

# Prüfungstoff Topologie

(Algebra & Geometrie II, 2012)

Der Prüfungstoff umfasst die Vorlesungen, die Übungsaufgaben (exercices) und die Anwesenheitsaufgaben (exercices de présence).

Es folgt eine unvollständige Liste von DEFINITIONEN, *Beispielen* und **Theoremen** aus der Topologie Vorlesung:

SIMPLIZIALE HOMOLOGIE, RANDOPERATOR	HOMOLOGIE SIMPLICIALE, OPÉRATEUR DE BORD
-------------------------------------	--

<i>Ein- und zwei- dimensionale Beispiele</i>	<i>Exemples en dimension un et deux</i>
--	---

## Allgemeine Topologie

TOPOLOGIE, TOPOLOGISCHER RAUM, OFFENE MENGEN, ABGESCHLOSSENE MENGEN

STETIGE ABBILDUNGEN, HOMÖOMORPHISMEN,  $X \approx Y$ , OFFENE ABBILDUNGEN, GESCHLOSSENE ABBILDUNGEN

UMGEBUNG EINES PUNKTES, BASIS DER TOPOLOGIE, SUBBASIS, ERZEUGTE TOPOLOGIE, KLEINERE TOPOLOGIE

METRISCHE RÄUME, OFFENER  $\epsilon$ -BALL, VON DER METRIK INDUZIERTER TOPOLOGIE

*Standardtopologie auf dem  $\mathbb{R}^n$ , Klumpentopologie, diskrete Topologie, Teilraumtopologie, Produkttopologie auf  $X \times Y$ , topologische Summe  $X + Y$*

$X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$ , ist stetig.

**Urysohns Lemma für metrische Räume.**

**Tietze Erweiterungslemma für metrische Räume.**

## Topologie générale

TOPOLOGIE, ESPACE TOPOLOGIQUE, PARTIES OUVERTES, PARTIES FERMÉES

APPLICATIONS CONTINUES, HOMÉOMORPHISMES,  $X \approx Y$ , APPLICATIONS OUVERTES, APPLICATIONS FERMÉES

VOISINAGE D'UN POINT, BASE DE LA TOPOLOGIE, SOUS-BASE, TOPOLOGIE ENGENDRÉE, TOPOLOGIE MOINS FINE

ESPACES MÉTRIQUES, BOULE OUVERTE DE RAYON  $\epsilon$ , TOPOLOGIE INDUITE PAR LA MÉTRIQUE

*topologie standard sur  $\mathbb{R}^n$ , topologie grossière, topologie discrète, topologie de sous-espace, topologie produit sur  $X \times Y$ , somme topologique  $X + Y$*

$X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$ , est continue.

**Théorème d'Urysohn pour les espaces métriques.**

**Théorème de Tietze pour les espaces métriques.**

OFFENE ÜBERDECKUNG, ENDLICHE TEILÜBERDECKUNG, KOMPAKTE RÄUME

RECOUVREMENT OUVERT, SOUS-RECOUVREMENT FINI, ESPACES COM-PACTS

stetige Bilder und abgeschl. Teilmen-  
gen kompakter Mengen sind kompakt  
 $X, Y$  sind kompakt  $\implies X \times Y, X + Y$   
sind kompakt

l'image continue et le sous-espace des  
espaces compacts sont compacts  
 $X, Y$  sont compacts  $\implies X \times Y, X + Y$   
sont compacts

$(0, 1]$  ist nicht kompakt,  
 $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$  ist kompakt

$(0, 1]$  n'est pas compact,  
 $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$  est compact

HAUSDORFFSCHE RÄUME, NORMALE  
RÄUME, LIMES EINER FOLGE

ESPACES SÉPARÉS, ESPACES NOR-  
MAUX, LIMITE D'UNE SUITE

*Beispiel eines nicht Hausdorffschen  
Raums. Beispiel eines Hausdorffschen  
Raums, der nicht normal ist.*

*exemple d'espace non séparé,  
exemple d'espace séparé mais pas nor-  
mal.*

Produkt, Summe und Teilräume von  
Hausdorffschen Räumen sind Haus-  
dorffsch

produit, somme et sous-espace des es-  
paces séparés sont séparés

*metrische Räume und diskrete Räume  
sind Hausdorffsche Räume*

*espaces métriques et espaces discrètes  
sont séparés*

$X$  Hausdorff,  $A \subset X$ ,  $A$  kompakt  $\implies$   
 $A$  abgeschlossen.

