avec le bord du disque :

$$u_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{7} - 5), \frac{\sqrt{3} + 6}{11}\right), \quad u_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{7} - 5), \frac{\sqrt{3} - 6}{11}\right)$$

$F_{\{\gamma_0, \gamma_1\gamma_0^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}\}}$  est donc l'ensemble à gauche de la droite verticale  $d_2 = 0$ , avec pour sommets  $u_1$  et  $u_2$  (cf. Figure 3.8).

On ajoute ensuite la condition  $f_{\gamma_1}(t_0, t_1) \geq 0$  :

$$f_{\gamma_1}(t_0, t_1) = \frac{3}{7}(7 + \sqrt{7}) \underbrace{\left(\sqrt{3} - t_1\right)}_{d_3} \underbrace{\left(\sqrt{3}(2 + \sqrt{7})(t_0 + t_1) - 3t_0 t_1 + 3\right)}_{d_4} \underbrace{\left(-3t_0 - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}\sqrt{3}\right)}_{d_2}$$

On voit facilement que le facteur linéaire  $d_3$  est toujours positif sur le disque de Giraud (donc en particulier sur  $F_{\{\gamma_0, \gamma_1\gamma_0^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}\}}$ ). Pour montrer que le facteur  $d_4$  est aussi de signe constant positif sur le disque de Giraud, on peut effectuer une représentation rationnelle univariée, comme au paragraphe précédent. La représentation obtenue n'a pas de racines réelles, donc l'hyperbole  $d_4 = 0$  n'intersecte pas le bord du disque. On vérifie aussi que le seul point critique de  $d_4$  est hors du disque de Giraud, donc  $d_4$  ne change pas de signe sur le disque, et il reste positif.

La condition  $f_{\gamma_1} \leq 0$  est donc équivalente, sur le disque de Giraud, à la condition  $d_2 \leq 0$ . Or  $F_{\{\gamma_0, \gamma_1\gamma_0^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}\}}$  était donné par l'intersection du disque avec  $d_2 \geq 0$ . L'ensemble  $F_{\{\gamma_0, \gamma_1\gamma_0^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}, \gamma_1\}}$  est donc simplement le segment vertical  $[u_1, u_2]$ , contenu dans le disque et porté par  $d_2 = 0$  (voir Figure 3.8).



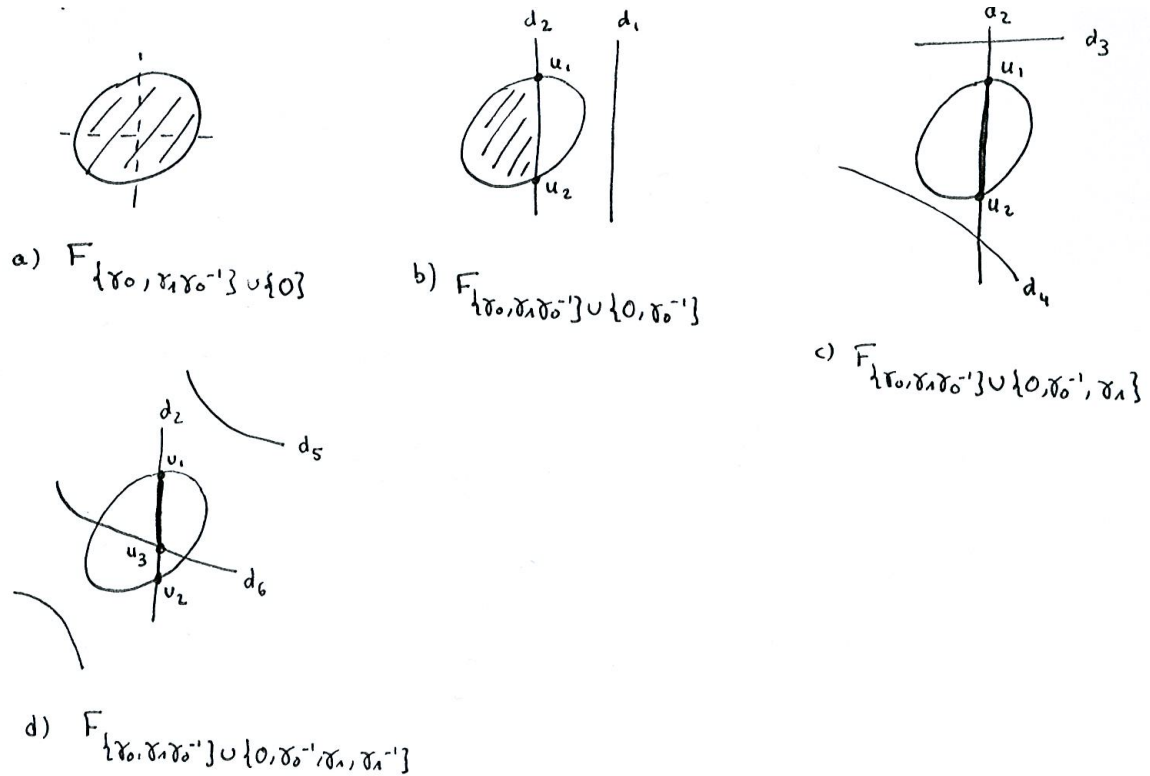


FIGURE 3.8 – Etapes de l'étude de la combinatoire de la facette  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_1 \gamma_0^{-1}}$ . Elle est de codimension 3 dans le polyèdre

On considère ensuite la condition  $f_{\gamma_1^{-1}}$  :

$$f_{\gamma_1^{-1}}(t_0, t_1) = -\frac{1}{7} \left( -7 + 4\sqrt{7} \right) \underbrace{\left( 9 - 9t_0 t_1 + \sqrt{3}(2\sqrt{7} - 1)(t_0 + t_1) \right)}_{d_5} \cdot \underbrace{\left( -3 + 3t_0 t_1 + \sqrt{3}(5 + 2\sqrt{7})(t_0 + t_1) \right)}_{d_6}$$

$f_{\gamma_1^{-1}}$  est négative si et seulement si les facteurs  $d_5$  et  $d_6$  sont de même signe. On cherche les intersections de chaque facteur avec la droite verticale  $d_2 = 0$ , ce qui se fait simplement en remplaçant  $t_0$  par  $\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{7} - 5)$  dans leur expression respective. Le polynôme en  $t_1$  obtenu est alors de degré au plus 1, il est donc aisé de déterminer ses racines. Pour le facteur  $d_5$ , on trouve le point d'intersection  $(\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{7} - 5), -\sqrt{3})$ , qui est hors du disque de Giraud. On vérifie que  $d_5$  est positif en  $u_1$ , donc positif sur tout le segment  $[u_1, u_2]$ . La facette  $F_{\{\gamma_0, \gamma_1 \gamma_0^{-1}\}, \{0, \gamma_0^{-1}, \gamma_1, \gamma_1^{-1}\}}$  sera donc donnée par la portion du segment sur laquelle le facteur  $d_6$  est positif. En appliquant la même méthode, on trouve que l'unique point d'intersection de la droite  $d_2$  avec l'hyperbole  $d_6$  est

$$u_3 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{7} - 5), 0 \right)$$

$u_3$  est dans le disque de Giraud, entre  $u_1$  et  $u_2$ . Le facteur  $d_6$  est positif en  $u_1$ , négatif en

$u_2$ . On obtient donc un nouveau segment vertical délimité par  $u_1$  et  $u_3$ , comme indiqué Figure 3.8.

De la même façon, on vérifie que la courbe  $f_{\gamma_0\gamma_1^{-1}} = 0$  a exactement les mêmes intersections avec la droite  $d_2$  que  $f_{\gamma_1^{-1}} = 0$ , et on vérifie qu'elle est bien négative sur le segment  $[u_1, u_3]$ . Enfin, la courbe  $f_{\gamma_5\gamma_0^{-1}} = 0$  n'intersecte pas la droite  $d_2$ , et reste négative dessus.

On en déduit donc que la facette  $F_{\{\gamma_0, \gamma_1\gamma_0^{-1}\}, S'}$  est de codimension 1, et elle est donnée par le segment  $[u_1, u_3]$  dans les coordonnées du disque de Giraud. Noter que d'après la remarque 3.3.5, cette facette est portée par une géodésique. C'est le cas de toutes les facettes de dimension 1 du polyèdre.

### 3.5.6 Combinatoire du polyèdre $D$

L'étude de toutes les intersections de paires de bissecteurs permet finalement de déterminer la combinatoire des faces du polyèdre  $D$ . Une partie de ces intersections ne correspond pas à des arêtes, mais à des facettes de codimension supérieure. À symétrie près, on trouve seulement trois types d'arêtes :  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_1}$  et  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}$  pour les arêtes portées par des disques de Giraud, et  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_0^{-1}}$  pour les arêtes portées par des droites complexes.

Une fois toutes les intersections de deux faces déterminées, on peut en déduire la structure des faces de codimension 1. Du fait des symétries du polyèdre  $D$ , il n'y a que deux types de faces :  $F_{\gamma_0}$  et  $F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}$ . Le bord à l'infini d'un bissecteur est une sphère spinale, de dimension 2 dans l'espace de dimension 3  $\partial_{\infty}\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Le bord à l'infini d'une face de codimension 1 est donc une sphère tronquée par les sphères spinales au bord des bissecteurs qui intersectent la face. En particulier, c'est un objet dessinable. Le programme de Deraux utilisé pour déterminer le domaine de Dirichlet partiel  $D$  (voir section 3.4.2) fournit aussi un dessin du bord à l'infini des faces de  $D$ . Les images obtenues via ce programme sont données Figure 3.9.

La combinatoire des faces peut être représentée schématiquement, voir Figure 3.10. Le bissecteur considéré est "vu d'en haut", et projeté sur le bord à l'infini de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Le cercle extérieur correspond à la frontière du bord à l'infini de la face. Les différentes régions représentent les arêtes de  $D$  portées par le bissecteur : elles correspondent aux intersections avec un deuxième bissecteur, indiqué dans la région. Les 1-facettes sont parfois contenues dans un bissecteur supplémentaire, dont le numéro est indiqué en rouge sur la figure. Noter que la face  $F_{\gamma_1\gamma_0^{-1}}$  intersecte  $F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}$  seulement suivant un point, mais qu'elle est nécessaire à sa définition : on peut le voir par exemple Figure 3.7.

## 3.6 Représentation fidèle, discrète, convexe cocompacte

On vérifie dans cette section que la représentation de  $\Gamma_{6,3}$  étudiée ici est bien fidèle, discrète et convexe cocompacte. Toutes ces vérifications se font à partir du polyèdre  $D$ , donc on connaît maintenant la combinatoire. Le fait que la représentation est discrète est donnée par le théorème de Poincaré, qui permet de montrer que  $D$  est un domaine fondamental pour le groupe  $\Gamma$  engendré par les réflexions  $\gamma_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Le théorème de Poincaré fournit aussi une présentation de  $\Gamma$ , qui montre que la représentation est fidèle.

Enfin, le fait que  $\Gamma$  est convexe cocompact se vérifie avec la caractérisation donnée corollaire 3.1.15 : on montre que l'espace  $M_c = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \Omega\Gamma)/\Gamma$  est compact. Ceci aussi se vérifie sur les propriétés du domaine fondamental  $D$ .

