UNI FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai — ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 12

À rendre avant le jeudi 18 decembre, 14h

Le test écrit aura lieu le lundi 15 décembre dans la séance d'exercices

---

Exercice 1

Soit $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Soit $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrez que $C := (V, +, \cdot)$ est un corps.

b) Montrez que dans C, l'équation $X^2 + E_2 = 0$ est solvable.

c) Identifiez C avec un corps déjà connu.

Exercice 2

La règle de Sarrus présente l'algorithme suivant pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$: on recopie les deux premières colonnes de A à droite de la matrice A, cf. le diagramme suivant.

$$
\left|\begin{array}{ccccc|ccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
& \searrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
& \swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32}
\end{array}\right.
$$

Montrez (par exemple avec la formule de Leibniz) que le déterminant $\det(A)$ est la somme des produits de triplets de composantes a_{ij} le long des diagonales, avec le signe $+$ dans le sens $\searrow$ et le signe $-$ dans le sans $\swarrow$, c.-à-d.

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - (a_{13}\, a_{22}\, a_{31} + a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{21}\, a_{33}).$$

Exercice 3

Soit $v = (v_1, v_2)^T$ et $w = (w_1, w_2)^T$ deux points différents de $\mathbb{R}^2$ et soit L une droite affine qui passe par v et w. Montrez que $x = (x_1, x_2)^T \in L$ si et seulement si $\det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0.$

Exercice 4
Montrez que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a^4+b^4 & b^4+c^4 & c^4+d^4 & d^4+a^4 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+d^3 & d^3+a^3 \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+d^2 & d^2+a^2 \\ a+b & b+c & c+d & d+a \end{pmatrix}$$

est zéro.

Exercice 5
Montrez en utilisant les trois axiomes sur les propriétés du déterminant, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a pour le déterminant de Vandermonde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Utilisez par ex. l'induction.

Exercice 6
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.