$X$  séparé,  $A \subset X$  fermé,  $A$  compact  
 $\implies A$  fermé.

$X$  kompakt und Hausdorff  $\implies X$   
normal.

$X$  compact et séparé  $\implies X$  nor-  
mal.

Satz von Heine-Borel

Théorème de Heine-Borel

$f : X \rightarrow Y$  bijektiv stetig,  $X$  kompakt,  
 $Y$  Hausdorff  $\implies f$  Homöomorphismus

$f : X \rightarrow Y$  une bijection continue,  
 $X$  compact,  $Y$  séparé  $\implies f$  homéo.

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $X$  kompakt  $\implies$   
 $f$  nimmt Max./Min. an

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $X$  compact  $\implies$   
 $f$  atteint ses bornes (max/min)

HÄUFUNGSPUNKT, ISOLIERTER  
PUNKT

POINT D'ACCUMULATION, POINT  
ISOLÉ

Satz von Bolzano-Weierstrass

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Lemma von Lebesgue

Lemme de Lebesgue

PRODUKT- UND “BOX”-TOPOLOGIE	TOPOLOGIE PRODUIT ET DE «BOX»
Satz von Tychonoff (ohne Beweis)	Théorème de Tychonoff (sans dém.)
LOKAL KOMPAKTE RÄUME	ESPACES LOCALEMENT COMPACTS
$X$ lokal kompakt und Hausdorff $\implies$ jede Umgebung enthält eine kompakte Umgebung	$X$ localement compact et séparé $\implies$ tout voisinage contient un voisinage compact
EINPUNKTKOMPAKTIFIZIERUNG $X^+$ , EIGENTLICHE ABBILDUNGEN	COMPACTIFIÉ D’ALEXANDROV $X^+$ , APPLICATION PROPRE
$X$ lokal kompakt $\implies X^+$ kompakt und $X \approx (X^+ - \{\infty\})$	$X$ localement compact $\implies X^+$ compact et $X \approx (X^+ - \{\infty\})$
$X, Y$ lokal kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann gilt: $f$ eigentlich $\iff \exists$ stetige Fortsetzung $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$	$X, Y$ localement compact, $f : X \rightarrow Y$ continue. Alors on a : $f$ propre $\iff f$ se prolonge en une application continue $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$
$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^k$	$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^k$
QUOTIENTENTOPOLOGIE, QUOTIENTENABBILDUNG, QUOTIENTENRAUM	TOPOLOGIE QUOTIENT, APPLICATION QUOTIENT, ESPACE QUOTIENT
$X/\sim$ , Quotientenraum bzgl. einer Äquivalenzrelation $\sim$	$X/\sim$ , espace quotient de $X$ par la relation d’équivalence $\sim$ .
reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$	espace projectif reel $\mathbb{R}P^n$
Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie	Propriété universelle de la topologie quotient
$\bar{B}^n/\partial\bar{B}^n \approx S^n, \mathbb{C}/L \approx T = S^1 \times S^1$ , Ankleben einer Zelle, $Y := \mathbb{R}/\sim$ , wo $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ , $X/A$ , der Kegel $CX$ von $X$	$\bar{B}^n/\partial\bar{B}^n \approx S^n, \mathbb{C}/L \approx T = S^1 \times S^1$ , attacher une cellule, $Y := \mathbb{R}/\sim$ , où $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ , $X/A$ , le cône $CX$ de $X$
REGULÄRE RÄUME	ESPACES RÉGULIERS
$A \subset X$ abgeschlossen. Dann gilt: $X$ regulär $\implies X/A$ Hausdorffsch $X$ normal $\implies X/A$ normal	$A \subset X$ fermé. Alors on a : $X$ régulier $\implies X/A$ séparé $X$ normal $\implies X/A$ normal

ABBILDUNGSZYLINDER  $M_f$ , ABBILDUNGSKEGEL  $C_f$       CYLINDRE DE L'APPLICATION  $M_f$ , CÔNE DE L'APPLICATION  $C_f$

ZUSAMMENHÄNGENDE RÄUME, WEGZUSAMMENHÄNGENDE RÄUME      ESPACES CONNEXES, ESPACES CONNEXES PAR ARCS

die zusammenhängenden Teilräume von  $\mathbb{R}$  sind die Intervalle      les parties connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles

wegzusammenhängend  $\implies$  zusammenhängend      connexe par arcs  $\implies$  connexe