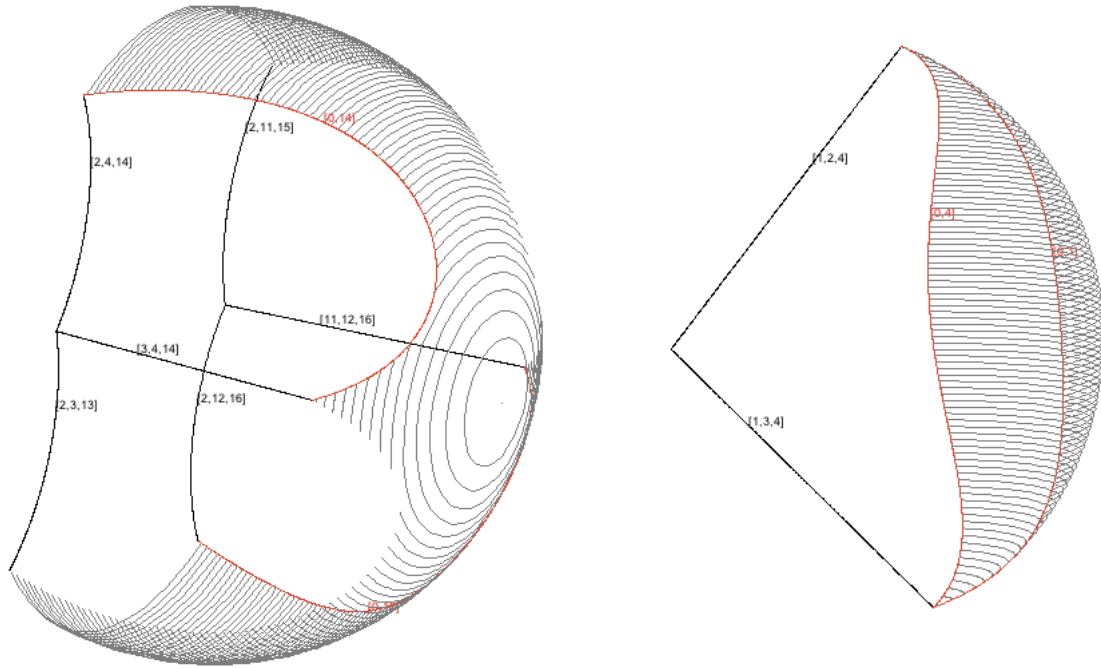


FIGURE 3.9 – Dessin du bord à l’infini des faces  $F_{\gamma_0}$  (à gauche) et  $F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}$  (à droite), obtenu via le programme de Deraux. La zone hachurée représente la sphère spinale du bissecteur portant la face. Les numéros correspondent à la numérotation des faces dans le programme : 0 = bord de la sphère spinale, 1 =  $F_{\gamma_0}$ , 2 =  $F_{\gamma_0^{-1}}$ , 3 =  $F_{\gamma_1}$ , 4 =  $F_{\gamma_1^{-1}}$ , ..., 13 =  $F_{\gamma_1\gamma_0^{-1}}$ , 14 =  $F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}$ .

### 3.6.1 Application du théorème de Poincaré

#### 3.6.1.1 Identifications de faces

**Méthode pour vérifier l’existence d’identifications de faces** On veut tester si les éléments de  $S$  sont des identifications de faces pour  $D$ . Soit  $\gamma \in S$  : il faut vérifier que les ensembles  $\gamma^{-1}(F_\gamma)$  et  $F_{\gamma^{-1}}$  sont égaux, et que la structure d’incidence des facettes est préservée. Les sous-facettes d’une face forment un ensemble partiellement ordonné :  $\gamma^{-1}$  doit agir comme un isomorphisme d’ensembles partiellement ordonnés entre les facettes de  $F_\gamma$  et  $F_{\gamma^{-1}}$  (i.e.  $\gamma^{-1}$  préserve l’ordre, et son inverse  $\gamma$  aussi). C’est en général fastidieux à vérifier, notamment lorsque le nombre d’équations définissant le polytope  $D$  est important. Mais on peut se ramener souvent à un cas beaucoup plus simple, pour lequel il suffit de vérifier certaines égalités entre des éléments de  $S$ . Il faut pour cela réduire de manière adéquate le nombre d’équations définissant une face, en ôtant les conditions superflues.

**Proposition 3.6.1.** *Supposons que pour tout  $\gamma \in S$ , il existe  $V(\gamma) \subset S$  tel que :*

- $V(\gamma)$  et la condition du bord suffisent à définir la face  $F_\gamma$  : avec les notations définies section 3.4.3,

$$F_{\{\gamma\}, S \setminus \{\gamma\}} = F_{\{\gamma\}, V(\gamma) \cup \{0\}}$$

- $\gamma^{-1}(V(\gamma)) = V(\gamma^{-1})$ .

Alors pour tout  $\gamma \in S$ ,  $\gamma^{-1}$  est une identification de faces entre  $F_\gamma$  et  $F_{\gamma^{-1}}$ .

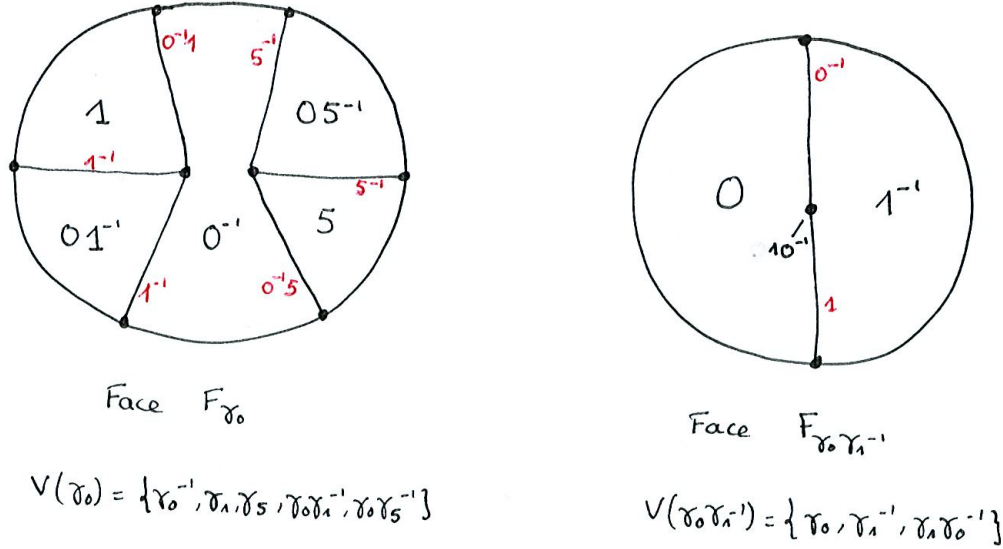


FIGURE 3.10 – Structure des deux types de faces du domaine de Dirichlet partiel  $D$ . Chaque région correspond à l'intersection avec une autre face, donnant une arête de codimension 2 de  $D$ . Les numéros rouges correspondent aux faces supplémentaires intersectant  $F_\gamma$  suivant une facette de codimension 3.

En pratique,  $V(\gamma)$  contient au moins l'ensemble des éléments  $\alpha \in S$  tels que l'intersection  $F_\alpha \cap F_\gamma$  est de codimension 2 dans  $D$ . C'est exactement cet ensemble en général, mais il peut arriver que des conditions supplémentaires soient nécessaires. On verra dans la suite que c'est le cas par exemple pour les faces du type  $F_{\gamma_0 \gamma_1^{-1}}$ .

*Démonstration.* Il est facile de voir que pour tous  $\gamma, \alpha \in S$  distincts,  $\gamma^{-1}(F_{\{\gamma\}, \{\alpha\}})$  est exactement  $F_{\{\gamma^{-1}\}, \{\gamma^{-1}\alpha\}}$  :

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^2 \mid d(z, \gamma(o)) = d(z, o) \leq d(z, \alpha(o))\}) \\ &= \{z \in \mathbb{C}^2 \mid d(\gamma(z), \gamma(o)) = d(\gamma(z), o) \leq d(\gamma(z), \alpha(o))\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^2 \mid d(z, o) = d(z, \gamma^{-1}(o)) \leq d(z, \gamma^{-1}\alpha(o))\} = F_{\{\gamma^{-1}\}, \{\gamma^{-1}\alpha\}} \end{aligned}$$

On en déduit alors, en utilisant les hypothèses de la proposition et le fait que  $\gamma^{-1}$  préserve la condition de bord :

$$\gamma^{-1}(F_\gamma) = \gamma^{-1}(F_{\gamma, V(\gamma) \cup \{0\}}) = F_{\gamma^{-1}, \gamma^{-1}(V(\gamma) \cup \{0\})} = F_{\gamma^{-1}, V(\gamma^{-1}) \cup \{0\}} = F_{\gamma^{-1}}$$

Puisque  $\gamma^{-1}$  est une bijection entre  $V(\gamma)$  et  $V(\gamma^{-1})$ , elle induit une bijection entre les inégalités qui définissent  $F_\gamma$  et  $F_{\gamma^{-1}}$ . En particulier, elle préserve la structure d'incidence des facettes, et c'est donc une identification de faces.  $\square$

**Vérification des identifications de faces** Une fois la combinatoire des facettes certifiée, on peut vérifier que les réflexions  $\gamma_i$  sont bien des identifications de faces en utilisant la proposition 3.6.1. L'étude des faces du domaine de Dirichlet partiel permet de déterminer

les inégalités superflues dans la définition d'une face, et on vérifie que les hypothèses de la proposition sont vérifiées en définissant un ensemble  $V(\gamma)$  bien choisi pour chaque face  $F_\gamma$  de  $D$ .

Considérons la face  $F_{\gamma_0}$  : elle est définie par l'égalité  $d(z, o) = d(z, \gamma_0(o))$ , et par un certain nombre d'inégalités. En gardant les notations de la proposition 3.6.1, on peut définir

$$V(\gamma_0) = \{\gamma_0^{-1}, \gamma_1, \gamma_5, \gamma_0\gamma_1^{-1}, \gamma_0\gamma_5^{-1}\}$$

Il est clair d'après la combinatoire de la face (voir Figure 3.10) que les inégalités correspondant aux éléments de  $V(\gamma_0)$  suffisent à définir  $F_{\gamma_0} : F_{\{\gamma_0\}, S \setminus \{\gamma_0\}} = F_{\{\gamma_0\}, V(\gamma_0) \cup \{0\}}$ . D'autre part, par symétrie du polyèdre, on peut définir de la même façon

$$V(\gamma_0^{-1}) = \{\gamma_0, \gamma_1^{-1}, \gamma_5^{-1}, \gamma_0^{-1}\gamma_1, \gamma_0^{-1}\gamma_5\}$$

et de même,  $F_{\{\gamma_0^{-1}\}, S \setminus \{\gamma_0^{-1}\}} = F_{\{\gamma_0^{-1}\}, V(\gamma_0^{-1}) \cup \{0\}}$ . Puisque  $\gamma_0$  est d'ordre 3, on a bien l'égalité  $\gamma_0^{-1}(V(\gamma_0)) = V(\gamma_0^{-1})$ . Les hypothèses de la proposition 3.6.1 sont donc vérifiées, et  $\gamma_0^{-1}$  est une identification de faces entre  $F_{\gamma_0}$  et  $F_{\gamma_0^{-1}}$ .

De même, pour la face  $F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}$ , on peut choisir

$$V(\gamma_0\gamma_1^{-1}) = \{\gamma_0, \gamma_1^{-1}, \gamma_1\gamma_0^{-1}\}$$

et par symétrie

$$V(\gamma_1\gamma_0^{-1}) = \{\gamma_1, \gamma_0^{-1}, \gamma_0\gamma_1^{-1}\}$$

Les inégalités correspondantes suffisent à définir les faces, et on a  $\gamma_1\gamma_0^{-1}(V(\gamma_0\gamma_1^{-1})) = V(\gamma_1\gamma_0^{-1})$ . Donc les hypothèses de la proposition 3.6.1 sont vérifiées, et on a bien une identification de faces. Remarquer que dans ce cas, les éléments de  $V(\gamma_0\gamma_1^{-1})$  ne correspondent pas seulement aux faces qui intersectent  $F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}$  en codimension 2 : l'intersection avec  $F_{\gamma_1\gamma_0^{-1}}$  est un point.

Le reste des vérifications s'obtient par symétrie du polyèdre  $D$ . On a donc montré que le domaine de Dirichlet partiel admet des identifications de faces au sens du théorème de Poincaré, de la forme  $\gamma^{-1} : F_\gamma \rightarrow F_{\gamma^{-1}}$ .

### 3.6.1.2 Cycles d'arêtes

Il reste à vérifier les autres hypothèses du théorème de Poincaré. Les cycles d'arêtes sont de deux types, suivant que l'arête est portée par un disque de Giraud, ou par une tranche complexe. Dans le cas d'une arête portée par un disque de Giraud, le cycle d'arête est particulièrement simple. En effet, d'après le théorème de Giraud, seul un bissecteur supplémentaire peut contenir le disque de Giraud : le cycle d'arêtes est donc de longueur trois, et la transformation de cycle associée est l'identité. Compte tenu des symétries du polyèdre, tous ces cycles d'arêtes peuvent être obtenus à partir de celui de l'arête  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_1}$  :

$$(F_{\gamma_0}, F_{\gamma_1}) \xrightarrow{\gamma_1^{-1}} (F_{\gamma_1^{-1}}, F_{\gamma_0\gamma_1^{-1}}) \xrightarrow{\gamma_1\gamma_0^{-1}} (F_{\gamma_1\gamma_0^{-1}}, F_{\gamma_0^{-1}}) \xrightarrow{\gamma_0} (F_{\gamma_0}, F_{\gamma_1})$$

La transformation d'arête associée,  $\gamma_0 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_0^{-1} \cdot \gamma_1^{-1}$ , est bien égale à l'identité puisque les  $\gamma_i$  commutent par construction. Les copies de  $D$  qui apparaissent dans le cycle d'arêtes

sont  $D$ ,  $\gamma_0(D)$  et  $\gamma_1(D)$ . Compte tenu de la définition de  $D$ , on a

$$\begin{aligned} z \in D &\Rightarrow d(z, o) \leq d(z, \gamma_0(o)), \quad d(z, o) \leq d(z, \gamma_1(o)) \\ z \in \gamma_0(D) &\Rightarrow d(z, \gamma_0(o)) \leq d(z, o), \quad d(z, \gamma_0(o)) \leq d(z, \gamma_1(o)) \\ z \in \gamma_1(D) &\Rightarrow d(z, \gamma_1(o)) \leq d(z, o), \quad d(z, \gamma_1(o)) \leq d(z, \gamma_0(o)) \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.3.10, les copies de  $D$  le long du cycle d'arêtes pavent un voisinage de cette arête. Les hypothèses de Poincaré sont donc vérifiées pour les cycles d'arêtes portées par des disques de Giraud.

