

SÉRIE 2

À rendre avant le jeudi 2 octobre, 14h

Exercice 1

Est-ce que X est un groupe ? Justifiez votre réponse.

a) $X = (\mathbb{Z}, +)$, b) $X = (\mathbb{N}, +)$, c) $X = (\mathbb{Z}, \cdot)$, d) $X = (\mathbb{Q}, \cdot)$

e) $X := \{\diamond, \clubsuit\}$ avec la multiplication définie par

$$\diamond * \diamond := \diamond, \quad \diamond * \clubsuit := \clubsuit, \quad \clubsuit * \diamond := \clubsuit, \quad \clubsuit * \clubsuit := \diamond.$$

Exercice 2

Est-ce que l'application $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ est un homomorphisme de groupes ?

a) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $\varphi(x) := -\frac{1}{2} \cdot x$

b) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $\varphi(x) := 3^x$

c) $G_1 = (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$, $\varphi(x) := x^{-1}$

d) $G_1 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$, $\varphi(x) := \log x$

Justifiez votre réponse.

Exercice 3 a) Soit S_n l'ensemble des applications bijectives $\{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ et soit \circ la composition des applications. Montrez que (S_n, \circ) n'est pas un groupe abélien pour $n \geq 3$.

b) Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X) := \{Y \subset X\}$ l'ensemble des parties de X . Pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$ on définit l'opération

$$A \star B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Montrez que $(\mathcal{P}(X), \star)$ est un groupe abélien. Quel est l'élément neutre e ? Quel est l'élément inverse de A ?

Exercice 4

Montrez que :

- a) chaque groupe avec exactement 2 éléments est abélien,
- b) chaque groupe (G, \bullet) tel que $a \bullet a = e$ pour tout $a \in G$ est abélien.

Exercice 5

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

- a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.
- b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.