*Beispiel eines zusammenhängenden Raums, der nicht wegzusammenhängend ist*      *Exemple d'un espace connexe, non connexe par arcs*

$X$  (weg)zusammenhängend und  $f$  stetig  $\implies f(X)$  (weg)zusammenhängend       $X$  connexe (par arcs) et  $f$  continue  $\implies f(X)$  connexe (par arcs)

$X, Y$  (weg)zusammenhängend  $\implies X \times Y$  (weg)zusammenhängend       $X, Y$  connexes (par arcs)  $\implies X \times Y$  connexe (par arcs)

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  versehen mit der "Box"-Topologie ist nicht zusammenhängend       $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  muni de la topologie de «box» n'est pas connexe

$A \subset X$  zusammenhängender Teilraum,  $A \subset B \subset \bar{A} \implies B$  zusammenhängend       $A \subset X$  sous-espace connexe,  $A \subset B \subset \bar{A} \implies B$  connexe

$A_\alpha \subset X$  zusammenhängend und  $p \in A_\alpha \forall \alpha \implies \bigcup_\alpha A_\alpha$  zusammenhängend       $A_\alpha \subset X$  connexe et  $p \in A_\alpha \forall \alpha \implies \bigcup_\alpha A_\alpha$  connexe

ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN      COMPOSANTES CONNEXES

Komponenten sind zusammenhängend, abgeschlossen und disjunkt      composantes connexes sont connexes, fermées et deux à deux disjointes

## Fundamentalgruppe und Überlagerungen

HOMOTOPIE ZWISCHEN ZWEI ABBILDUNGEN  $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$ ,  $f \simeq \tilde{f}$ , MENGE DER HOMOTOPIEKLASSEN  $[X, Y]$

HOMOTOPIE ZWISCHEN ZWEI ABBILDUNGEN VON PAAREN  $f, \tilde{f} : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , MENGE DER HOMOTOPIEKLASSEN  $[(X, A), (Y, B)]$

HOMOTOPIE VON WEGEN,  $f \simeq_p \tilde{f}$   
ADDITION VON WEGEN,  $f \star g$

$$f \simeq_p \tilde{f}, g \simeq_p \tilde{g} \implies f \star g \simeq_p \tilde{f} \star \tilde{g},$$

FUNDAMENTALGRUPPE  $\pi_1(X, x_0)$  VON  $X$  ZUM BASISPUNKT  $x_0$

$\pi_1(X, x_0)$  ist eine Gruppe

$$X \text{ konvex} \implies \pi_1(X, x_0) = 0$$

STERNFÖRMIGE TEILMENGE DES  $\mathbb{R}^n$

$$A \text{ sternförmig} \implies \pi_1(A, x_0) = 0$$

Weg  $\gamma$  von  $x_0$  nach  $x_1$  definiert Isomorphismus  $\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ ,  
 $\gamma \simeq_p \alpha \implies \hat{\gamma} = \hat{\alpha}$

$X$  wegzusammenhängend  
 $\implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

EINFACH ZUSAMMENH. RÄUME

$h : X \rightarrow Y$  STETIG  
 $\rightsquigarrow h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$

$h_*$  Homomorphismus,  $id_*$  ist die Identität und  $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$   
 $h$  Homöomorphismus  $\implies h_*$  Isomorphismus

## Groupe fondamentale et théorie des revêtements

HOMOTOPIE ENTRE DEUX APPLICATIONS  $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$ ,  $f \simeq \tilde{f}$ , ENSEMBLE DES CLASSES D'ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE  $[X, Y]$

HOMOTOPIE ENTRE DEUX APPLICATIONS  $f, \tilde{f} : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , ENSEMBLE DES CLASSES D'ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE  $[(X, A), (Y, B)]$

HOMOTOPIE COMME CHEMINS,  $f \simeq_p \tilde{f}$   
ADDITION DE CHEMINS,  $f \star g$

$$f \simeq_p \tilde{f}, g \simeq_p \tilde{g} \implies f \star g \simeq_p \tilde{f} \star \tilde{g},$$