Notons que lors de l'application du théorème de Poincaré, le cycle de  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_1}$  donne la relation de commutation entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ . Pour l'arête  $F_{\gamma_0^{-1}} \cap F_{\gamma_1^{-1}}$ , la transformation de cycle devient  $\gamma_0^{-1} \cdot (\gamma_0 \gamma_1^{-1}) \cdot \gamma_1$  : dans la présentation du groupe engendré par les identifications de faces, la relation correspondante implique que l'identification de faces associée à  $F_{\gamma_1 \gamma_0^{-1}}$  est en fait égale au produit des identifications de faces associées à  $F_{\gamma_0^{-1}}$  et  $F_{\gamma_1}$ .

Les arêtes portées par une droite complexe sont aussi toutes du même type par symétrie, on considère donc seulement l'arête  $F_{\gamma_0} \cap F_{\gamma_0^{-1}}$ . L'arête est portée par la droite complexe  $C_0$  (engendrée par l'arête  $[x_0, x_1]$  de  $P$ ), qui est l'ensemble des points fixes de  $\gamma_0$ . Le cycle d'arête est donc de longueur 1, et la transformation de cycle est simplement  $\gamma_0$ . Elle est bien d'ordre fini, et la relation correspondante est

$$\gamma_0^3 = id$$

Il reste à voir que les copies du polyèdre pavent un voisinage de l'arête. Puisque  $\gamma_0$  fixe l'arête, et agit comme une rotation d'angle  $2\pi/3$  sur la direction orthogonale, il suffit de vérifier que l'angle entre les deux bissecteurs est égal à  $2\pi/3$  d'après la section 3.3.2.4. Cet angle est égal à l'angle entre les épines réelles des deux bissecteurs d'après le théorème 3.3.2. Dans l'épine complexe  $\Sigma_0$  engendrée par  $o$  et  $\gamma_0(o)$ , l'épine réelle  $\sigma_{0^{-1}}$  de  $H_{0^{-1}}$  est la géodésique médiatrice de  $o$  et  $\gamma_0^{-1}(o)$ , et l'épine réelle  $\sigma_0$  de  $H_0$  est la géodésique médiatrice de  $\gamma_0(o)$  et  $o$ . Elles se coupent au point fixe de  $\gamma_0$  sur  $\Sigma_0$ , qui est l'intersection de  $\Sigma$  avec la droite complexe  $C_0$ . Comme  $\gamma_0(\sigma_{0^{-1}}) = \sigma_0$ , on en déduit que l'angle entre les deux épines réelles au point d'intersection est de  $2\pi/3$ , et donc que les copies de  $D$  pavent un voisinage de l'arête.

### 3.6.1.3 Points à l'infini

Les points à l'infini du domaine de Dirichlet partiel  $D$  sont de quatre types, suivant qu'ils appartiennent à 0, 1, 2 ou 3 faces (ou plus) de  $D$ . L'étude de la combinatoire permet de déterminer tous les points à l'infini de  $D$ . On étudie alors le cycle de chaque point  $p \in \partial_{\infty} D$  sous les identifications de faces : il peut être représenté par la composante connexe contenant  $p$  du graphe dont les sommets sont les points à l'infini, et les arêtes sont les identifications de faces entre les sommets. Si pour chaque  $p \in \partial_{\infty} D$ , le groupe engendré par les identifications de faces qui apparaissent dans le graphe est fini, alors la propriété 3.3.7 est vérifiée (voir section 3.3.2), et on peut appliquer le théorème de Poincaré.

Soit donc  $p \in \partial_{\infty} D$ . Si  $p$  n'appartient à aucune face de  $D$ , il n'y a pas d'identification de faces associée (on peut donc considérer que le groupe correspondant est l'identité), son cycle est trivial et  $Z_p$  est simplement  $D$ .

Si  $p$  est sur une et une seule face  $F_\gamma$  de  $D$ , son cycle est de la forme

$$F_\gamma \ni p \text{ --- } \gamma^{-1}(p) \in F_{\gamma^{-1}}$$

Le groupe engendré par les identifications des faces passant par  $p$  est  $\langle \gamma \rangle$ , d'ordre 3.  $Z_p$  est simplement constitué de deux copies  $D$  et  $\gamma(D)$ .

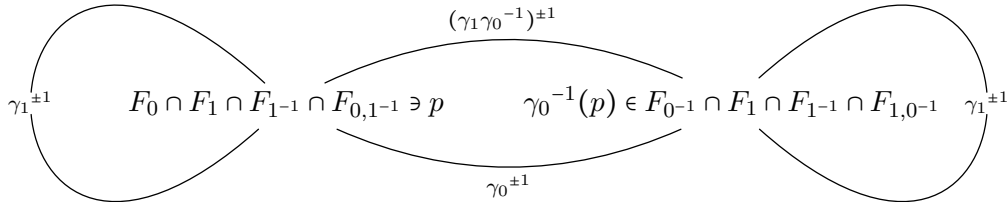
Si  $p$  est sur deux faces non cospinales, par symétrie, on peut se ramener au cas où  $p \in F_0 \cap F_1$ . Le cycle de  $p$  correspond exactement au cycle d'arêtes de  $F_0 \cap F_1$  :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\gamma_0^{\pm 1}} & p \in F_0 \cap F_1 & \xrightarrow{\gamma_1^{\pm 1}} \\ \gamma_0^{-1}(p) \in F_{0^{-1}} \cap F_{10^{-1}} & \xrightarrow{(\gamma_1 \gamma_0^{-1})^{\pm 1}} & \gamma_1^{-1}(p) \in F_{1^{-1}} \cap F_{01^{-1}} & \end{array}$$

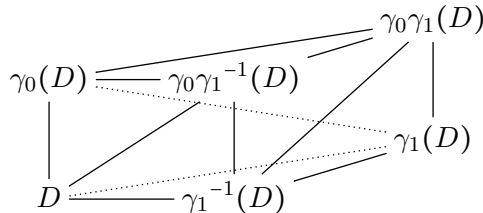
Le groupe engendré par les identifications de faces est  $\langle \gamma_0, \gamma_1 \rangle$ , fini puisque  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont d'ordre fini et commutent.  $Z_p$  est constitué des copies  $D$ ,  $\gamma_0(D)$ , et  $\gamma_1(D)$ .

Si  $p$  est sur deux faces cospinales, on peut supposer que  $p \in F_0 \cap F_{0^{-1}}$ . Le cycle de  $p$  est réduit à  $p$  lui-même, puisque l'identification de face  $\gamma_0$  fixe  $p$ . Le groupe engendré par les identifications de faces est  $\langle \gamma_0 \rangle$ , il est donc fini, et  $Z_p$  est constitué des trois copies  $D$ ,  $\gamma_0(D)$ , et  $\gamma_0^{-1}(D)$ .

Le cas le plus compliqué est celui des "sommets" à l'infini de  $D$ , c'est-à-dire des points à l'infini appartenant à 3 faces ou plus. Dans notre cas, l'étude de la combinatoire des faces montre que tous les sommets à l'infini de  $D$  correspondent à l'intersection de quatre faces (voir Figure 3.10). Tous les cycles de sommets à l'infini sont équivalents par symétrie, donc on s'intéresse seulement au sommet  $p \in F_0 \cap F_1 \cap F_{1^{-1}} \cap F_{0,1^{-1}}$ .  $p$  appartient à la droite complexe  $H_1 \cap H_{1^{-1}}$ , donc il est fixé par  $\gamma_1$ . Les deux autres identifications de faces l'envoient sur  $\gamma_0^{-1}(p) \in F_{0^{-1}} \cap F_1 \cap F_{1^{-1}} \cap F_{1,0^{-1}}$ . On a donc le cycle correspondant :



Le groupe engendré par les identifications de faces est à nouveau  $\langle \gamma_0, \gamma_1 \rangle$ , donc il est fini. On vérifie que  $Z_p$  est constitué de 6 copies de  $D$ , organisées comme indiqué sur le diagramme suivant (une arête entre deux sommets signifie que les deux copies de  $D$  partagent une face passant par  $p$ ) :



### 3.6.1.4 Conclusion

Toutes les hypothèses sont vérifiées, donc on peut appliquer le théorème de Poincaré : le groupe  $\Gamma$  engendré par les réflexions  $\gamma_j$ ,  $j = 0, \dots, 5$ , est un sous-groupe discret d'isométries

de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , le domaine de Dirichlet partiel  $D$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma$  (en particulier, il est en fait égal au domaine de Dirichlet de  $\Gamma$  centré en  $o$ ), et  $\Gamma$  admet une présentation, dont les relations sont données par les cycles d'arêtes. D'après l'étude des cycles d'arêtes du paragraphe précédent,  $\Gamma$  admet pour présentation

$$\langle \gamma_0, \dots, \gamma_5 \mid \gamma_j^3 = id, \gamma_i \gamma_{i+1} = \gamma_{i+1} \gamma_i, i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rangle$$

$\Gamma$  est donc l'image d'une représentation discrète et fidèle du groupe  $\Gamma_{pq}$  décrit précédemment, pour  $p = 6$  et  $q = 3$ . En particulier,  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, et son bord à l'infini  $\partial\Gamma$  est homéomorphe à celui de  $\Gamma_{6,3}$ , donc d'après le corollaire 3.2.3,  $\partial\Gamma$  est homéomorphe à l'éponge de Menger.

### 3.6.2 $\Gamma$ est convexe cocompact

La dernière étape de l'étude de  $\Gamma$  est de montrer qu'il est convexe cocompact : dans ce cas, l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$  est homéomorphe au bord à l'infini  $\partial\Gamma$ , donc à l'éponge de Menger. D'après le corollaire 3.1.15, il suffit pour cela de voir que le quotient  $M_c = (\mathbb{H}^2 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$  est compact, où  $\Omega(\Gamma) \subset \partial_{\infty}\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  est le domaine de discontinuité de  $\Gamma$ .

On commence par montrer le résultat intermédiaire suivant :

**Lemme 3.6.2.** *Le domaine de discontinuité de  $\Gamma$  est exactement l'ensemble des images par  $\Gamma$  du bord du domaine de Dirichlet  $D$  :*

$$\Omega(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\partial_{\infty}D)$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que tout point de  $\partial_{\infty}D$  est un point de discontinuité. Puisque l'ensemble de discontinuité est invariant par l'action de  $\Gamma$ , on en déduira l'inclusion  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \partial_{\infty}D \subset \Omega(\Gamma)$ . Soit donc  $p \in \partial_{\infty}D$ . D'après l'étude des cycles de points à l'infini de  $D$ , on sait que  $p$  appartient seulement à un nombre fini de copies de  $\overline{D}^{\infty}$  (où l'adhérence est prise dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial_{\infty}\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ), notées  $g_1(\overline{D}^{\infty}), \dots, g_k(\overline{D}^{\infty})$ . Comme dans la preuve du lemme 3.3.9, on considère un bissecteur  $B$  tel que :

- $B$  intersecte seulement les faces des  $g_j(\overline{D}^{\infty})$  qui passent par  $p$ ,
- toutes les autres faces des  $g_j(\overline{D}^{\infty})$  sont contenues dans le même demi-espace  $B^-$  délimité par  $B$ ,
- $p$  appartient à l'autre demi-espace, noté  $B^+$ .

Un tel bissecteur existe, puisqu'il y a seulement un nombre fini de faces à éviter. Par construction, et puisque  $D$  est un domaine fondamental,  $B^+$  est pavé par les  $g_j(D) \cap B^+$ .  $p$  admet donc un voisinage dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial_{\infty}\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  qui intersecte seulement un nombre fini de copies du domaine fondamental  $\overline{D}^{\infty}$ , donc  $p$  n'est pas un point de l'ensemble limite :  $p \in \Omega(\Gamma)$ .

