Prüfungsstoff Geometrie

(Algebra & Geometrie II, 2022)

Der Prüfungsstoff umfasst die Vorlesungen und die Übungsaufgaben.

Es folgt eine unvollständige Liste von DEFINITIONEN, *Beispielen* und Theoremen Vorlesung:

SIMPLIZIALE HOMOLOGIE, RANDOPERATOR	HOMOLOGIE SIMPLICIALE, OPÉRATEUR DE BORD
Ein-dimensionale Beispiele	*Exemples en dimension un*
Allgemeine Topologie	**Topologie générale**
TOPOLOGIE, TOPOLOGISCHER RAUM, OFFENE MENGEN, ABGESCHLOSSENE MENGEN	TOPOLOGIE, ESPACE TOPOLOGIQUE, PARTIES OUVERTES, PARTIES FERMÉES
STETIGE ABBILDUNGEN, HOMÖOMORPHISMEN, $X \approx Y$, OFFENE ABBILDUNGEN, GESCHLOSSENE ABBILDUNGEN	APPLICATIONS CONTINUES, HOMÉOMORPHISMES, $X \approx Y$, APPLICATIONS OUVERTES, APPLICATIONS FERMÉES
UMGEBUNG EINES PUNKTES, BASIS DER TOPOLOGIE, SUBBASIS, ERZEUGTE TOPOLOGIE, KLEINERE TOPOLOGIE	VOISINAGE D'UN POINT, BASE DE LA TOPOLOGIE, SOUS-BASE, TOPOLOGIE ENGENDRÉE, TOPOLOGIE MOINS FINE
METRISCHE RÄUME, OFFENER ϵ-BALL, VON DER METRIK INDUZIERTE TOPOLOGIE	ESPACES MÉTRIQUES, BOULE OUVERTE DE RAYON ϵ, TOPOLOGIE INDUITE PAR LA MÉTRIQUE
Standardtopologie auf dem $\mathbb{R}^n$, Klumpentopologie, diskrete Topologie, Teilraumtopologie, Produkttopologie auf $X \times Y$, topologische Summe $X + Y$	*topologie standard sur $\mathbb{R}^n$, topologie grossière, topologie discrète , topologie de sous-espace, topologie produit sur $X \times Y$, somme topologique $X + Y$*
$X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$, ist stetig.	$X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$, est continue.
Urysohns Lemma für metrische Räume.	Théorème d'Urysohn pour les espaces métriques.
Tietze Erweiterungslemma für metrische Räume.	Théorème de Tietze pour les espaces métriques.

OFFENE ÜBERDECKUNG, ENDLICHE TEILÜBERDECKUNG, KOMPAKTE RÄUME	RECOUVREMENT OUVERT, SOUS-RECOUVREMENT FINI, ESPACES COMPACTS
stetige Bilder und abgeschl. Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt X, Y sind kompakt $\implies X \times Y, X + Y$ sind kompakt	l'image continue et le sous-esp. fermé des espaces compacts sont compacts X, Y sont compacts $\implies X \times Y, X + Y$ sont compacts
$(0, 1]$ *ist nicht kompakt,* $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ *ist kompakt*	$(0, 1]$ *n'est pas compact,* $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ *est compact*
HAUSDORFFSCHE RÄUME, NORMALE RÄUME, LIMES EINER FOLGE	ESPACES SÉPARÉS, ESPACES NORMAUX, LIMITE D'UNE SUITE
Beispiel eines nicht Hausdorffschen Raums. Beispiel eines Hausdorffschen Raums, der nicht normal ist.	*exemple d'espace non séparé, exemple d'espace séparé mais pas normal.*
Produkt, Summe und Teilräume von Hausdorffschen Räumen sind Hausdorffsch	produit, somme et sous-espace des espaces séparés sont séparés
metrische Räume und diskrete Räume sind Hausdorffsche Räume	*espaces métriques et espaces discrètes sont séparés*
X Hausdorff, $A \subset X$, A kompakt $\implies$ A abgeschlossen.	X séparé, $A \subset X$, A compact $\implies$ A fermé.
X kompakt und Hausdorff $\implies$ X normal.	X compact et séparé $\implies$ X normal.
Satz von Heine-Borel	Théorème de Heine-Borel
$f : X \to Y$ bijektiv stetig, X kompakt, Y Hausdorff $\Rightarrow f$ Homöomorphismus	$f : X \to Y$ une bijection continue, X compact, Y séparé $\Rightarrow f$ homéo.
$f : X \to \mathbb{R}$ stetig, X kompakt $\implies$ f nimmt Max./Min. an	$f : X \to \mathbb{R}$ continue, X compact $\implies$ f atteint ses bornes (max/min)
HÄUFUNGSPUNKT, ISOLIERTER PUNKT	POINT D'ACCUMULATION, POINT ISOLÉ
Satz von Bolzano-Weierstrass	Théorème de Bolzano-Weierstrass
Lemma von Lebesgue	Lemme de Lebesgue