GROUPE FONDAMENTAL  $\pi_1(X, x_0)$  DE  $X$  BASÉ EN  $x_0$

$\pi_1(X, x_0)$  est un groupe

$$X \text{ convexe} \implies \pi_1(X, x_0) = 0$$

SOUS-ESPACE ÉTOILÉ DE  $\mathbb{R}^n$

$$A \text{ étoilé} \implies \pi_1(A, x_0) = 0$$

chemin  $\gamma$  joignant  $x_0$  à  $x_1$  définit un isomorph.  $\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ ,  
 $\gamma \simeq_p \alpha \implies \hat{\gamma} = \hat{\alpha}$

$X$  connexe par arcs  
 $\implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

ESPACES SIMPLEMENT CONNEXES

$h : X \rightarrow Y$  CONTINUE  
 $\rightsquigarrow h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$

$h_*$  homomorphisme,  $id_*$  est l'identité et  $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$   
 $h$  homeomorphisme  $\implies h_*$  isomorphisme

$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$  (der Beweis benutzt Lemma 2.33 und Korollar 2.35)

$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$  (la démonstration utilise le lemme 2.33 et le corollaire 2.35)

RETRAKTION  $r : X \rightarrow A$ , RETRAKT  $A \subset X$

RÉTRACTION  $r : X \rightarrow A$ , RETRACT  $A \subset X$

$j : A \hookrightarrow X$  Retrakt mit Retraktion  $r : X \rightarrow A$ . Dann gilt:  $j_*$  ist injektiv und  $r_*$  ist surjektiv.

$j : A \hookrightarrow X$  retract et  $r : X \rightarrow A$  une rétraction. Alors on a :  $j_*$  est injective et  $r_*$  est surjective.

$S^1$  ist kein Retrakt von  $\bar{B}^2$

$S^1$  n'est pas un retract de  $\bar{B}^2$

Für eine stetige Abb.  $h : S^1 \rightarrow X$  gilt:  $h$  null-homotop  $\iff h$  kann auf  $\bar{B}^2$  stetig fortgesetzt werden  $\iff h_*$  ist trivial

Pour une application continue  $h : S^1 \rightarrow X$  on a :  $h$  est homotopiquement nulle  $\iff h$  a une extension continue  $\bar{B}^2 \rightarrow X \iff h_*$  est trivial

Die Inklusion  $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  ist nicht null-homotop

L'inclusion  $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  n'est pas homotopiquement nulle

Zu jedem nirgends verschwindenden Vektorfeld  $V$  auf  $\bar{B}^2$  gibt es  $p, q \in S^1$  mit  $V(p) = \lambda \cdot p$ ,  $V(q) = \mu \cdot q$  und  $\lambda > 0$ ,  $\mu < 0$

Pour tout champ de vecteurs  $V$  sur  $\bar{B}^2$  sans zéro il existe  $p, q \in S^1$  t.q.  $V(p) = \lambda \cdot p$ ,  $V(q) = \mu \cdot q$  et  $\lambda > 0$ ,  $\mu < 0$

Brouwerscher Fixpunktsatz für  $\bar{B}^2$

Théorème du point fixe de Brouwer pour  $\bar{B}^2$

Existenz eines positiven Eigenwertes für eine  $(3 \times 3)$ -Matrix mit positiven Einträgen

Existence d'une valeur propre positive pour une  $(3 \times 3)$ -matrice dont tous les coefficients sont positifs

Fundamentalsatz der Algebra

Théorème fondamental de l'algèbre

ÜBERLAGERUNG  $p : E \rightarrow B$ , BASIS, TOTALRAUM, ÜBERLAGERUNGS-ABBILDUNG, BLÄTTER

REVÊTEMENT  $p : E \rightarrow B$ , BASE, ESPACE TOTAL, APPLICATION DU REVÊTEMENT, FEUILLETS

$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  
 $p_n : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto z^n$ ,  
 $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto z^n$

$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  
 $p_n : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto z^n$ ,  
 $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto z^n$

LOKALER HOMÖOMORPHISMUS

HOMÉOMORPHISME LOCAL

Jede Überlagerungsabbildung ist ein lokaler Homöomorphismus

Tout revêtement est un homéomorphisme local

Das Produkt von zwei Überlagerungen und die Einschränkung von Überlagerungen sind Überlagerungen