L'autre inclusion est un résultat standard, mentionné par exemple dans [Bow95] p.249 (voir aussi [Rat06] p.610). Il repose sur le fait que la famille  $\{\gamma(\overline{D}^{\infty}) \mid \gamma \in \Gamma\}$  est localement finie sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \Omega(\Gamma)$  (ce résultat utilise la quasi-convexité du domaine de Dirichlet). On en déduit alors que tout point de  $\Omega(\Gamma)$  est dans l'adhérence d'une copie de  $D$  : si  $p \in \Omega(\Gamma)$ , soit  $x_n \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  une suite qui converge vers  $p$ . Chaque  $x_n$  est dans une copie du domaine fondamental  $\gamma_n(\overline{D}^{\infty})$ . Puisque la famille est localement finie sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \Omega(\Gamma)$ , les  $x_n$  appartiennent à une même copie de  $D$  à partir d'un certain rang. Donc  $p \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\partial_{\infty}D)$ .  $\square$



Avec le lemme, on a alors

$$M_c = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma = \left( \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{D}^\infty) \right) / \Gamma = \overline{D}^\infty / \Gamma$$

Or  $\overline{D}^\infty$  est compact (puisque c'est un fermé dans l'espace compact  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ), donc le quotient  $\overline{D}^\infty / \Gamma$  est compact. L'espace  $M_c$  est donc compact, et par le corollaire 3.1.15,  $\Gamma$  est convexe cocompact.

### 3.7 Conclusion

En regroupant tous les arguments, on obtient finalement le résultat suivant :

**Théorème 3.7.1.** *Le groupe  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$  construit dans cette section est l'image d'une représentation fidèle, discrète, et convexe cocompacte du groupe hyperbolique  $\Gamma_{6,3}$ . En particulier, l'ensemble limite  $\Lambda\Gamma$  est homéomorphe à l'éponge de Menger.*

On a donc construit un exemple explicite de sous-groupe d'isométries de  $PU(2,1)$  dont l'ensemble limite est l'éponge de Menger.

Des résultats de O. Guichard permettent d'en déduire l'existence d'un voisinage de représentations  $\Gamma_{6,3} \rightarrow PU(2,1)$  convexe cocompactes. Dans l'article [Gui04], Guichard montre le théorème suivant :

**Théorème 3.7.2.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple à centre fini, et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de type fini de  $G$ . On suppose que  $\Gamma$  est plongé quasi-isométriquement dans  $G$ , et qu'il est de plus contenu dans un sous-groupe  $G^*$  de rang un de  $G$ . Alors l'injection de  $\Gamma$  dans  $G$  admet un voisinage dans l'espace  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  des représentations entièrement constitué de plongements quasi-isométriques.*

$PU(2,1)$  est de rang 1, donc la première partie des hypothèses est vérifiée. D'autre part, d'après un résultat de Bourdon et Gromov (Théorème 6 dans [Gui04]), si le groupe  $G$  est de rang 1 alors l'injection de  $\Gamma$  dans  $G$  est un plongement quasi-isométrique si et seulement si  $\Gamma$  est convexe cocompact. Il existe donc un voisinage de la représentation  $\rho : \Gamma_{6,3} \rightarrow PU(2,1)$  construite dans ce chapitre dans l'espace des représentations  $\text{Hom}(\Gamma_{6,3}, PU(2,1))$ , qui est formé de représentations fidèles, discrètes et convexe cocompactes.

Il reste à vérifier que  $\text{Hom}(\Gamma_{6,3}, PU(2,1))$  n'est pas trivial. La construction décrite dans ce chapitre peut être effectuée quel que soit l'hexagone hyperbolique à angles droits considéré au début : les isométries  $\gamma_i$ , définies comme les réflexions complexes d'ordre 3 par rapport aux droites complexes portant les arêtes du polygone, vérifient les relations  $\gamma_i^3 = id$ , et les relations de commutation  $[\gamma_i, \gamma_{i+1}] = id$ . Tout choix d'hexagone hyperbolique à angles droits dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  donne donc un élément de  $\text{Hom}(\Gamma_{6,3}, PU(2,1))$ . L'espace de modules des hexagones hyperboliques à angles droits est décrit par trois paramètres réels, donnés par les longueurs de trois côtés deux à deux non consécutifs de l'hexagone (voir par exemple [Rat06] théorème 3.5.14).

Or étant donnés deux hexagones à angles droits non isométriques  $P$  et  $P'$ , les groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  construits de cette façon sont non conjugués. On obtient donc le corollaire suivant :

**Corollaire 3.7.3.** *Il existe une famille continue à trois paramètres réels de sous-groupes de  $PU(2,1)$  deux à deux non conjugués dont les ensembles limites sont homéomorphes à l'éponge de Menger.*

## Annexe A

# Identifications de faces pour les polyèdres

### A.1 Métriques à 6 singularités

On donne une liste explicite des identifications de faces obtenues pour les polyèdres associés aux métriques symétriques à 6 singularités de type  $2(i)$ ,  $2(ii)$  et 3, ainsi que pour le polyèdre recollé  $\mathcal{P}_t$ . Les identifications de faces pour les types 0 et 1 ont déjà été données dans le texte.

TABLE A.1 – Récapitulatif des identifications de faces pour les métriques symétriques à 6 singularités de type 2

Face	Changement de paramétrage	Identification
Identifications au départ du polyèdre $\mathcal{P}_{2(i)}$		
$F_1^{2(i)} = \{x_1 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\tau_1^{2(i)} : F_1^{2(i)} \rightarrow F_1^{2(i)}$
$F_2^{2(i)} = \{x_3 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\tau_2^{2(i)} : F_2^{2(i)} \rightarrow F_2^{2(i)}$

TABLE A.1 – Récapitulatif des identifications de faces pour les métriques à 6 singularités de type 2 - suite

$F_3^{2(i)} = \{x_1 = x_2\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\tau_3^{2(i)} : F_3^{2(i)} \rightarrow F_3^{2(i)}$
$F_4^{2(i)} = \{2x_2 = n\}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\tau_4^{2(i)} : F_4^{2(i)} \rightarrow F_4^{2(i)}$
$F_5^{2(i)} = \{\frac{4}{3}x_2 + x_3 = n\}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -2 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\tau_5^{2(i)} : F_5^{2(i)} \rightarrow F_4^{2(ii)}$
Identifications au départ du polyèdre $\mathcal{P}_{2(ii)}$		
$F_1^{2(ii)} = \{x_2 + x_3 = n\}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\tau_1^{2(ii)} : F_1^{2(ii)} \rightarrow F_1^{2(ii)}$
$F_2^{2(ii)} = \{n - x_2 - x_3 = x_1\}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\tau_2^{2(ii)} : F_2^{2(ii)} \rightarrow F_2^{2(ii)}$
$F_3^{2(ii)} = \{x_2 = x_3\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\tau_3^{2(ii)} : F_3^{2(ii)} \rightarrow F_3^{2(ii)}$

TABLE A.1 – Récapitulatif des identifications de faces pour les métriques à 6 singularités de type 2 - suite

$F_4^{2(ii)} = \{\frac{4}{3}x_1 + x_3 = n\}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\tau_4^{2(ii)} : F_4^{2(ii)} \rightarrow F_5^{2(i)}$
--	--	---

TABLE A.2 – Récapitulatif des identifications de faces pour les métriques symétriques à 6 singularités de type 3

Face	Changement de paramétrage	Identification
$F_1^3 = \{x_1 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\tau_1^3 : F_1^3 \rightarrow F_1^3$
$F_2^3 = \{x_1 = x_2\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\tau_2^3 : F_2^3 \rightarrow F_2^3$
$F_3^3 = \{x_2 = x_3\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\tau_3^3 : F_3^3 \rightarrow F_3^3$
$F_4^3 = \{2x_3 = n\}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\tau_4^3 : F_4^3 \rightarrow F_4^3$

TABLE A.3 – Identifications de faces pour le polyèdre  $\mathcal{P}_t$  obtenu en recollant les composantes de l'espace de modules des métriques à 6 singularités.

Face	Changement de paramétrage	Identification
$F_1^t = \{x_1 = x_2\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\tau_1^t : F_1^t \rightarrow F_1^t$
$F_2^t = \{x_2 = x_3\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\tau_2^t : F_2^t \rightarrow F_2^t$
$F_3^t = \{x_1 + x_2 + x_3 = n\}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\tau_3^t : F_3^t \rightarrow F_3^t$
$F_4^t = \{0 = \sqrt{3}x_1 + n\}$	$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\tau_4^t : F_4^t \rightarrow F_4^t$
$F_5^t = \{x_3 = n + \frac{2\sqrt{3}}{c}x_1\}$	$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & -1 & -2 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & \sqrt{3} & -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\tau_5^t : F_5^t \rightarrow F_5^t$

## A.2 Métriques à 8 singularités

Pour chaque type de métriques, on donne la liste explicite des identifications de faces obtenues.

TABLE A.4 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 0

Face	Changement de paramétrage	Identification
$F_1 = \{x_1 = 0\}$	réflexion par rapport à l'hyperplan	$\gamma_1 : F_1 \rightarrow F_1$
$F_2 = \{x_1 = x_2\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_2 : F_2 \rightarrow F_2$
$F_3 = \{x_2 = x_4\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_3 : F_3 \rightarrow F_3$
$F_4 = \{x_1 = x_3\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_4 : F_4 \rightarrow F_4$



TABLE A.4 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 0 - suite

$F_{51} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 = a - x_3 - x_4 \\ x_2 + x_3 \leq x_1 + x_4 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_1 - x_3 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_1 - x_4 \\ a - x_1 - x_2 \\ b - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{51} : F_{51} \rightarrow F_6$
$F_{52} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 = a - x_3 - x_4 \\ x_1 + x_4 \leq x_2 + x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_2 - x_4 \\ a + b - x_1 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_1 - x_2 \\ b - x_1 - x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_{52} : F_{52} \rightarrow F_{52}$
$F_6 = \{ \sqrt{2}x_1 = b - x_2 - x_3 \}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_2 - x_4 \\ a + b - x_1 - x_3 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_1 - x_4 \\ a - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_6 : F_6 \rightarrow F_{51}$
$F_7 = \{ \sqrt{2}x_1 = b - x_1 - x_4 \}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_1 - x_3 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ b - x_1 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_7 : F_7 \rightarrow F_7$

TABLE A.5 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 1

Face	Changement de paramétrage	Identification
$F_1 = \{x_1 = 0\}$		$\gamma_1 : F_1 \rightarrow F_1$
$F_2 = \{x_2 = 0\}$	réflexion par rapport à l'hyperplan	$\gamma_2 : F_2 \rightarrow F_2$
$F_3 = \{x_3 = 0\}$		$\gamma_3 : F_3 \rightarrow F_3$
$F_4 = \{x_2 + x_3 = b\}$		$\gamma_4 : F_4 \rightarrow F_4$
$F_5 = \{x_3 + x_4 = a\}$		$\gamma_5 : F_5 \rightarrow F_5$
$F_6 = \{x_2 = x_4\}$		$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$F_{71} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 = a \\ x_2 \leq x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a + b - 2x_1 \\ a - x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{71} : F_{71} \rightarrow F_{71}$
$F_{72} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 = a \\ x_3 \leq x_2 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_1 \\ b \\ a - x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_{72} : F_{72} \rightarrow F_{82}$

TABLE A.5 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 1 - suite

$F_{81} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 = b \\ x_3 \leq x_4 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_1 \\ b \\ b - x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_{81} : F_{81} \rightarrow F_{81}$
$F_{82} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 = b \\ x_4 \leq x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a + b - 2x_1 \\ b - x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{82} : F_{82} \rightarrow F_{72}$
$F_{91} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 + x_2 = a \\ a \leq 2x_1 + x_4 - x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_2 - x_4 \\ 2a + b - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ a - x_2 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{91} : F_{91} \rightarrow F_{91}$
$F_{92} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 + x_2 = a \\ 2x_1 + x_4 - x_3 \leq a \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2a + b - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ a - x_2 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_{92} : F_{92} \rightarrow F_{102}$
$F_{101} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 + x_4 = b \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq b \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ b - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_{101} : F_{101} \rightarrow F_{101}$

TABLE A.5 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 1 - suite

$F_{102} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 + x_4 = b \\ b \leq 2x_1 + x_2 - x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_2 - x_4 \\ a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ b - x_4 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_{102} : F_{102} \rightarrow F_{92}$
$F_{111} = \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2} + 2)x_1 + x_3 = a + b \\ b - x_2 \leq a - x_4 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2a + b - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ a + b - 2x_1 - x_3 \\ b - x_2 - x_3 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_{111} : F_{111} \rightarrow F_{111}$
$F_{112} = \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2} + 2)x_1 + x_3 = a + b \\ a - x_4 \leq b - x_2 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ 2a + b - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ a + b - 2x_1 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{112} : F_{112} \rightarrow F_{112}$