PRODUKT- UND "BOX"-TOPOLOGIE	TOPOLOGIE PRODUIT ET DE ≪BOX≫
Satz von Tychonoff (ohne Beweis)	Théorème de Tychonoff (sans dém.)
LOKAL KOMPAKTE RÄUME	ESPACES LOCALEMENT COMPACTS
X lokal kompakt und Hausdorff $\Longrightarrow$ jede Umgebung enthält eine kompakte Umgebung	X localement compact et séparé $\Longrightarrow$ tout voisinage contient un voisinage compact
EINPUNKTKOMPAKTIFIZIERUNG X^+, EIGENTLICHE ABBILDUNGEN	COMPACTIFIÉ D'ALEXANDROV X^+, APPLICATION PROPRE
X lokal kompakt $\Longrightarrow$ X^+ kompakt und $X \approx (X^+ - \{\infty\})$	X localement compact $\Longrightarrow$ X^+ compact et $X \approx (X^+ - \{\infty\})$
X, Y lokal kompakt, $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt: f eigentlich $\Longleftrightarrow$ $\exists$ stetige Fortsetzung $f^+ : X^+ \to Y^+$	X, Y localement compact, $f : X \to Y$ continue. Alors on a : f propre $\Longleftrightarrow$ f se prolonge en une application continue $f^+ : X^+ \to Y^+$
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$	$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$
QUOTIENTENTOPOLOGIE, QUOTIENTENABBILDUNG, QUOTIENTENRAUM	TOPOLOGIE QUOTIENT, APPLICATION QUOTIENT, ESPACE QUOTIENT
$X/\sim$, Quotientenraum bzgl. einer Äquivalenzrelation	*$X/\sim$, espace quotient de X par la relation d'équivalence $\sim$.*
reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$	*espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$*
Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie	Propriété universelle de la topologie quotient
$\bar{B}^n/\partial\bar{B}^n \approx S^n$, $\mathbb{C}/L \approx T = S^1 \times S^1$, *Ankleben einer Zelle*, $Y := \mathbb{R}/\sim$, *wo* $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$, X/A, *der Kegel CX von X*	$\bar{B}^n/\partial\bar{B}^n \approx S^n$, $\mathbb{C}/L \approx T = S^1 \times S^1$, *attacher une cellule*, $Y := \mathbb{R}/\sim$, *où* $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$, X/A, *le cône CX de X*
REGULÄRE RÄUME	ESPACES RÉGULIERS
$A \subset X$ abgeschlossen. Dann gilt: X regulär $\Longrightarrow$ X/A Hausdorffsch X normal $\Longrightarrow$ X/A normal	$A \subset X$ fermé. Alors on a : X régulier $\Longrightarrow$ X/A séparé X normal $\Longrightarrow$ X/A normal

