Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 6

À rendre avant le jeudi 30 octobre, 14h

Exercice 1

Soit $W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R}) | a - b + c - d = 0 \right\}$ et soient $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrez ou réfutez les assertions suivantes :

a) V_1 et V_2 sont linéairement indépendants. b) V_1, V_2 et V_3 génèrent W.

c) V_1, V_2 et V_3 génèrent $M(2\times 2, \mathbb{R})$. d) V_1, V_2 et V_3 forment une base de W.

Exercice 2

Déterminez une base du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Notation : Soit $\mathbb{K}$ un corps et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. L'expression

$$p := p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

s'appelle le *polynôme sur le corps* $\mathbb{K}$. Le *degré* $\deg(p)$ *du polynôme* p est défini par

$$\deg(p) := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}, & \text{si } p \neq 0, \\ -\infty, & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de tous les polynômes p de degré $\deg(p) \leq n$ est défini par

$$\mathbb{K}[x]_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K}, \text{pour } \forall\, i = 0, \ldots, n \right\}$$

avec les opérations suivantes,

$$p + q := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i, \qquad \lambda \cdot p := \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot a_i) x^i,$$

pour tous polynômes $p, q \in \mathbb{K}[x]_n$, $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de tous les polynômes sur le corps $\mathbb{K}$ est défini par $\mathbb{K}[x] := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{K}[x]_n$.

Exercice 3 a) Démontrez que les polynômes $p_0 := 1$, $p_1 := 2x - 3$ et $p_2 := 4x^2 + 5x - 6$ forment une base de $\mathbb{R}[x]_2$. Trouvez un polynôme $p_4 \in \mathbb{R}[x]_3$ t.q. (p_0, p_1, p_2, p_3) est une base de $\mathbb{R}[x]_3$.

b) Soit $p_0, p_1, \ldots, p_n$ des polynômes arbitraires de $\mathbb{K}[x]_n$ avec $\deg(p_i) = i$, pour $i = 0, \ldots, n$. Démontrez que les polynômes $p_0, p_1, \ldots, p_n$ forment une base de $\mathbb{K}[x]_n$.

Exercice 4
Soit $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{pour } 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) Dessinez le graphe de f_n et montrez que $f_0, \ldots, f_r$ sont linéairement indépendantes dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour chaque $r \in \mathbb{N}$.

b) Démontrez que $\dim C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_9 \in \mathbb{R}[x]$ de polynômes de degré ≤ 7.

c) Démontrez qu'il existe des nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_9$ pas tous nuls t.q. $\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \ldots + \lambda_9 \cdot p_9 = 0$.

Exercice 5
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.