TABLE A.6 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 2

Face	Changement de paramétrage	Identification
Pour le polyèdre $\mathcal{P}_{2,i}$		
$F_1 = \{x_1 = 0\}$	réflexion par rapport à l'hyperplan	$\gamma_1 : F_1 \rightarrow F_1$
$F_2 = \{x_3 = 0\}$		$\gamma_2 : F_2 \rightarrow F_2$
$F_3 = \{x_4 = 0\}$		$\gamma_3 : F_3 \rightarrow F_3$
$F_4 = \{x_3 + x_4 = a\}$		$\gamma_4 : F_4 \rightarrow F_4$
$F_5 = \{x_1 = x_2\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_5 : F_5 \rightarrow F_5$
$F_6 = \{2x_2 = a\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a + b - 2x_2 \\ x_1 \\ a - x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_6 : F_6 \rightarrow F_6$
$F_{71} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_2 = b \\ x_3 \leq x_4 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_2 \\ b \\ x_1 \\ x_3 \\ b - x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_{71} : F_{71} \rightarrow G_6$

TABLE A.6 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 2 - suite

$F_{72} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_2 = b \\ x_4 \leq x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a + b - 2x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ b - x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{72} : F_{72} \rightarrow G_5$
$F_8 = \{\sqrt{2}x_1 + x_4 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_2 - x_4 \\ a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ b - x_4 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_8 : F_8 \rightarrow W_5$
$F_9 = \{\sqrt{2}x_2 + x_3 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a + b - 2x_2 - x_3 \\ 2b \\ 2x_1 \\ -b + 2x_2 + x_3 \\ b - 2x_2 + x_3 \\ 2x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_9 : F_9 \rightarrow W_8$
$F_{10} = \{(\sqrt{2} + 2)x_2 + x_4 = a + b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b - x_4 \\ 2a + 2b - 4x_2 \\ 2x_1 \\ a - b + x_4 \\ -a + b + x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{10} : F_{10} \rightarrow W_{10}$
Pour le polyèdre $\mathcal{P}_{2,ii}$		
$G_1 = \{x_1 = 0\}$	réflexion par rapport à l'hyperplan	$\delta_1 : G_1 \rightarrow G_1$

TABLE A.6 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 2 - suite

$G_2 = \{x_2 = 0\}$		$\delta_2 : G_2 \rightarrow G_2$
$G_3 = \{x_1 = x_3\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\delta_3 : G_3 \rightarrow G_3$
$G_4 = \{x_2 = x_4\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\delta_4 : G_4 \rightarrow G_4$
$G_5 = \{2x_3 = a\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_3 \\ a \\ x_1 \\ a - x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\delta_5 : G_5 \rightarrow F_{72}$
$G_6 = \{2x_3 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_3 \\ b \\ x_1 \\ b - x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\delta_6 : G_6 \rightarrow F_{71}$

TABLE A.6 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 2 - suite

$G_7 = \{\sqrt{2}x_3 + x_4 = a\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + 2b - 2x_3 - x_4 \\ 2a \\ 2x_1 \\ a - 2x_3 + x_4 \\ -a + 2x_3 + x_4 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$	$\delta_7 : G_7 \rightarrow W_{91}$
$G_8 = \{\sqrt{2}x_3 + x_2 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a + b - x_2 - 2x_3 \\ 2b \\ 2x_1 \\ b + x_2 - 2x_3 \\ -b + x_2 + 2x_3 \\ 2x_4 \end{pmatrix}$	$\delta_8 : G_8 \rightarrow W_{92}$
$G_9 = \{\sqrt{2}x_1 + x_4 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ b - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix}$	$\delta_9 : G_9 \rightarrow W_6$
Pour le polyèdre $\mathcal{P}_{2,iii}$		
$W_1 = \{x_1 = 0\}$  $W_2 = \{x_4 = 0\}$  $W_3 = \{x_3 + x_4 = a\}$	réflexion par rapport à l'hyperplan	$\omega_1 : W_1 \rightarrow W_1$  $\omega_2 : W_2 \rightarrow W_2$  $\omega_3 : W_3 \rightarrow W_3$



TABLE A.6 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 2 - suite

$W_4 = \{\sqrt{2}x_1 + x_2 + x_3 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_1 - x_3 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_1 - x_2 \\ b - x_1 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$	$\omega_4 : W_4 \rightarrow W_4$
$W_5 = \{\sqrt{2}x_1 + x_2 = a\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2a + b - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ a - x_2 \\ b - x_2 - x_3 \\ a - x_3 - x_4 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix}$	$\omega_5 : W_5 \rightarrow F_8$
$W_6 = \{\sqrt{2}x_1 + x_4 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + 2b - 2x_1 - x_3 - x_4 \\ a + b - x_2 - x_4 \\ b - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_2 - x_3 \\ a + b - 2x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix}$	$\omega_6 : W_6 \rightarrow G_9$
$W_7 = \{b + x_4 = a + 2x_3 + x_2\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b + x_2 - x_4 \\ 2a + 2x_3 \\ 2x_1 \\ a - b + x_2 + x_4 \\ -a + b - x_2 + x_4 \\ 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$	$\omega_7 : W_7 \rightarrow W_7$
$W_8 = \{b = (3 + 2\sqrt{2})x_2 + x_3\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + x_2 \\ b \\ x_1 \\ \frac{1}{2}(b + x_2 - x_3) \\ x_2 + x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\omega_8 : W_8 \rightarrow F_9$

TABLE A.6 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 2 - suite

$W_{91} = \left\{ \begin{array}{l} b = (3 + 2\sqrt{2})x_3 + x_2 \\ x_4 \leq x_2 + x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a + x_3 \\ x_1 \\ x_4 \\ \frac{1}{2}(b - x_2 + x_3) \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$	$\omega_{91} : W_{91} \rightarrow G_7$
$W_{92} = \left\{ \begin{array}{l} b = (3 + 2\sqrt{2})x_3 + x_2 \\ x_2 + x_3 \leq x_4 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + x_3 \\ b \\ x_1 \\ x_2 + x_3 \\ \frac{1}{2}(b - x_2 + x_3) \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\omega_{92} : W_{92} \rightarrow G_8$
$W_{10} = \{b = (2\sqrt{2} - 2)a + x_2 + x_3\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + x_2 \\ a + x_3 \\ x_1 \\ a + \frac{1}{2}(-b + x_2 + x_3) \\ x_4 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$	$\omega_{10} : W_{10} \rightarrow F_{10}$

TABLE A.7 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 3

Face	Changement de paramétrage	Identification
Pour le polyèdre $\mathcal{P}_{3,i}$		
$F_1 = \{x_1 = 0\}$	réflexion par rapport à l'hyperplan	$\gamma_1 : F_1 \rightarrow F_1$
$F_2 = \{x_2 = 0\}$		$\gamma_2 : F_2 \rightarrow F_2$
$F_3 = \{x_3 = 0\}$		$\gamma_3 : F_3 \rightarrow F_3$
$F_4 = \{x_2 = x_4\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_4 : F_4 \rightarrow F_4$
$F_5 = \{2x_3 = a\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a + b - 2x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ a - x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_5 : F_5 \rightarrow F_{71}$
$F_6 = \{2x_3 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a + b - 2x_3 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ b - x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_6 : F_6 \rightarrow F_{72}$

TABLE A.7 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 3 - suite

$F_{71} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_4 = a \\ x_2 \leq x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a + b - 2x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ a - x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{71} : F_{71} \rightarrow F_5$
$F_{72} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_4 = a \\ x_3 \leq x_2 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_4 \\ a \\ x_1 \\ x_3 \\ a - x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_{72} : F_{72} \rightarrow F_6$
$F_8 = \{2x_4 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_4 \\ b \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ b - x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_8 : F_8 \rightarrow F_8$
$F_9 = \{\sqrt{2}x_2 + x_1 = a\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + 2b - x_1 - 2x_2 \\ 2a \\ -a + x_1 + 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_4 \\ a + x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_9 : F_9 \rightarrow G_{101}$
$F_{10} = \{\sqrt{2}x_4 + x_1 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a + b - x_1 - 2x_4 \\ 2b \\ -b + x_1 + 2x_4 \\ 2x_3 \\ 2x_2 \\ b + x_1 - 2x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_{10} : F_9 \rightarrow G_{102}$

TABLE A.7 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 3 - suite

$F_{111} = \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2} + 2)x_3 + x_1 = a + b \\ a \leq b \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b - x_1 \\ 2a + 2b - 4x_3 \\ a - b + x_1 \\ 2x_4 \\ 2x_2 \\ -a + b + x_1 \end{pmatrix}$	$\gamma_{111} : F_{111} \rightarrow G_{111}$
$F_{112} = \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2} + 2)x_3 + x_1 = a + b \\ b \leq a \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b - x_1 \\ 2a + 2b - 4x_3 \\ -a + b + x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_4 \\ a - b + x_1 \end{pmatrix}$	$\gamma_{112} : F_{112} \rightarrow G_{112}$
Pour le polyèdre $\mathcal{P}_{3,ii}$		
$G_1 = \{x_2 = 0\}$ $G_2 = \{x_3 = 0\}$ $G_3 = \{x_1 + x_4 = b\}$ $G_4 = \{x_1 = x_4\}$	réflexion par rapport à l'hyperplan          $\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$	$\delta_1 : G_1 \rightarrow G_1$  $\delta_2 : G_2 \rightarrow G_2$  $\delta_3 : G_3 \rightarrow G_3$    $\delta_4 : G_4 \rightarrow G_4$

TABLE A.7 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 3 - suite

$G_5 = \{2x_2 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_2 \\ b \\ x_1 \\ x_3 \\ b - x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\delta_5 : G_5 \rightarrow G_6$
$G_6 = \{2x_3 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_3 \\ b \\ x_1 \\ b - x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\delta_6 : G_6 \rightarrow G_5$
$G_7 = \{\sqrt{2}x_2 + x_1 = a\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_1 - x_3 \\ 2a + b - x_1 - 2x_2 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ b - x_1 - x_4 \\ a - x_1 \\ a + b - x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$	$\delta_7 : G_7 \rightarrow G_{81}$
$G_{81} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_3 + x_4 = a \\ b \leq -x_1 + 2x_3 + x_4 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_2 - x_4 \\ 2a + b - x_1 - 2x_3 - x_4 \\ a + b - x_2 - 2x_3 - x_4 \\ a - x_4 \\ b - x_1 - x_4 \\ a - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$	$\delta_{81} : G_{81} \rightarrow G_7$
$G_{82} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x_3 + x_4 = a \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 \leq b \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b - x_2 - x_4 \\ 2a + b - x_1 - 2x_3 - x_4 \\ a - x_1 - x_2 \\ b - x_1 - x_4 \\ a - x_4 \\ a + b - x_2 - 2x_3 - x_4 \end{pmatrix}$	$\delta_{82} : G_{82} \rightarrow G_{82}$

TABLE A.7 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 3 - suite

$G_9 = \{(\sqrt{2} + 2)x_2 + x_4 = a + b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + 2b - 2x_2 - x_3 - x_4 \\ 2a + b - x_1 - 2x_2 - x_4 \\ a - x_3 - x_4 \\ a + b - 2x_2 - x_4 \\ b - x_1 - x_4 \\ a + b - x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$	$\delta_9 : G_9 \rightarrow G_9$
$G_{101} = \left\{ \begin{array}{l} b = (3 + 2\sqrt{2})x_1 + x_4 \\ b \leq -x_1 + 2x_3 + x_4 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a + x_1 \\ x_1 + x_4 \\ \frac{1}{2}(b + x_1 - x_4) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\delta_{101} : G_{101} \rightarrow F_9$
$G_{102} = \left\{ \begin{array}{l} b = (3 + 2\sqrt{2})x_1 + x_4 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 \leq b \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + x_1 \\ b \\ x_1 + x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ \frac{1}{2}(b + x_1 - x_4) \end{pmatrix}$	$\delta_{102} : G_{102} \rightarrow F_{10}$
$G_{111} = \left\{ \begin{array}{l} b = (2\sqrt{2} - 2)a + x_1 + x_4 \\ x_3 \leq x_2 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + x_1 \\ a + x_4 \\ x_1 + x_4 \\ x_3 \\ a + \frac{1}{2}(-b + x_1 + x_4) \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\delta_{111} : G_{111} \rightarrow F_{111}$
$G_{112} = \left\{ \begin{array}{l} b = (2\sqrt{2} - 2)a + x_1 + x_4 \\ x_2 \leq x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + x_4 \\ a + x_1 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 \\ a + \frac{1}{2}(-b + x_1 + x_4) \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\delta_{112} : G_{112} \rightarrow F_{112}$

TABLE A.8 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 4

Face	Changement de paramétrage	Identification
$F_1 = \{x_1 = 0\}$	réflexion par rapport à l'hyperplan	$\gamma_1 : F_1 \rightarrow F_1$
$F_2 = \{x_1 = x_2\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_2 : F_2 \rightarrow F_2$
$F_3 = \{x_2 = x_4\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_3 : F_3 \rightarrow F_3$
$F_4 = \{x_1 = x_3\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_4 : F_4 \rightarrow F_4$
$F_5 = \{2x_3 = a\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a + b - 2x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ a - x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_5 : F_5 \rightarrow F_{71}$



TABLE A.8 – Récapitulatif des identifications de faces pour le type 4 - suite

$F_6 = \{2x_3 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a + b - 2x_3 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ b - x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_6 : F_6 \rightarrow F_{72}$
$F_{71} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_4 = a \\ x_2 \leq x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a + b - 2x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ a - x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\gamma_{71} : F_{71} \rightarrow F_5$
$F_{72} = \left\{ \begin{array}{l} 2x_4 = a \\ x_3 \leq x_2 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_4 \\ a \\ x_1 \\ x_3 \\ a - x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\gamma_{72} : F_{72} \rightarrow F_6$
$F_8 = \{2x_4 = b\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - 2x_4 \\ b \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ b - x_4 \end{pmatrix}$	$\gamma_8 : F_8 \rightarrow F_8$

### A.3 Recollement des métriques à 8 singularités

Cette annexe présente les isométries de recollement entre les polyèdres  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_4$ , obtenus en étudiant l'espace de modules des métriques à 8 singularités.