Abbildungszylinder M_f, Abbildungskegel C_f	cylindre de l'application M_f, cône de l'application C_f
zusamenhängende Räume, wegzusammenhängende Räume	espaces connexes, espaces connexes par arcs
die zusammenhängenden Teilräume von $\mathbb{R}$ sind die Intervalle	les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles
wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ zusammenhängend	connexe par arcs $\Longrightarrow$ connexe
Beispiel eines zusammenhängenden Raums, der nicht wegzusammenhängend ist	*Exemple d'un espace connexe, non connexe par arcs*
X (weg)zusammenhängend und f stetig $\Rightarrow f(X)$ (weg)zusammenhängend	X connexe (par arcs) et f continue $\Rightarrow f(X)$ connexe (par arcs)
X, Y (weg)zusammenhängend $\Longrightarrow$ $X \times Y$ (weg)zusammenhängend	X, Y connexes (par arcs) $\Longrightarrow X \times Y$ connexe (par arcs)
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der "Box"-Topologie ist nicht zusammenhängend (ohne Beweis)	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie de «box» n'est pas connexe (sans dém.)
$A \subset X$ zusammenhängender Teilraum, $A \subset B \subset \bar{A} \Rightarrow B$ zusammenhängend	$A \subset X$ sous-espace connexe, $A \subset B \subset \bar{A} \Rightarrow B$ connexe
$A_\alpha \subset X$ zusammenhängend und $p \in A_\alpha \ \forall\ \alpha \Longrightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha$ zusammenhängend	$A_\alpha \subset X$ connexe et $p \in A_\alpha \ \forall\ \alpha \Longrightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha$ connexe
Zusammenhangskomponenten	composantes connexes
Komponenten sind zusammenhängend, abgeschlossen und disjunkt	composantes connexes sont connexes, fermées et deux à deux disjoints
Hawaiischer Ohrring, $GL_n(\mathbb{R})$	*Oreilles hawaïnenne,* $GL_n(\mathbb{R})$

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Groupe fondamental et théorie des revêtements

Homotopie zwischen zwei Abbildungen $f, \tilde{f} : X \to Y$, $f \simeq \tilde{f}$, nullhomotope Abbildungen, Menge der Homotopieklassen $[X, Y]$

homotopie entre deux applications $f, \tilde{f} : X \to Y$, $f \simeq \tilde{f}$, application homotopiquement nulle, ensemble des classes d'équivalence d'homotopie $[X, Y]$

Homotopie zwischen zwei Abbildungen von Paaren $f, \tilde{f} : (X, A) \to (Y, B)$, Menge der Homotopieklassen $[(X, A), (Y, B)]$

homotopie entre deux applications $f, \tilde{f} : (X, A) \to (Y, B)$, ensemble des classes d'équivalence d'homotopie $[(X, A), (Y, B)]$

Homotopie von Wegen, $f \simeq_p \tilde{f}$
Addition von Wegen, $f \star g$

homotopie comme chemins, $f \simeq_p \tilde{f}$
addition de chemins, $f \star g$

$f \simeq_p \tilde{f}$, $g \simeq_p \tilde{g} \implies f \star g \simeq_p \tilde{f} \star \tilde{g}$,

$f \simeq_p \tilde{f}$, $g \simeq_p \tilde{g} \implies f \star g \simeq_p \tilde{f} \star \tilde{g}$,

Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ von X zum Basispunkt x_0

groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ de X basé en x_0

$\pi_1(X, x_0)$ ist eine Gruppe

$\pi_1(X, x_0)$ est un groupe

X konvex $\implies \pi_1(X, x_0) = 0$

X convexe $\implies \pi_1(X, x_0) = 0$

sternförmige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

sous-espace étoilé de $\mathbb{R}^n$

A sternförmig $\implies \pi_1(A, x_0) = 0$

A étoilé $\implies \pi_1(A, x_0) = 0$

Weg γ von x_0 nach x_1 definiert Isomorphismus $\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$,
$\gamma \simeq_p \alpha \implies \hat{\gamma} = \hat{\alpha}$

chemin γ joignant x_0 à x_1 définit un isomorph. $\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$,
$\gamma \simeq_p \alpha \implies \hat{\gamma} = \hat{\alpha}$