Le produit de deux revêtement et la restriction du revêtement sont revêtements

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$$

LIFT (HOCHHEBUNG) VON WEGEN

RELÈVEMENT (RELEVÉ) DES CHEMINS

Zu  $\alpha : [a, b] \rightarrow B$  stetig und  $e_0 \in p^{-1}(\alpha(a))$  gibt es genau einen Lift  $\tilde{\alpha}$  mit der Anfangswert  $\tilde{\alpha}(0) = e_0$

Pour  $\alpha : [a, b] \rightarrow B$  continue et  $e_0 \in p^{-1}(\alpha(a))$  il existe un relevé unique  $\tilde{\alpha}$  avec valeur initiale  $\tilde{\alpha}(0) = e_0$

Sei  $H : Z \times [0, 1] \rightarrow B$  stetig,  $h_0 : Z \rightarrow B$  stetig mit  $h_0(z) := H(z, 0)$  und  $\tilde{h}_0 : Z \rightarrow E$  ein Lift von  $h_0 : Z \rightarrow B$ . Dann gibt es genau einen Lift  $\tilde{H} : Z \times [0, 1] \rightarrow E$  von  $H$  mit Anfangswert  $\tilde{H}(z, 0) = \tilde{h}_0(z)$

Soit  $H : Z \times [0, 1] \rightarrow B$  continue,  $h_0 : Z \rightarrow B$  continue avec  $h_0(z) := H(z, 0)$  et  $\tilde{h}_0 : Z \rightarrow E$  un relevé de  $h_0 : Z \rightarrow B$ . Alors il existe un relevé unique  $\tilde{H} : Z \times [0, 1] \rightarrow E$  de  $H$  avec valeur initiale  $\tilde{H}(z, 0) = \tilde{h}_0(z)$

$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow B$  homotop,  $\alpha \simeq_p \beta$ , und  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow E$  Lifts von  $\alpha, \beta$  mit gleichem Anfangswert, d.h.  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ . Dann gilt:  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$  und  $\tilde{\alpha} \simeq_p \tilde{\beta}$ .

$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow B$  homotop,  $\alpha \simeq_p \beta$ , et  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow E$  relevés de  $\alpha, \beta$  avec la même valeur initiale,  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ . Alors on a :  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$  et  $\tilde{\alpha} \simeq_p \tilde{\beta}$ .

$\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$  ist injektiv.

$\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$  est injectif.

CHARAKTERISTISCHE UNTERGRUPPE EINER ÜBERLAGERUNG

SOUS-GROUPE CARACTERISTIQUE DE REVÊTEMENT

Sei  $F : (Z, z_0) \rightarrow (B, b_0)$  stetig. Hat  $F$  einen Lift  $(Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$  in der Überlagerung  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ , so ist  $F_*(\pi_1(Z, z_0))$  Untergruppe der charakteristischen Untergruppe. Für  $Z$  wegzusammenhängend gibt es höchstens einen Lift  $(Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$ .

Soit  $F : (Z, z_0) \rightarrow (B, b_0)$  continue. Si  $F$  admet un relevé  $(Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$  dans le revêtement  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ , alors  $F_*(\pi_1(Z, z_0))$  est un sous-groupe de sous-groupe caractéristique. Pour  $Z$  connexe par arcs il existe au plus un relevé  $(Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$ .

LOKAL WEGZUSAMMENHÄNGEND

LOCALEMENT CONNEXE PAR ARCS

*Beispiel eines wegzusammenhängenden Raums, der nicht lokal wegzusammenhängend ist*

*Exemple d'un espace connexe par arcs mais non localement connexe par arcs*

Ist  $Z$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, dann gilt:  
 $F$  hat Lift  $\tilde{F} : (Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$  in der Überlagerung  $\iff F_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

Soit  $Z$  connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors on a :  
 $F$  admet un relevé  $\tilde{F} : (Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$  dans le revêtement  $\iff F_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

ISOMORPHISMUS ZWISCHEN ZWEI ÜBERLAGERUNGEN  $E \xrightarrow{p} B$  UND  $E' \xrightarrow{p'} B$ , DECKTRANSFORMATION, GRUPPE  $\mathcal{D}$  DER DECKTRANSFORMATIONEN

ISOMORPHISME ENTRE DEUX REVÊTEMENTS  $E \xrightarrow{p} B$  ET  $E' \xrightarrow{p'} B$ , TRANSFORMATION DE DECK, GROUPE  $\mathcal{D}$  DE TRANSFORMATIONS DE DECK