TABLE A.9 – Isométries de recollement entre les polyèdres  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_4$ , associés aux métriques à 8 singularités.

Face	Changement de paramétrage	Identification
Recollement à partir du polyèdre $\mathcal{P}_0$		
$F_1^0 = \{x_1 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$r_{0,1 1,1} : F_1^0 \rightarrow F_1^1$
Recollement à partir du polyèdre $\mathcal{P}_1$		
$F_1^1 = \{x_1 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$r_{1,1 0,1} : F_1^1 \rightarrow F_1^0$
$F_2^1 = \{x_2 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{1,2 2i,1} : F_2^1 \rightarrow F_1^{2,i}$

TABLE A.9 – Isométries de recollement - suite

$F_3^1 = \{x_3 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$r_{1,3 2ii,1} : F_3^1 \rightarrow F_1^{2,ii}$
$F_4^1 = \{x_2 + x_3 = b\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$r_{1,4 2iii,1,2} : F_4^1 \rightarrow F_{1,1}^{2,iii}$
$F_5^1 = \{x_3 + x_4 = a\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{1,5 2iii,1,1} : F_5^1 \rightarrow F_{1,2}^{2,iii}$
Recollement à partir du polyèdre $\mathcal{P}_{2,i}$		
$F_1^{2,i} = \{x_1 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{2i,1 1,2} : F_1^{2,i} \rightarrow F_2^1$

TABLE A.9 – Isométries de recollement - suite

$F_2^{2,i} = \{x_3 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{2i,2 3i,2_2} : F_2^{2,i} \rightarrow F_{2,2}^{3,i}$
$F_3^{2,i} = \{x_4 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{2i,3 3i,2_1} : F_3^{2,i} \rightarrow F_{2,1}^{3,i}$
$F_{4,1}^{2,i} = \begin{cases} x_3 + x_4 = a \\ x_3 \leq x_4 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$	$r_{2i,4_1 3ii,3_1} : F_{4,1}^{2,i} \rightarrow F_{3,1}^{3,ii}$
$F_{4,2}^{2,i} = \begin{cases} x_3 + x_4 = a \\ x_4 \leq x_3 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$	$r_{2i,4_2 3ii,3_2} : F_{4,2}^{2,i} \rightarrow F_{3,2}^{3,ii}$
Recollement à partir du polyèdre $\mathcal{P}_{2,ii}$		

TABLE A.9 – Isométries de recollement - suite

$F_1^{2,ii} = \{x_1 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$r_{2ii,1 1,3} : F_1^{2,ii} \rightarrow F_3^1$
$F_2^{2,ii} = \{x_2 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{2ii,2 3i,3} : F_2^{2,ii} \rightarrow F_3^{3,i}$
Recollement à partir du polyèdre $\mathcal{P}_{2,iii}$		
$F_{1,1}^{2,iii} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 + x_4 \leq x_1 + x_2 \end{array} \right\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$r_{2iii,1 1,4} : F_{1,1}^{2,iii} \rightarrow F_4^1$
$F_{1,2}^{2,iii} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 \leq x_3 + x_4 \end{array} \right\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{2iii,1_2 1,5} : F_{1,2}^{2,iii} \rightarrow F_5^1$

TABLE A.9 – Isométries de recollement - suite

$F_{2,1}^{2,iii} = \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_2 \leq x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{2iii,2_1 3ii,2_1} : F_{2,1}^{2,iii} \rightarrow F_{2,1}^{3,ii}$
$F_{2,2}^{2,iii} = \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 \leq x_2 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{2iii,2_2 3ii,1_1} : F_{2,2}^{2,iii} \rightarrow F_{1,1}^{3,ii}$
$F_{3,1}^{2,iii} = \left\{ \begin{array}{l} x_3 + x_4 = a \\ a - x_2 \leq b - x_4 \end{array} \right\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$r_{2iii,3_1 3ii,2_2} : F_{3,1}^{2,iii} \rightarrow F_{2,2}^{3,ii}$
$F_{3,2}^{2,iii} = \left\{ \begin{array}{l} x_3 + x_4 = a \\ b - x_4 \leq a - x_2 \end{array} \right\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{2iii,3_2 3ii,1_2} : F_{3,2}^{2,iii} \rightarrow F_{1,2}^{3,ii}$
Recollement à partir du polyèdre $\mathcal{P}_{3,i}$		

TABLE A.9 – Isométries de recollement - suite

$F_1^{3,i} = \{x_1 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$r_{3i,1 4,1} : F_1^{3,i} \rightarrow F_1^4$
$F_{2,1}^{3,i} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 \leq x_4 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{3i,2_1 2i,3} : F_{2,1}^{3,i} \rightarrow F_3^{2,i}$
$F_{2,2}^{3,i} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 \leq x_3 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{3i,2_2 2i,2} : F_{2,2}^{3,i} \rightarrow F_2^{2,i}$
$F_3^{3,i} = \{x_3 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{3i,3 2ii,2} : F_3^{3,i} \rightarrow F_2^{2,ii}$
Recollement à partir du polyèdre $\mathcal{P}_{3,ii}$		

TABLE A.9 – Isométries de recollement - suite

$F_{1,1}^{3,ii} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 + \sqrt{2}x_3 + x_4 \leq b \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{3ii,1_1 2iii,2_2} : F_{1,1}^{3,ii} \rightarrow F_{2,2}^{2,iii}$
$F_{1,2}^{3,ii} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ b \leq x_1 + \sqrt{2}x_3 + x_4 \end{array} \right\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$r_{3ii,1_2 2iii,3_2} : F_{1,2}^{3,ii} \rightarrow F_{3,2}^{2,iii}$
$F_{2,1}^{3,ii} = \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_4 \leq b \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$	$r_{3ii,2_1 2iii,2_1} : F_{2,1}^{3,ii} \rightarrow F_{2,1}^{2,iii}$
$F_{2,2}^{3,ii} = \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ b \leq x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_4 \end{array} \right\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$	$r_{3ii,2_2 2iii,3_1} : F_{2,2}^{3,ii} \rightarrow F_{3,1}^{2,iii}$
$F_{3,1}^{3,ii} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_4 = b \\ x_3 \leq x_2 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	$r_{3ii,3_1 2i,4_1} : F_{3,1}^{3,ii} \rightarrow F_{4,1}^{2,i}$



TABLE A.9 – Isométries de recollement - suite

$F_{3,2}^{3,ii} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_4 = b \\ x_2 \leq x_3 \end{array} \right\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	$r_{3ii,3_2 2i,4_2} : F_{3,2}^{3,ii} \rightarrow F_{4,2}^{2,i}$
Recollement à partir du polyèdre $\mathcal{P}_4$		
$F_1^4 = \{x_1 = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$r_{4,1 3i,1} : F_1^4 \rightarrow F_1^{3,i}$



## Annexe B

# Angles dièdres dans les polyèdres $\mathcal{P}_0$ à $\mathcal{P}_4$

Cette annexe donne les angles dièdres dans les polyèdres décrivant l'espace de modules des métriques à 8 singularités, qui ne sont pas de Coxeter. On donne la matrice des angles plutôt que la matrice de Gram pour souligner les angles qui ne sont pas des multiples rationnels de  $\pi$ .

**Polyèdre  $\mathcal{P}_0$**  Les angles dièdres sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{8} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \pi - \arccos\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \arccos\left(\frac{1}{4}\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi - \arccos\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \pi - \arccos\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{3} & \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





**Polyèdre  $\mathcal{P}_{3,i}$**  Les angles dièdres sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & \frac{2\pi}{3} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{3} & \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) & \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{3\pi}{4} & \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Polyèdre  $\mathcal{P}_{3,ii}$**  Les angles dièdres sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & -1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{2\pi}{3} & \frac{\pi}{3} & \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \alpha & \frac{\pi}{3} & \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) & \frac{\pi}{2} & \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{3} & \alpha & \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) & \frac{\pi}{2} & \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\alpha$  (éléments de coordonnée (7, 5) et (8, 6) de la matrice) représente l'angle  $\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ .

**Polyèdre  $\mathcal{P}_4$**  Les angles dièdres sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





## Annexe C

# Présentations des groupes $\Gamma_1$ à $\Gamma_4$

Les polyèdres construits lors de l'étude des métriques à 8 singularités ne sont pas de Coxeter, et leurs identifications de faces ne sont en général pas les réflexions par rapport aux faces du polyèdres. Les présentations des groupes engendrés par ces identifications de faces sont donc plus compliquées que des présentations de Coxeter. Un fichier GAP contenant ces présentations peut être fourni si besoin.

**Présentation du groupe  $\Gamma_1$**  Les relations de paires et relations de cycles donnent une présentation pour  $\Gamma_1$ , le groupe engendré par les identifications de faces  $\tau_j^1$ . Pour plus de lisibilité, on note  $\tau_j^1$  par le numéro  $j$  ( $\tau_{11,1}^1$  et  $\tau_{11,2}^1$  sont notées respectivement  $11_1$  et  $11_2$ , et de même pour les autres paires de faces coplanaires). La présentation obtenue après vérification des hypothèses de Poincaré est la suivante :

générateurs :  $1, \dots, 6, 7_1, 7_2, \dots, 11_1, 11_2$

$$\text{relations : } \left\{ \begin{array}{l} 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, (7_1)^2, (7_2 \cdot 8_2), (8_1)^2, \\ (9_1)^2, (9_2 \cdot 10_2), (10_1)^2, (11_1)^2, (11_2)^2, \\ (1 \cdot 2)^2, (3 \cdot 2)^2, (3 \cdot 1)^2, (4 \cdot 2)^4, (4 \cdot 1)^2, (5 \cdot 4)^2, \\ (5 \cdot 3)^4, (5 \cdot 2)^2, (5 \cdot 1)^2, (6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5), (6 \cdot 3)^2, \\ (6 \cdot 2)^4, (6 \cdot 1)^2, (8_2 \cdot 6 \cdot 7_1), (7_1 \cdot 5)^2, (7_1 \cdot 2)^2, \\ (8_2 \cdot 8_1 \cdot 6), (8_2 \cdot 4 \cdot 7_2 \cdot 5), (8_2 \cdot 2 \cdot 7_2 \cdot 3), (8_1 \cdot 8_2 \cdot 7_1), \\ (8_1 \cdot 2 \cdot 8_1 \cdot 3), (9_1 \cdot 6 \cdot 9_2), (9_1 \cdot 9_2 \cdot 7_1), (9_1 \cdot 10_1 \cdot 7_2), \\ (9_1 \cdot 3 \cdot 9_1 \cdot 5), (10_2 \cdot 10_1 \cdot 6), (10_2 \cdot 3 \cdot 9_2 \cdot 5), \\ (10_1 \cdot 8_1 \cdot 9_2), (10_1 \cdot 11_2 \cdot 7_1), (10_1 \cdot 11_1 \cdot 7_2), (10_1 \cdot 2 \cdot 10_1 \cdot 5), \\ (10_1 \cdot 3 \cdot 10_1 \cdot 4), (10_1 \cdot 1)^4, (9_2 \cdot 11_2 \cdot 7_2), (11_1 \cdot 6 \cdot 11_2), \\ (11_1 \cdot 2 \cdot 11_1 \cdot 4), (11_2 \cdot 2 \cdot 11_2 \cdot 5) \end{array} \right.$$

Les deux premières lignes sont les relations de paires, le reste est obtenu par l'étude des cycles d'arêtes.