X wegzusammenhängend
$\implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

X connexe par arcs
$\implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

Einfach zusammenh. Räume

espaces simplement connexes

$h : X \to Y$ stetig
$\rightsquigarrow h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, h(x_0))$,
$h \simeq \hat{h} \implies h_* = \hat{h}_*$

$h : X \to Y$ continue
$\rightsquigarrow h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, h(x_0))$,
$h \simeq \hat{h} \implies h_* = \hat{h}_*$

h_* Homomorphismus, id_* ist die Identität und $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$
h Homöomorphismus $\implies h_*$ Iso.

h_* homomorphisme, id_* est l'identité et $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$
h homeomorphisme $\implies h_*$ iso.

$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ (der Beweis benutzt Lemma 2.33 und Korollar 2.35)

$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ (la démonstration utilise le lemme 2.33 et le corollaire 2.35)

Retraktion $r : X \to A$, Retrakt $A \subset X$

rétraction $r : X \to A$, retract $A \subset X$

$j : A \hookrightarrow X$ Retrakt mit Retraktion $r : X \to A$. Dann gilt: j_* ist injektiv und r_* ist surjektiv.

$j : A \hookrightarrow X$ retract et $r : X \to A$ une rétraction. Alors on a : j_* est injective et r_* est surjective.

S^1 ist kein Retrakt von $\bar{B}^2$

S^1 n'est pas un retract de $\bar{B}^2$

Für eine stetige Abb. $h : S^1 \to X$ gilt: h null-homotop $\iff$ h kann auf $\bar{B}^2$ stetig fortgesetzt werden $\iff$ h_* ist trivial

Pour une application continue $h : S^1 \to X$ on a : h est homotopiquement nulle $\iff$ h a une extension continue $\bar{B}^2 \to X$ $\iff$ h_* est trivial

Die Inklusion $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ist nicht null-homotop

L'inclusion $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ n'est pas homotopiquement nulle

Zu jedem nirgends verschwindenden Vektorfeld V auf $\bar{B}^2$ gibt es $p, q \in S^1$ mit $V(p) = \lambda \cdot p$, $V(q) = \mu \cdot q$ und $\lambda > 0$, $\mu < 0$

Pour tout champ de vecteurs V sur $\bar{B}^2$ sans zéro il existe $p, q \in S^1$ t.q. $V(p) = \lambda \cdot p$, $V(q) = \mu \cdot q$ et $\lambda > 0$, $\mu < 0$

Brouwerscher Fixpunktsatz für $\bar{B}^2$

Théorème du point fixe de Brouwer pour $\bar{B}^2$

Existenz eines positiven Eigenwertes für eine (3×3)-Matrix mit positiven Einträgen

Existence d'une valeur propre positive pour une (3×3)-matrice dont tous les coefficients sont positifs

Fundamentalsatz der Algebra

Théorème fondamental de l'algèbre

Überlagerung $p : E \to B$, Basis, Totalraum, Überlagerungsabbildung, Blätter

revêtement $p : E \to B$, base, espace total, application du revêtement, feuillets

$p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$,
$p_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$,
$\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$

$p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$,
$p_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$,
$\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$

lokaler Homöomorphismus

homéomorphisme local

Jede Überlagerungsabbildung ist ein lokaler Homöomorphismus

Tout revêtement est un homéomorphisme local

Das Produkt von zwei Überlagerungen und die Einschänkung von Überlagerungen sind Überlagerungen