Für  $E, E'$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend gilt:  
 Es gibt einen Iso.  $\Phi : E \rightarrow E'$  mit  $\Phi(e_0) = e'_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$

Pour  $E, E'$  connexes par arcs et localement connexes par arcs on a :  
 Il existe un iso.  $\Phi : E \rightarrow E'$  avec  $\Phi(e_0) = e'_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$

$E \rightarrow B$  Überlagerung,  $E$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend,  $e_0, \tilde{e}_0 \in E$  mit  $p(e_0) = p(\tilde{e}_0)$ . Dann gilt:  
 Es gibt  $\varphi \in \mathcal{D}$  mit  $\varphi(e_0) = \tilde{e}_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$

$E \rightarrow B$  un revêtement,  $E$  connexe par arcs et localement connexe par arcs,  $e_0, \tilde{e}_0 \in E$  avec  $p(e_0) = p(\tilde{e}_0)$ . Alors on a :  
 Il existe  $\varphi \in \mathcal{D}$  avec  $\varphi(e_0) = \tilde{e}_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$

$p : E \rightarrow B$  und  $p' : E' \rightarrow B'$  Überlagerungen,  $E, E'$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend,  $e_0 \in E, e'_0 \in E'$  mit  $p(e_0) = p'(e'_0) =: b_0$ . Dann gilt:  
 Es gibt Isomorphismus  $\Phi : E \rightarrow E'$  (nicht notwendig  $e_0 \mapsto e'_0$ )  $\iff p_*(\pi_1(E, e_0))$  und  $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$  sind in  $\pi_1(B, b_0)$  konjugiert.

$p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B'$  deux revêtements,  $E, E'$  connexes par arcs et localement connexes par arcs,  $e_0 \in E, e'_0 \in E'$  avec  $p(e_0) = p'(e'_0) =: b_0$ . Alors on a :  
 Il existe un isomorphisme  $\Phi : E \rightarrow E'$  (pas nécessairement  $e_0 \mapsto e'_0$ )  $\iff p_*(\pi_1(E, e_0))$  et  $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$  sont conjugués dans  $\pi_1(B, b_0)$ .

*Isomorphieklassen von wegzusammenhängenden Überlagerungen der  $S^1$*

*classes d'isomorphie de revêtements connexes du cercle  $S^1$*

Sei  $E \rightarrow B$  eine Überlagerung,  $E$  wegzusammenhängend  $\implies \mathcal{D}$  operiert frei auf  $E$ .

Soit  $E \rightarrow B$  un revêtement,  $E$  connexe par arcs  $\implies$  l'opération de  $\mathcal{D}$  sur  $E$  est libre.

EIGENTLICH DISKONTINUIERLICHE OPERATIONEN

OPERATION PROPREMENT DISCONTINUE



$E \rightarrow B$  Überlagerung,  $E$  wegzusammenhängend  $\implies \mathcal{D}$  operiert eigentlich diskontinuierlich auf  $E$ .

$E \rightarrow B$  revêtement,  $E$  connexe par arcs  $\implies \mathcal{D}$  opère de façon proprement discontinument sur  $E$ .

Ist  $E$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Ist  $G$  eine Gruppe von Homöomorphismen, die auf  $E$  eigentlich diskontinuierlich operiert, so ist  $p : E \rightarrow B := E/G$  eine Überlagerung (Übungsaufgabe).

Soit  $E$  connexe par arcs et localement connexe par arcs. Si  $G$  est un groupe d'homomorphismes qui opère proprement discontinument sur  $E$ , alors  $p : E \rightarrow B := E/G$  est un revêtement (exercice).

*Operation von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}$ , Operation von  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  auf  $S^1$ .*

*Operation de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}$ , Operation de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sur  $S^1$ .*

UNIVERSELLE ÜBERLAGERUNG  
SEMILOKAL EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDER RAUM

REVÊTEMENT UNIVERSEL  
ESPACE SEMI-LOCALEMENT SIMPLEMENT CONNEXE

Sei  $B$  wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend und sei  $b_0 \in B$  (Basispunkt). Dann gilt:

Soit  $B$  connexe par arcs, localement connexe par arcs et soit  $b_0 \in B$  (point de base). Alors on a :

1)  $B$  besitzt eine universelle Überlagerung.