**Présentation du groupe  $\Gamma_2$**  Le groupe  $\Gamma_2$  est construit à partir des identifications de faces des polyèdres  $\mathcal{P}_{2,i}$ ,  $\mathcal{P}_{2,ii}$  et  $\mathcal{P}_{2,iii}$ , modifiées par les isométries de recollement  $\tau_5^{2,ii}$  et  $\tau_{10}^{2,iii}$ , comme décrit section 2.4.1.4. Notons  $fj$  les générateurs de  $\Gamma_2$  provenant des identifications de faces  $\tau_j^{2,i}$  de  $\mathcal{P}_{2,i}$ ,  $sk$  ceux provenant des identifications de faces  $\tau_k^{2,ii}$  de  $\mathcal{P}_{2,ii}$  et  $tl$  ceux provenant de  $\mathcal{P}_{2,iii}$ . Les identifications de faces associées à des faces coplanaires sont distinguées par des indices 1 ou 2 :  $\tau_{7,1}^{2,i}$ , par exemple, est notée  $f7_1$ . Les relations de paires et de cycles donnent alors la présentation suivante pour  $\Gamma_2$  :

générateurs :  $f1, \dots, f7_1, f8, f9, s1, \dots, s4, s6, \dots, s9, t1, \dots, t9_1, t9_2$

$$\text{relations : } \left\{ \begin{array}{l} f1^2, f2^2, f3^2, f4^2, f5^2, f6^2, (f7_1 \cdot s6), s1^2, s2^2, s3^2, s4^2, (s7 \cdot t9_1), \\ (s8 \cdot t9_2), (s9 \cdot t6), t1^2, t2^2, t3^2, t4^2, t7^2, (t5 \cdot f8), (t8 \cdot f9), \\ (f1 \cdot f2)^2, (f1 \cdot f3)^2, (f1 \cdot f4)^2, (f1 \cdot f5)^4, (f1 \cdot f6)^2, \\ (f1 \cdot s6 \cdot s1 \cdot f7_1), (f1 \cdot s1), (f1 \cdot t5 \cdot t1 \cdot f8)^2, \\ (f1 \cdot t8 \cdot t1 \cdot f9), (f1 \cdot t1), (f2 \cdot f3)^2, (f2 \cdot f4)^4, (f2 \cdot f5 \cdot f3 \cdot f5), \\ (f2 \cdot f6 \cdot f3 \cdot f6), (f2 \cdot s6 \cdot s2 \cdot f7_1), (f2 \cdot t5 \cdot t3 \cdot f8), (f2 \cdot t2), \\ (f3 \cdot f4)^4, (f3 \cdot s2), (f3 \cdot t8 \cdot t2 \cdot f9), (f4 \cdot f5)^2, (f4 \cdot f6)^2, \\ (f4 \cdot t5 \cdot t2 \cdot f8), (f4 \cdot t8 \cdot t3 \cdot f9), (f4 \cdot t3), (f5 \cdot f6)^4, \\ (f5 \cdot s3 \cdot f7_1)^2, (f5 \cdot t8 \cdot t4 \cdot f8), (f6 \cdot f7_1), (f6 \cdot f9), (s6 \cdot s4), \\ (s6 \cdot t6 \cdot t7 \cdot f8), (s6 \cdot t9_2 \cdot f9), (t9_1 \cdot f9), (s6 \cdot t9_1), \\ (t5 \cdot s7 \cdot t6 \cdot f9), t5^2, (t8 \cdot t7), (s1 \cdot s2)^2, (s1 \cdot s3)^4, \\ (s1 \cdot s4)^2, (s1 \cdot t9_1 \cdot t1 \cdot s7), (s1 \cdot t9_2 \cdot t1 \cdot s8), \\ (s1 \cdot t6 \cdot t1 \cdot s9)^2, (s2 \cdot s3)^2, (s2 \cdot s4)^4, (s2 \cdot t9_1 \cdot t2 \cdot s7), \\ (s2 \cdot t6 \cdot t3 \cdot s9), (s3 \cdot s4)^2, (s3 \cdot t6 \cdot t4 \cdot s7), (s4 \cdot t9_2 \cdot s7), \\ (t9_1 \cdot t7 \cdot s8), (t9_2 \cdot s9)^2, (t1 \cdot t2)^2, (t1 \cdot t3)^2, (t1 \cdot t4)^4, \\ (t1 \cdot t7)^2, (t2 \cdot t3)^4, (t2 \cdot t4 \cdot t3 \cdot t4), (t3 \cdot t7)^2 \end{array} \right.$$

**Présentation du groupe  $\Gamma_3$**  Le groupe  $\Gamma_3$  est construit à partir des identifications de faces des polyèdres  $\mathcal{P}_{3,i}$  et  $\mathcal{P}_{3,ii}$ , modifiées par l'isométrie de recollement  $\tau_{11,2}^{3,ii}$ , comme décrit section 2.4.1.5. Notons  $fj$  les générateurs de  $\Gamma_3$  provenant des identifications de faces  $\tau_j^{3,i}$  de  $\mathcal{P}_{3,i}$ , et  $sk$  ceux provenant des identifications de faces  $\tau_k^{3,ii}$  de  $\mathcal{P}_{3,ii}$ . Les identifications de faces associées à des faces coplanaires sont distinguées par un indice 1 ou 2 :  $\tau_{7,1}^{3,i}$  est notée par exemple  $f7_1$ , et  $\tau_{7,2}^{3,i}$  est notée  $f7_2$ . Les relations de paires et de cycles donnent alors la présentation suivante pour  $\Gamma_3$  :

générateurs :  $f_1, \dots, f_{11_1}, s_1, \dots, s_{11_1}$

$$\text{relations : } \left\{ \begin{array}{l} f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2, (f_5 \cdot f_{7_1}), (f_6 \cdot f_{7_2}), f_8^2, (f_9 \cdot s_{10_1}), (f_{10} \cdot s_{10_2}), \\ (f_{11_1} \cdot s_{11_1}), s_1^2, s_2^2, s_3^2, s_4^2, (s_5 \cdot s_6), (s_7 \cdot s_{8_1}), (s_{8_2})^2, s_9^2, \\ (f_2 \cdot f_1)^2, (f_3 \cdot f_2)^2, (f_3 \cdot f_1)^2, (f_4 \cdot f_3)^2, (f_4 \cdot f_2)^4, (f_4 \cdot f_1)^2, \\ (f_{7_1} \cdot f_6 \cdot f_4), (f_{7_1} \cdot f_2 \cdot f_5 \cdot f_2), (f_{7_1} \cdot f_1 \cdot f_5 \cdot f_1), (f_{7_2} \cdot f_8 \cdot f_5), \\ (f_{7_2} \cdot f_3 \cdot f_6 \cdot f_2), (f_{7_2} \cdot f_1 \cdot f_6 \cdot f_1), (f_6 \cdot f_8 \cdot f_4)^2, (f_8 \cdot f_2 \cdot f_8 \cdot f_3), \\ f_5^4, (f_8 \cdot f_1)^2, s_{10_1} \cdot s_5 \cdot f_9 \cdot f_{7_1}, s_{10_1} \cdot s_5 \cdot f_{10} \cdot f_{7_2}, s_{10_1} \cdot f_{10} \cdot f_4, \\ (s_{10_1} \cdot s_1 \cdot f_9 \cdot f_3), (s_{10_1} \cdot s_3 \cdot f_9 \cdot f_2)^2, (s_{10_2} \cdot s_{8_2} \cdot s_{8_1} \cdot f_9), \\ (s_{10_2} \cdot s_4 \cdot f_{10} \cdot f_8), (s_{10_2} \cdot f_{11_1} \cdot f_{7_1}), (s_{10_2} \cdot s_1 \cdot f_{10} \cdot f_3), \\ (s_{10_2} \cdot s_2 \cdot f_{10} \cdot f_2), (s_{11_1} \cdot f_4), (s_{11_1} \cdot s_2 \cdot f_{11_1} \cdot f_2), (s_1 \cdot f_2), \\ (s_{11_1} \cdot s_{8_1} \cdot s_9 \cdot f_{10}), (s_{11_1} \cdot s_{8_2} \cdot s_9 \cdot f_9), (s_{8_2} \cdot s_9 \cdot f_{10}), (s_2 \cdot s_1)^2, \\ (s_{10_2} \cdot f_{7_2}), (s_3 \cdot s_2)^2, (s_3 \cdot s_1)^2, (s_4 \cdot s_3)^2, (s_4 \cdot s_1 \cdot s_4 \cdot s_2), (s_6 \cdot s_4)^2, \\ (s_{11_1} \cdot s_4), (s_6 \cdot s_3 \cdot s_5 \cdot s_3), (s_6 \cdot s_1 \cdot s_5 \cdot s_2), (s_5)^4, (s_{8_1} \cdot s_{8_2} \cdot s_4), \\ (s_{8_1} \cdot s_1 \cdot s_7 \cdot s_3), (s_{8_1} \cdot s_3 \cdot s_7 \cdot s_2), (s_7 \cdot s_9 \cdot s_6), \\ (s_{8_2} \cdot s_1 \cdot s_{8_2} \cdot s_3), (s_{8_2} \cdot s_2)^4, (s_9 \cdot s_3 \cdot s_9 \cdot s_2) \end{array} \right.$$

**Présentation du groupe  $\Gamma_4$**  La présentation du groupe  $\Gamma_4$  à partir des relations de paires et de cycles est la suivante (où le générateurs  $\tau_j^4$  est noté  $j$  pour plus de lisibilité) :

$$\left\langle 1, \dots, 8 \left| \begin{array}{l} 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, (5 \cdot 7_1), (6 \cdot 7_2), 8^2, \\ (1 \cdot 2)^4, (2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3), (1 \cdot 3)^2, (3 \cdot 4)^2, (1 \cdot 4)^4, (3 \cdot 7_2 \cdot 5), (2 \cdot 5)^2, (1 \cdot 8)^2, \\ (1 \cdot 7_1 \cdot 1 \cdot 5), (7_1 \cdot 8 \cdot 6), (2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6), (1 \cdot 7_2 \cdot 1 \cdot 6), (7_1)^4, (3 \cdot 8 \cdot 7_2)^2 \end{array} \right. \right\rangle$$



# Bibliographie

- [ACT07] Daniel Allcock, James A. Carlson, and Domingo Toledo. Hyperbolic geometry and the moduli space of real binary sextics. In *Arithmetic and geometry around hypergeometric functions*, volume 260 of *Progress in Mathematics*, pages 1–22. Birkhäuser, Basel, 2007.
- [ACT10] Daniel Allcock, James A. Carlson, and Domingo Toledo. Hyperbolic geometry and moduli space of real cubic surfaces. *Annales scientifiques de l'É.N.S., Série 4*, 43(1) :69–115, 2010.
- [Ahl66] Lars V. Ahlfors. Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 55 :251–254, 1966.
- [Ale05] Alexander D. Alexandrov. *Convex Polyhedra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2005.
- [And83] Michael T. Anderson. The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature. *Journal of Differential Geometry*, 18(4) :701–721, 1983.
- [And99] James W. Anderson. *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, 1999.
- [AW43] Carl B. Allendoerfer and André Weil. The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. *Transactions of the American Mathematical Society*, 53(1) :101–129, 1943.
- [AY98] François Apéry and Masaaki Yoshida. Pentagonal structure of the configuration space of five points in the real projective line. *Kyushu Journal of Mathematics*, 52 :1–14, 1998.
- [AY99] Kazushi Ahara and Kinji Yamada. Shapes of hexagrams. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 6(3) :539–558, 1999.
- [Ben92] Nadia Benakli. *Polyèdres hyperboliques, passage du local au global*. PhD thesis, Université d'Orsay, 1992.
- [Ben09] Yves Benoist. Five lectures on lattices in semisimple Lie groups. In *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, volume 18 of *Séminaires et Congrès*, pages 117–176. Société Mathématique de France, 2009.
- [Bes88] Mladen Bestvina. Characterizing  $k$ -dimensional universal Menger compacta. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 71(380), 1988.
- [BG92] Christophe Bavard and Étienne Ghys. Polygones du plan et polyèdres hyperboliques. *Geometriae Dedicata*, 43(2) :207–224, 1992.
- [BGS85] Werner Ballman, Michael Gromov, and Viktor Schroeder. *Manifolds of non-positive curvature*, volume 61 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Basel, 1985.

- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer-Verlag, 1999.
- [BHC62] Armand Borel and Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. *Annals of Mathematics*, 75(3) :485–535, 1962.
- [BM74] Alan F. Beardon and Bernard Maskit. Limit sets of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra. *Acta Mathematica*, 132 :1–12, 1974.
- [Bou97a] Marc Bourdon. Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow. *Geometric and Functional Analysis*, 7 :245–268, 1997.
- [Bou97b] Marc Bourdon. Sur la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite d'une famille de sous-groupes convexes co-compacts. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 325(1) :1097–1100, 1997.
- [Bow93] Brian H. Bowditch. Geometrical finiteness for hyperbolic groups. *Journal of Functional Analysis*, 113(2) :245–317, 1993.
- [Bow95] Brian H. Bowditch. Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Mathematical Journal*, 77(1) :229–274, 1995.
- [BP99] Marc Bourdon and Hervé Pajot. Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(8) :2315–2324, 1999.
- [BP00] Marc Bourdon and Hervé Pajot. Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 75 :701–736, 2000.
- [CF67] George E. Cooke and Ross L. Finney. *Homology of cell complexes*. Princeton University Press, 1967.
- [Chu06] Kenneth C.K. Chu. *The moduli space of real binary octics*. PhD thesis, University of Utah, 2006.
- [Chu11] Kenneth C.K. Chu. On the geometry of the moduli space of real binary octics. *Canadian Journal of Mathematics*, 2011.
- [Cor92] Kevin Corlette. Archimedean supprigidity and hyperbolic geometry. *Annals of Mathematics (2)*, 135(1) :165–182, 1992.
- [Der05] Martin Deraux. Dirichlet domains for the Mostow lattices. *Experimental Mathematics*, 14 :467–490, 2005.
- [DM86] Pierre Deligne and George D. Mostow. Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 63 :5–89, 1986.
- [DO07] Jan Dymara and Damian Osajda. Boundaries of right-angled hyperbolic buildings. *Fundamenta Mathematicae*, 197 :123–165, 2007.
- [DPP15] Martin Deraux, John R. Parker, and Julien Paupert. New non-arithmetic complex hyperbolic lattices. *Inventiones Mathematicae*, 2015. Available from : <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-015-0600-1>.
- [Eme09] Vincent Emery. *Du volume des quotients arithmétiques de l'espace hyperbolique*. PhD thesis, Université de Fribourg, 2009.
- [EP94] David B. A. Epstein and Carlo Petronio. An exposition of Poincaré's polyhedron theorem. *L'Enseignement Mathématique (2)*, 40 :113–170, 1994.
- [Fil11] François Fillastre. From spaces of polygons to spaces of polyhedra following Bavard, Ghys and Thurston. *L'Enseignement Mathématique (2)*, 57 :23–56, 2011.

- [FP04] Elisha Falbel and Julien Paupert. Fundamental domains for finite subgroups in  $u(2)$  and configurations of Lagrangians. *Geometriae Dedicata*, 109 :221–238, 2004.
- [FZ99] Elisha Falbel and Valentino Zocca. A Poincaré polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 516 :133–158, 1999.
- [GAP08] The GAP-Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*, 2008. Available from : <http://www.gap-system.org>.
- [GdlH90] Etienne Ghys and Pierre de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1990.
- [Gir21] Georges Giraud. Sur certaines fonctions automorphes de deux variables. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 38 :43–164, 1921.
- [Gol99] William M. Goldman. *Complex Hyperbolic Geometry*. Oxford University Press, 1999.
- [GPS87] Michael Gromov and Ilya Piatetski-Shapiro. Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 66 :93–103, 1987.
- [GR70] H. Garland and M.S. Raghunathan. Fundamental domains for lattices in  $\mathbb{R}$ -rank 1 Lie groups. *Annals of Mathematics (2)*, 92 :279–326, 1970.
- [GS92] Michael Gromov and Richard Schoen. Harmonic maps into singular spaces and  $p$ -adic superrigidity for lattices in groups of rank one. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 76 :165–246, 1992.
- [Gui04] Olivier Guichard. Groupes plongés quasi isométriquement dans un groupe de Lie. *Mathematische Annalen*, 330(2) :331–351, 2004.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hel78] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [IH90] Hanz-Christoph Im Hof. Napier cycles and hyperbolic Coxeter groups. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique Série A*, 42(3) :523–545, 1990.
- [JKRT02] Norman W. Johnson, Ruth Kellerhals, John G. Ratcliffe, and Steven T. Tschantz. Commensurability classes of hyperbolic Coxeter groups. *Linear Algebra and its Applications*, 345 :119–147, 2002.
- [Kap01] Michael Kapovich. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 2001.
- [Kap08] Michael Kapovich. Kleinian groups in higher dimensions. In *Geometry and dynamics of groups and spaces. In memory of Alexander Reznikov*, volume 265 of *Progress in Mathematics*, pages 487–564. Birkhäuser, 2008.
- [KB02] Ilya Kapovich and Nadia Benakli. Boundaries of hyperbolic groups. In *Combinatorial and Geometric Group Theory*, volume 296 of *Contemporary Mathematics*, pages 39–93. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2002.
- [KK00] Michael Kapovich and Bruce Kleiner. Hyperbolic groups with low-dimensional boundary. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 33(5) :647–669, 2000.
- [KM95] Michael Kapovich and John Millson. On the moduli space of polygons in the Euclidean plane. *Journal of Differential Geometry*, 42 :133–164, 1995.

- [Kna02] Anthony W. Knaapp. *Lie groups Beyond an introduction*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 2002.
- [KNY99] Sadayoshi Kojima, Haruko Nishi, and Yasushi Yamashita. Configuration spaces of points on the circle and hyperbolic Dehn fillings. *Topology*, 38(3) :497–516, 1999.
- [Koj01] Sadayoshi Kojima. Complex hyperbolic cone structures on the configuration spaces. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, 32(suppl. 1) :149–163, 2001.
- [KY93] Sadayoshi Kojima and Yasushi Yamashita. Shapes of stars. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 117(3) :845–851, 1993.
- [Loo07] Eduard Looijenga. Uniformization by Lauricella functions – an overview of the theory of Deligne-Mostow. In *Arithmetic and geometry around hypergeometric functions*, volume 260 of *Progress in Mathematics*, pages 207–244. Birkhäuser, Basel, 2007.
- [LV93] R. Le Vavasseur. Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables  $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ . *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 7(3-4) :1–205, 1893.
- [Mar74] Albert Marden. The geometry of finitely generated Kleinian groups. *Annals of Mathematics (2)*, 99(3) :383–462, 1974.
- [Mar77] Gregori A. Margulis. Discrete groups of motion of manifolds of nonpositive curvature. *American Mathematical Society Translations*, 109 :33–45, 1977.
- [Mas88] Bernard Maskit. *Kleinian Groups*, volume 287 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1988.
- [Men30] Karl Menger. Untersuchungen über allgemeine Metrik. Vierte Untersuchung. Zur Metrik der Kurven. *Mathematische Annalen*, 103 :466–501, 1930.
- [MN00] Bernard Morin and Haruko Nishi. Hyperbolic structures on the configuration space of six points in the projective line. *Advances in Mathematics*, 150 :202–232, 2000.
- [Mos80] George D. Mostow. On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. *Pacific Journal of Mathematics*, 86(1) :171–276, 1980.
- [Mos86] George D. Mostow. Generalized picard lattices arising from half-integral conditions. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, 63 :91–106, 1986.
- [MSW02] David Mumford, Caroline Series, and David Wright. *Indra's pearls : the vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, 2002.
- [MY93] Keiji Matsumoto and Masaaki Yoshida. Configuration space of 8 points on the projective line and a 5-dimensional Picard modular group. *Compositio Mathematica*, 86(3) :265–280, 1993.
- [Neu81] Joachim Neubüser. An elementary introduction to coset table methods in computational group theory. In *Groups - St Andrews*, volume 71 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 1–45, 1981.
- [Par] John R. Parker. *Complex Hyperbolic Kleinian Groups*. To appear. Cambridge University Press.
- [Par06] John R. Parker. Cone metrics on the sphere and Livné's lattices. *Acta Mathematica*, 196 :1–64, 2006.



- [Par09] John R. Parker. Complex hyperbolic lattices. *Contemporary Mathematics*, 501 :1–42, 2009.
- [Par15] Parisse, Bernard and De Graeve, Renée. *Giac/Xcas, version 1.2.0*, 2015. Available from : [http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac\\_fr.html](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html).
- [PB15] John R. Parker and Richard K. Boadi. Mostow’s lattices and cone metrics on the sphere. *Advances in Geometry*, 15 :27–53, 2015.
- [Pic85] Émile Picard. Sur les fonctions hyperfuchsienues provenant des séries hypergéométriques de deux variables. *Annales scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, 2 :357–384, 1885.
- [Rat06] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, second edition, 2006.
- [Ril83] Robert Riley. Applications of a computer implementation of Poincaré’s theorem on fundamental polyhedra. *Mathematics of Computation*, 40(162) :607–632, 1983.
- [Rou98] Fabrice Rouillier. Solving zero-dimensional polynomial systems through the rational univariate representation. Technical report, INRIA, 1998.
- [Sch73] H.A. Schwarz. Über diejenige fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 75 :292–335, 1873.
- [Sch02] Richard E. Schwartz. Complex hyperbolic triangle groups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, volume II, pages 339–349, 2002.
- [Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer-Verlag, 1980.
- [Ter83] Toshiaki Terada. Fonctions hypergéométriques  $F_1$  et fonctions automorphes I. *Journal of the mathematical society of Japan*, 35(3) :451–475, 1983.
- [Thu80] William P. Thurston. The geometry and topology of three-manifolds. Princeton Lecture Notes, 1980.
- [Thu98] William P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. *Geometry and Topology Monographs*, 1 :511–549, 1998.
- [Tro86] Marc Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *L’enseignement Mathématique (2)*, 32 :79–94, 1986.
- [Tro91] Marc Troyanov. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Transactions of the American Mathematical Society*, 324(2) :793–821, 1991.
- [Tro07] Marc Troyanov. On the moduli space of singular Euclidean surfaces. In *Handbook of Teichmüller theory*, volume 1 of *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, Vol. 11*, pages 507–540. European Mathematical Society, Zürich, 2007.
- [Van14] Robert J. Vanderbei. *Linear programming : foundations and extensions*. International Series in Operation Research & Management Science. Springer-Verlag, fourth edition, 2014.
- [Vee93] William A. Veech. Flat surfaces. *American Journal of Mathematics*, 115(3) :589–689, 1993.

- [Vin75] Ernest B. Vinberg. Some arithmetical discrete groups in Lobačevskii spaces. In *Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973)*, Oxford University Press, Bombay, pages 323–348, 1975.
- [Wei62] André Weil. On discrete subgroups of Lie groups II. *Annals of Mathematics*, 75 :578–602, 1962.
- [Whi49] John H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy I. *Bull. Am. Math. Soc.*, 55 :213–245, 1949.
- [Wil06] Pierre Will. *Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans  $PU(2,1)$* . PhD thesis, Université Paris VI, 2006.
- [WM15] Dave Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*. Deductive Press, 2015.
- [YNK02] Yasushi Yamashita, Haruko Nishi, and Sadayoshi Kojima. Configuration spaces of points on the circle and hyperbolic Dehn fillings, II. *Geometriae Dedicata*, 89 :143–157, 2002.
- [Yos98] Masaaki Yoshida. The real loci of the configuration space of six points on the projective line and a Picard modular 3-fold. *Kumamoto Journal of Mathematics*, 11 :43–67, 1998.
- [Zim84] Robert J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, 1984.

# Curriculum Vitae

## Données personnelles

Nom : Jordane Granier

Date et lieu de naissance : 01/04/1989 à Montpellier (France)

Nationalité : Française

## Formation

2011 - 2015 : Thèse en cotutelle dans les universités de Grenoble Alpes (France) et Fribourg (Suisse)

Directeurs : Martin Deraux et Ruth Kellerhals

2010 - 2011 : Deuxième année de Master en Mathématiques, Université Grenoble Alpes (France)

Travail de Master : “ Géométrie hyperbolique et espaces de modules de métriques et de polygones”, dirigé par Martin Deraux

2009 - 2010 : Agrégation de Mathématiques, E.N.S. Lyon (France)

2008 - 2009 : Première année de Master en Mathématiques, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Allemagne)

2007 - 2008 : Troisième année de Licence en Mathématiques, E.N.S. Lyon (France)

2005 - 2007 : Classes préparatoires aux grandes écoles, Lycée du Parc, Lyon (France)

## Langues

Français : langue maternelle

Anglais : courant

Allemand : courant