Le produit de deux revêtement et la restriction du revêtement sont revêtements

$\mathbb{R}^2 \to T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$

$\mathbb{R}^2 \to T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$

Lift (Hochhebung) von Wegen

relèvement (relevé) des chemins

Zu $\alpha : [a, b] \to B$ stetig und $e_0 \in p^{-1}(\alpha(a))$ gibt es genau einen Lift $\widetilde{\alpha}$ mit der Anfangswert $\widetilde{\alpha}(0) = e_0$

Pour $\alpha : [a, b] \to B$ continue et $e_0 \in p^{-1}(\alpha(a))$ il existe un relevé unique $\widetilde{\alpha}$ avec valeur initiale $\widetilde{\alpha}(0) = e_0$

Sei $H : Z \times [0, 1] \to B$ stetig, $h_0 : Z \to B$ stetig mit $h_0(z) := H(z, 0)$ und $\widetilde{h}_0 : Z \to E$ ein Lift von $h_0 : Z \to B$. Dann gibt es genau einen Lift $\widetilde{H} : Z \times [0, 1] \to E$ von H mit Anfangswert $\widetilde{H}(z, 0) = \widetilde{h}_0(z)$

Soit $H : Z \times [0, 1] \to B$ continue, $h_0 : Z \to B$ continue avec $h_0(z) := H(z, 0)$ et $\widetilde{h}_0 : Z \to E$ un relevé de $h_0 : Z \to B$. Alors il existe un relevé unique $\widetilde{H} : Z \times [0, 1] \to E$ de H avec valeur initiale $\widetilde{H}(z, 0) = \widetilde{h}_0(z)$

$\alpha, \beta : [0, 1] \to B$ homotop, $\alpha \simeq_p \beta$, und $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : [0, 1] \to E$ Lifts von α, β mit gleichem Anfangswert, d.h. $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$. Dann gilt: $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$ und $\widetilde{\alpha} \simeq_p \widetilde{\beta}$.

$\alpha, \beta : [0, 1] \to B$ homotop, $\alpha \simeq_p \beta$, et $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : [0, 1] \to E$ relevés de α, β avec la même valeur initiale, $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$. Alors on a : $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$ et $\widetilde{\alpha} \simeq_p \widetilde{\beta}$.

$\pi_1(E, e_0) \overset{p_*}{\to} \pi_1(B, b_0)$ ist injektiv.

$\pi_1(E, e_0) \overset{p_*}{\to} \pi_1(B, b_0)$ est injectif.

charakteristische Untergruppe einer Überlagerung

sous-groupe caracteristique de revêtement

Sei $F : (Z, z_0) \to (B, b_0)$ stetig. Hat F einen Lift $(Z, z_0) \to (E, e_0)$ in der Überlagerung $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$, so ist $F_*(\pi_1(Z, z_0))$ Untergruppe der charakteristischen Untergruppe. Für Z wegzusammenhängend gibt es höchstens einen Lift $(Z, z_0) \to (E, e_0)$.

Soit $F : (Z, z_0) \to (B, b_0)$ continue. Si F admet un relevé $(Z, z_0) \to (E, e_0)$ dans le revêtement $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$, alors $F_*(\pi_1(Z, z_0))$ est un sous-groupe de sous-groupe caractéristique. Pour Z connexe par arcs il existe au plus un relevé $(Z, z_0) \to (E, e_0)$.

lokal wegzusammenhängend

localement connexe par arcs

Beispiel eines wegzusammenhängenden Raums, der nicht lokal wegzusammenhängend ist

Exemple d'un espace connexe par arcs mais non localement connexe par arcs

Ist Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, dann gilt:
F hat Lift $\widetilde{F} : (Z, z_0) \to (E, e_0)$ in der Überlagerung $\iff$ $F_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

Soit Z connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors on a :
F admet un relevé $\widetilde{F} : (Z, z_0) \to (E, e_0)$ dans le revêtement $\iff$ $F_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

Isomorphismus zwischen zwei Überlagerungen $E \xrightarrow{p} B$ und $E' \xrightarrow{p'} B$, Decktransformation, Gruppe $\mathcal{D}$ der Decktransformationen

