

SÉRIE 8

À rendre avant le jeudi 20 novembre, 14h

Tous les systèmes d'équations linéaires doivent être résolus dans \mathbb{R} .

Exercice 1

a) Résolvez par l'algorithme de Gauss, décrivez toutes les solutions:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

b) Trouvez tout $a \in \mathbb{R}$ tel que le système suivant a un nombre infini de solutions:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4ax_2 + x_3 &= 2 \\ 4ax_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Exercice 2

Déterminez $a, b \in \mathbb{R}$ tels que le système

$$\begin{aligned} -x_1 - 4ax_2 + x_3 &= 8 + b \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 16 \\ -3ax_1 + x_2 - x_3 &= -32 - b \end{aligned}$$

possède (i) une seule solution (ii) une infinité de solutions (iii) aucune solution.

Exercice 3

Soit $\phi_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez une base de $\text{im } \phi_A$ et une base de $\text{ker } \phi_A$.

Exercice 4

a) Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$ et $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme de Gauss, montrez qu'il existe exactement un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]_2$ tel que $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, 3$.

b) Soit $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$. Trouvez tous les polynômes $p(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ qui interpolent ces 3 points, c'est-à-dire pour lesquels $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, 3$. Exprimez $p(x)$ d'abord dans la base canonique $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}[x]_3$ et résolvez le système linéaire correspondant.

Exercice 5

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

- a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.
- b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.