UNIVERITÉ DE FRIBOURG SUISSE
UNIVERSITÄT FREIBURG SCHWEIZ

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Algèbre et géométrie II - SP 2010

Série 24

A rendre le vendredi 21 mai avant midi

http://homeweb4.unifr.ch/wiemelem/pub/algebra

Exercice 1. Soit E connexe par arc et localement connexe par arc, $p : E \to B$ un revêtement, $p(e_0) = b_0$, $F = p^{-1}(b_0)$ la fibre au-dessus du point b_0,

$$\mathfrak{D} = \{\phi : E \to E;\ \phi \text{ homóm.}, p \circ \phi = p\}$$

le groupe des automorphismes (transformations de Deck) de $E \to B$, $G = \pi_1(B, b_0)$ et $H = p_*(\pi_1(E, e_0)$ le groupe caractéristique.

1. Montrez que la restriction de ϕ à la fibre $\phi|_F : F \to F$ est une application bijective et $\mathfrak{D} \to \mathrm{Bij}(F)$, $\phi \mapsto \phi|_F$, est un homomorphisme de groupes.
2. Soit $\tilde{\alpha}_\phi$ un chemin avec $\tilde{\alpha}_\phi(0) = e_0$ et $\tilde{\alpha}_\phi(1) = \phi(e_0)$, soit $\alpha_\phi = p \circ \tilde{\alpha}_\phi$ et $[\alpha_\phi]$ la classe d'homotopie dans $\pi_1(B, b_0)$. Montrez que $[\alpha_\phi] \in N_G H$, c-à-d $[\alpha_\phi] h [\alpha_\phi]^{-1} \in H$ pour tout $h \in H$.
3. Montrez que $\mathfrak{D} \cong (N_G H)/H$.

Exercice 2. 1. Soit M une variété différentielle. Montrez que M a un atlas dénombrable.

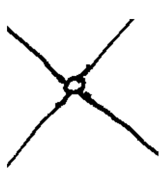
2. Quel sous-espace de $\mathbb{R}^2$ a une structure différentielle ?

(a) $\mathbb{R} \times \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$

(b) $(-1, 1) \times (-1, 1)$

(c) $\mathbb{Q}^2$

(d) 

(e) 

(f)

(g)

Exercice 3. Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$. Pour $x \in T^2$ choisissez un voisinage ouvert $U_x \subset T^2$ de x tel que

1. $p^{-1}(U_x) = \coprod_{j \in \mathbb{Z}^2} V_{x,j}$, $V_{x,j} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert
2. $p|_{V_{x,j}} : V_{x,j} \to U_x$ est un homéomorphisme.

Soit $h_{x,j} = (p|_{V_{x,j}})^{-1}$. Montrez que $\{h_{x,j}\}_{x \in T^2, j \in \mathbb{Z}^2}$ est un atlas différentiel pour T^2.

Exercice 4.

1. Soit M une variété différentielle, $\mathcal{A}_M$ un atlas de M, N un espace topologique et $f : N \to M$ un homéomorphisme. Montrez qu'il existe une structure différentielle unique sur N telle que f est un difféomorphisme.
2. Spécifiez une structure différentielle pour la surface
$$N = \{x \in \mathbb{R}^3; \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = 1\}$$
du cube.