Isomorphisme entre deux revêtements $E \xrightarrow{p} B$ et $E' \xrightarrow{p'} B$, transformation de Deck, groupe $\mathcal{D}$ de transformations de Deck

Für E, E' wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend gilt:
Es gibt einen Iso. $\Phi : E \to E'$ mit $\Phi(e_0) = e_0' \iff$
$p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e_0'))$

Pour E, E' connexes par arcs et localement connexes par arcs on a :
Il existe un iso. $\Phi : E \to E'$ avec $\Phi(e_0) = e_0' \iff$
$p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e_0'))$

$E \to B$ Überlagerung, E wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $e_0, \tilde{e}_0 \in E$ mit $p(e_0) = p(\tilde{e}_0)$. Dann gilt:
Es gibt $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\varphi(e_0) = \tilde{e}_0 \iff$ $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$

$E \to B$ un revêtement, E connexe par arcs et localement connexe par arcs, $e_0, \tilde{e}_0 \in E$ avec $p(e_0) = p(\tilde{e}_0)$. Alors on a :
Il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\varphi(e_0) = \tilde{e}_0 \iff$ $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$

$p : E \to B$ und $p' : E' \to B'$ Überlagerungen, E, E' wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $e_0 \in E, e_0' \in E'$ mit $p(e_0) = p'(e_0') =: b_0$. Dann gilt:
Es gibt Isomorphismus $\Phi : E \to E'$ (nicht notwendig $e_0 \mapsto e_0'$) $\iff$ $p_*(\pi_1(E, e_0))$ und $p'_*(\pi_1(E', e_0'))$ sind in $\pi_1(B, b_0)$ konjugiert.

$p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ deux revêtements, E, E' connexes par arcs et localement connexes par arcs, $e_0 \in E, e_0' \in E'$ avec $p(e_0) = p'(e_0') =: b_0$. Alors on a :
Il existe un isomorphisme $\Phi : E \to E'$ (pas nécessairement $e_0 \mapsto e_0'$) $\iff$ $p_*(\pi_1(E, e_0))$ et $p'_*(\pi_1(E', e_0'))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$.

Isomorphieklassen von wegzusammenhängenden Überlagerungen der S^1

classes d'isomorphie de revêtements connexes du cercle S^1

Sei $E \to B$ eine Überlagerung, E wegzusammenhängend $\implies$ $\mathcal{D}$ operiert frei auf E.

Soit $E \to B$ un revêtement, E connexe par arcs $\implies$ l'operation de $\mathcal{D}$ sur E est libre.

eigentlich diskontinuierliche Operationen

operation proprement discontinue

$E \to B$ Überlagerung, E wegzusammenhängend $\implies$ $\mathcal{D}$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf E.

$E \to B$ revêtement, E connexe par arcs $\implies$ $\mathcal{D}$ opère de façon proprement discontinument sur E.

Ist E wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Ist G eine Gruppe von Homöomorphismen, die auf E eigentlich diskontinuierlich operiert, so ist $p : E \to B := E/G$ eine Überlagerung. (ohne Beweis)

Soit E connexe par arcs et localement connexe par arcs. Si G est un groupe d'homomorphismes qui opère proprement discontinument sur E, alors $p : E \to B := E/G$ est un revêtement. (sans dém.)

Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$, Operation von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf S^1.

Operation de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$, Operation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur S^1.