1)  $B$  admet un revêtement universel.  
2) Pour tout sous-groupe  $H \subset \pi_1(B, b_0)$  il existe un revêtement  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  t.q. le groupe caractéristique est égal à  $H$ .

2) Für jede Untergruppe  $H \subset \pi_1(B, b_0)$  gibt es eine Überlagerung  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  mit charakteristischer Untergruppe  $H$ .

(sans dém., seulement l'idée de la démonstration)

(ohne Beweis, nur Beweisidee)

Sei  $G := \pi_1(B, b_0)$  und  $H$  charakteristische Untergruppe einer Überlagerung mit wegzusammenhängendem und lokal wegzusammenhängendem Totalraum. Dann ist die Gruppe der Decktransformationen  $\mathcal{D}$  isomorph zur Quotientengruppe  $N_G(H)/H$ . (ohne Beweis)

Soit  $G := \pi_1(B, b_0)$  et soit  $H$  le sous-groupe caractéristique d'un revêtement avec espace total connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors, le groupe de transformations de Deck  $\mathcal{D}$  est isomorph à groupe quotient  $N_G(H)/H$ . (sans dém.)

## Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

$n$ -DIMENSIONALE TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT, KARTE, ATLAS, KARTENWECHSEL  
DIFFERENZIERBARER ATLAS, DIFFERENZIERBARE STRUKTUR, DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEIT

$\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Teilmenge, Sphäre  $S^n$ , Torus  $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten  
die topologische Summe von  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit,  
das Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, offene Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten

DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN ZWISCHEN DIFFERENZIERB. MANNIGFALTIGKEITEN, DIFFEOMORPHISMEN

jede Mannigfaltigkeit  $M$  ist lokal kompakt, lokal weg-zusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend und es gilt:  
 $M$  zusammenhängend  $\iff M$  weg-zusammenhängend

ÄQUIVALENZ VON KURVEN, TANGENTIALVEKTOREN, TANGENTIALRAUM  $T_pM$ , DIFFERENTIAL  $\varphi_*$  EINER DIFFERENZIERBAREN ABBILDUNG  $\varphi$

$U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $p \in U \implies T_pU \cong \mathbb{R}^m$  (kanonischer Isomorphismus), das Differential von Karten induziert auf dem Tangentialraum  $T_pM$  eine Vektorraumstruktur

## Variétés différentielles

VARIÉTÉ TOPOLOGIQUE DE DIMENSION  $n$ , CARTE, ATLAS, CHANGEMENT DE CARTES  
ATLAS DIFFÉRENTIEL, STRUCTURE DIFFÉRENTIELLE, VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE

$\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert, sphère  $S^n$ , tore  $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  sont des variétés différentielles  
la somme topologique des variétés différentielles de dimension  $n$  est une variété différentielle de dimension  $n$ ,  
le produit des deux variétés différentielles est une variété différentielle, chaque ouvert d'une variété différentielle est une variété différentielle

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES ENTRE VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES, DIFFÉOMORPHISMES

chaque variété est localement compact, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe et on a :  
 $M$  connexe  $\iff M$  connexe par arcs

RELATION D'ÉQUIVALENCE DES COURBES, VECTEURS TANGENT, L'ESPACE TANGENT  $T_pM$ , DIFFÉRENTIELLE  $\varphi_*$  D'UNE APPLICATION DIFFÉRENTIABLE  $\varphi$

$U \subset \mathbb{R}^m$  ouvert,  $p \in U \implies T_pU \cong \mathbb{R}^m$  (isomorphisme canonique), en utilisant les différentielles des cartes l'espace tangent  $T_pM$  est un espace vectoriel

