SÉRIE 7

À rendre avant le jeudi 13 novembre, 14h

Exercice 1

Montrez que pour chaque choix de vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{2014}$ les vecteurs

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 + 7v_2 - 3v_3 \\ w_2 &:= 5v_1 - 2v_2 \\ w_3 &:= 8.7v_1 + 16.5v_2 - \sqrt{5}v_3 \\ w_4 &:= v_1 - v_2 - v_3 \end{aligned}$$

sont linéairement dépendants. Donnez une preuve rapide, sans calculer explicitement qu'un vecteur est une combinaison linéaire des autres.

Exercice 2

Soit V un espace vectoriel. Soient U et W des sous-espaces vectoriels de V. Démontrer les points suivants.

a) On suppose que $\dim V < \infty$. Alors,
(i) $\dim W \leq \dim V$ et (ii) $(\dim W = \dim V) \iff (W = V)$.

b) $V = U \oplus W$ si et seulement si $V = U + W$ et les vecteurs $\{u, v\}$ sont linéairement indépendants pour chaque $u \in U \setminus \{0\}$ et chaque $w \in W \setminus \{0\}$.

c) On suppose que $\dim V < \infty$. Alors, $V = U \oplus W$ si et seulement si $V = U + W$ et $\dim U + \dim W = \dim V$.

Exercice 3

Soient V, U, W les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\},$$
$$U = \{(a, b, a, b)^T \in \mathbb{R}^4 | a, b \in \mathbb{R}\},$$
$$W = \{(a, b, b, a)^T \in \mathbb{R}^4 | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

a) Déterminer les dimensions $\dim V$, $\dim U$ et $\dim W$.

b) Est-ce que $\mathbb{R}^4 = V \oplus U$? Est-ce que $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Montrez que $\dim \ker(\varphi) \geq 5$.

b) Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire avec

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}.$$

Spécifiez l'image $\mathrm{im}(\psi)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{im}(\psi)$ et de $\ker(\psi)$? Justifiez votre réponse.

Exercice 5

Résolvez par l'algorithme de Gauss-Jordan; décrivez toutes les solutions :

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & 4y & - & z & = & 9 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 3y & - & 6z & = & -23 \end{array}$$

b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3i \cdot x_2 & - & x_3 & = & -i \\ 5i \cdot x_1 & + & 7 \cdot x_2 & - & 3i \cdot x_3 & = & 2 \end{array}$$

Exercice 6

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, $\phi : V \to V$ une application linéaire. Soient les sous-espaces W_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, definis par $W_0 := V$ et $W_{k+1} := \phi(W_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Démontrer que la suite W_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, se stabilise (i.e. il existe un entier $m \geq 0$ tel que $W_{k+m} = W_m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Exercice 7

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.