UNIVERSELLE ÜBERLAGERUNG
SEMILOKAL EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDER RAUM

REVÊTEMENT UNIVERSEL
ESPACE SEMI-LOCALEMENT SIMPLEMENT CONNEXE

Sei B wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend und sei $b_0 \in B$ (Basispunkt). Dann gilt:
1) B besitzt eine universelle Überlagerung.
2) Für jede Untergruppe $H \subset \pi_1(B, b_0)$ gibt es eine Überlagerung $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ mit charakteristischer Untergruppe H.
(nur Beweisidee)

Soit B connexe par arcs, localement connexe par arcs et soit $b_0 \in B$ (point de base). Alors on a :
1) B admet un revêtement universel.
2) Pour tout sous-groupe $H \subset \pi_1(B, b_0)$ il existe un revêtement $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ t.q. le groupe caractéristique est égal à H.
(seulement l'idée de la démonstration)

Sei $G := \pi_1(B, b_0)$ und H charakteristische Untergruppe einer Überlagerung mit wegzusammenhängendem und lokal wegzusammenhängendem Totalraum. Dann ist die Gruppe der Decktransformationen $\mathcal{D}$ isomorph zur Quotientengruppe $N_G(H)/H$. (ohne Beweis)

Soit $G := \pi_1(B, b_0)$ et soit H le sous-groupe caractéristique d'un revêtement avec espace total connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors, le groupe de transformations de Deck $\mathcal{D}$ est isomorph à groupe quotient $N_G(H)/H$. (sans dém.)

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

n-DIMENSIONALE TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT, KARTE, ATLAS, KARTENWECHSEL
DIFFERENZIERBARER ATLAS, DIFFERENZIERBARE STRUKTUR, DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEIT

$\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge, Sphäre S^n, Torus $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten
die topologische Summe von n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit,
das Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, offene Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten

DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN ZWISCHEN DIFFERENZIERB. MANNIGFALTIGKEITEN, DIFFEOMORPHISMEN

jede Mannigfaltigkeit M ist lokal kompakt, lokal weg-zusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend und es gilt:
M zusammenhängend $\iff$ M weg-zusammenhängend

ÄQUIVALENZ VON KURVEN, TANGENTIALVEKTOREN, TANGENTIALRAUM T_pM, DIFFERENTIAL φ_* EINER DIFFERENZIERBAREN ABBILDUNG φ

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U \implies T_pU \cong \mathbb{R}^m$ (kanonischer Isomorphismus), das Differential von Karten induziert auf dem Tangentialraum T_pM eine Vektorraumstruktur

Variétés différentielles

VARIÉTÉ TOPOLOGIQUE DE DIMENSION n, CARTE, ATLAS, CHANGEMENT DE CARTES
ATLAS DIFFÉRENTIEL, STRUCTURE DIFFÉRENTIELLE, VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE

$\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, sphère S^n, tore $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sont des variétés différentielles
la somme topologique des variétés différentielles de dimension n est une variété différentielle de dimension n,
le produit des deux variétés différentielles est une variété différentielle, chaque ouvert d'une variété différentielle est une variété différentielle

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES ENTRE VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES, DIFFÉOMORPHISMES

chaque variété est localement compact, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe et on a :
M connexe $\iff$ M connexe par arcs

RELATION D'ÉQUIVALENCE DES COURBES, VECTEURS TANGENT, L'ESPACE TANGENT T_pM, DIFFÉRENTIELLE φ_* D'UNE APPLICATION DIFFÉRENTIABLE φ

$U \subset \mathbb{R}^m$ ouvert, $p \in U \implies T_pU \cong \mathbb{R}^m$ (isomorphisme canonique), en utilisant les différentielles des cartes l'espace tangent T_pM est un espace vectoriel