$\varphi_*$ wird lokal in Karten durch die Jacobi-Matrix beschrieben	Localement la différentielle $\varphi_*$ est représenté par la matrice jacobienne
FUNKTIONSKEME, DERIVATIONEN, VEKTORRAUM DER DERIVATIONEN $Der_p M$ , DAS DIFFERENTIAL $\varphi_*$ IST EINE AB- BILDUNG ZWISCHEN DERIVATIONEN	GERMES, DÉRIVATIONS, ESPACE VEC- TORIEL DES DÉRIVATIONS $Der_p M$ , LA DIFFÉRENTIELLE $\varphi_*$ EST UNE AP- PLICATION ENTRE DÉRIVATIONS
$(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m)$ ist eine Basis von $Der_q \mathbb{R}^m$	$(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m)$ est une base de $Der_q \mathbb{R}^m$
$\Theta : T_p M \rightarrow Der_p M$ ist ein Isomor- phismus von Vektorräumen	$\Theta : T_p M \rightarrow Der_p M$ est un isomor- phisme d'espace vectoriel
REGULÄRE WERTE	VALEURS RÉGULIÈRES
Urbild jedes regulären Wertes ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Lemma von Sard (beides ohne Beweis)	pré-image de toute valeur régulière est une variété différentielle, Lemme de Sard (sans dém.)
TANGENTIALBÜNDEL $TM$	FIBRÉ TANGENT $TM$
$T\mathbb{R}^m, TU$ für $U$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ .	$T\mathbb{R}^m, TU$ pour $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ .
$TM$ ist $2m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit	$TM$ est une variété différentielle de dimension $2m$
$k$ -FACH LINEARE UND ALTERNIERENDE $k$ -LINEARE FORMEN FÜR EINEN $m$ -DIMENSIONALEN VEKTORRAUM $V$ , $Alt^k(V)$	FORME $k$ -LINÉAIRE ET FORME $k$ - LINÉAIRE ALTERNÉE POUR UN ES- PACE VECTORIEL $V$ DE DIMENSION $m$ , $Alt^k(V)$
<i>det</i> ist alternierende $m$ -Form	<i>det</i> est une $m$ -forme alternée
KOMPONENTEN EINER ALTERNIEREN- DEN $k$ -FORM BZGL. EINER BASIS	COMPOSANTES DE FORME $k$ -LINÉAIRE ALTERNÉE PAR RAPPORT À UNE BASE
$Alt^k(V)$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension $\binom{m}{k}$	$Alt^k(V)$ est un espace vectoriel réel de dimension $\binom{m}{k}$
PULLBACK ODER ZURÜCKGEHOLTE (ALTERNIERENDE) $k$ -FORM $f^*(\omega)$ FÜR HOMOMORPHISMUS $f : V \rightarrow W$	PULL-BACK $f^*(\omega)$ D'UNE $k$ -FORME $\omega$ POUR UN HOMOMORPHISME $f : V \rightarrow W$ , $f^* : Alt^k(W) \rightarrow Alt^k(V)$

DIFFERENTIALFORMEN VOM GRAD  $k$  AUF  $M$  ( $k$ -FORMEN AUF  $M$ ),  $\Omega^k(M)$       FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEGRÉ  $k$  SUR  $M$ ,  $\Omega^k(M)$

PULL-BACK  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  FÜR EINE DIFFERENZIERBARE ABBILDUNG  $f : M \rightarrow N$       PULL-BACK  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  POUR UNE APPLICATION DIFFÉRENTIABLE  $f : M \rightarrow N$

ÄUSSERE ABLEITUNG  $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$       DIFFÉRENTIELLE DES FORMES  $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$

Berechnung von  $\ker(d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M))$

calcul de  $\ker(d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M))$

ÄUSSERES (ODER DACH-)PRODUKT  $\wedge$  VON ALTERNIERENDEN FORMEN      PRODUIT EXTÉRIEUR  $\wedge$  DES FORMES ALTERNÉES

Eigenschaften von  $\wedge$

propriétés de  $\wedge$

ÄUSSERES (ODER DACH-)PRODUKT  $\wedge$  VON DIFFERENTIALFORMEN      PRODUIT EXTÉRIEUR  $\wedge$  DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

ÄUSSERE (ODER CARTAN-)ABLEITUNG  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ , DE RHAM KOMPLEX      DIFFÉRENTIELLE DES FORMES  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ , COMPLEXE DE DE RHAM

axiomatische Beschreibung der äusseren Ableitung

caractérisation axiomatique de différentielle des formes

EXAKTE UND GESCHLOSSENE  $k$ -FORMEN,  $k$ -TE DE RHAM KOHOMOLOGIE  $H_{dR}^k(M)$

FORMES EXACTES ET FORMES FERMÉES,  $k$ -IÈME ESPACE VECTORIEL DE DE RHAM COHOMOLOGIE  $H_{dR}^k(M)$

de Rham Kohomologie von einem Punkt, von  $\mathbb{R}$  und von  $S^1$

de Rham cohomologie d'un point, de  $\mathbb{R}$  et de  $S^1$