Eigenschaften des Differentials	Propriétés de la différentielle
φ_* wird lokal in Karten durch die Jacobi-Matrix beschrieben	Localement la différentielle φ_* est représenté par la matrice jacobienne
Funktionskeime, Derivationen, Vektorraum der Derivationen $\mathcal{D}er_p M$, das Differential φ_* ist eine Abbildung zwischen Derivationen	Germes, dérivations, espace vectoriel des dérivations $\mathcal{D}er_p M$, la différentielle φ_* est une application entre dérivations
$(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_m)$ ist eine Basis von $\mathcal{D}er_q \mathbb{R}^m$	$(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_m)$ est une base de $\mathcal{D}er_q \mathbb{R}^m$
$\Theta : T_p M \to \mathcal{D}er_p M$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen	$\Theta : T_p M \to \mathcal{D}er_p M$ est un isomorphisme d'espace vectoriel
reguläre Werte	valeurs régulières
Urbild jedes regulären Wertes ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Lemma von Sard (beides ohne Beweis)	pré-image de toute valeur régulière est une variété différentielle, Lemme de Sard (sans dém.)
Tangentialbündel TM	Fibré tangent TM
$T\mathbb{R}^m$, TU für U offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$.	*$T\mathbb{R}^m$, TU pour U un ouvert de $\mathbb{R}^m$.*
TM ist $2m$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit	TM est une variété différentielle de dimension $2m$
k-fach lineare und alternierende k-lineare Formen für einen m-dimensionalen Vektorraum V, $Alt^k(V)$ det *ist alternierende m-Form*	forme k-linéaire et forme k-linéaire alternée pour un espace vectoriel V de dimension m, $Alt^k(V)$ det *est une m-forme alternée*
Komponenten einer alternierenden k-Form bzgl. einer Basis	composantes de forme k-linéaire alternée par rapport à une base
$Alt^k(V)$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension $\binom{m}{k}$	$Alt^k(V)$ est un espace vectoriel réel de dimension $\binom{m}{k}$
pullback oder zurückgeholte (alternierende) k-Form $f^*(\omega)$ für Homomorphismus $f : V \to W$	pull-back $f^*(\omega)$ d'une k-forme ω pour un homomorphisme $f : V \to W$, $f^* : Alt^k(W) \to Alt^k(V)$

Differentialformen vom Grad k auf M (k-Formen auf M), $\Omega^k(M)$	formes différentielles de degré k sur M, $\Omega^k(M)$
pull-back $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ für diffb. Abbildung $f : M \to N$	pull-back $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ pour une appl. diff. $f : M \to N$
Äussere Ableitung $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$	différentielle extérieure $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$
Berechnung $\ker(d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M))$	calcul de $\ker(d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M))$
Äusseres (oder Dach-)Produkt $\wedge$ von alternierenden Formen	produit extérieur $\wedge$ des formes alternées
Eigenschaften von $\wedge$, $v^*_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge v^*_{\mu_k}$, $1 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_k \leq m$, bilden eine Basis von $Alt^k(V)$	propriétés de $\wedge$, $v^*_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge v^*_{\mu_k}$, $1 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_k \leq m$, forment une base de $Alt^k(V)$
Äusseres (oder Dach-)Produkt $\wedge$ von Differentialformen	produit extérieur $\wedge$ des formes différentielles
Äussere Ableitung $d_M : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, de Rham Komplex	dérivée extérieure $d_M : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, complexe de de Rham
axiomatische Beschreibung der äusseren Ableitung, $d_M \circ d_M = 0$	caractérisation axiomatique de la dérivée extérieure, $d_M \circ d_M = 0$
exakte und geschlossene k-Formen, k-te de Rham Kohomologie $H^k_{dR}(M)$	formes exactes et formes fermées, k-ième espace vectoriel de de Rham cohomologie $H^k_{dR}(M)$
äusseres Produkt $\wedge$ von Kohomologieklassen ist wohldefiniert, Eigenschaften	produit extérieur $\wedge$ des classes de cohomologie est bien défini, propriétés
Eigenschaften des pull-back $H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$, $[\omega] \mapsto [f^*(\omega)]$	Propriétés de pull-back $H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$, $[\omega] \mapsto [f^*(\omega)]$
de Rham Kohomologie von einem Punkt, von $\mathbb{R}$ und von S^1	*de Rham cohomologie d'un point, de $\mathbb{R}$ et de S^1*
AUSBLICK: Integration von Formen und Satz von Stokes	PERSPECTIVE : Intégration des formen et Thm. de Stokes