Informationen zur mündlichen Prüfung
Algebra/Geometrie

Der Prüfungsstoff umfasst die Vorlesungen, die Übungsaufgaben (exercices) und die Anwesenheitsaufgaben (exercices de présence).

Hier eine unvollständige Liste von DEFINITIONEN, *Beispielen* und Theoremen aus den Vorlesungen Algebra/Geometrie II:

Mengentheoretische Topologie

TOPOLOGIE, TOPOLOGISCHER RAUM,
OFFENE MENGEN, ABGESCHLOSSENE MENGEN,
STETIGE ABBILDUNGEN, HOMÖOMORPHISMEN, $X \approx Y$
OFFENE ABBILDUNGEN, GESCHLOSSENE ABBILDUNGEN,
UMGEBUNG EINES PUNKTES,
BASIS DER TOPOLOGIE, SUBBASIS DER TOPOLOGIE,
KLEINERE TOPOLOGIE
ERZEUGEN VON TOPOLOGIEN (= KLEINSTE TOPOLOGIE, DIE EINE GEGEBENE MENGE VON TEILMENGEN ENTHÄLT)

Metrische Räume, Standardtopologie auf dem $\mathbb{R}^n$,
Klumpentopologie, diskrete Topologie,
Teilraumtopologie,
Topologie: $U \subset X$ offen $\iff$ $U = \emptyset$ oder $X - U$ endlich.

PRODUKTTOPOLOGIE AUF $X \times Y$, TOPOLOGISCHE SUMME $X + Y$

Für einen metrischen Raum (X, d) ist die Abb. $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$, stetig.
Urysohns Lemma für metrische Räume.
Tietze Erweiterungslemma für metrische Räume.

HAUSDORFFSCHE RÄUME, NORMALE RÄUME,
LIMES EINER FOLGE

Beispiel eines nicht Hausdorffschen Raums,
Beispiel eines Hausdorffschen Raums, der nicht normal ist.

Produkt, Summe und Teilräume von Hausdorffschen Räumen sind Hausdorffsch.

Metrische Räume und diskrete Räume sind Hausdorffsche Räume.

OFFENE ÜBERDECKUNG, TEILÜBERDECKUNG, KOMPAKTE RÄUME

Stetige Bilder und abgeschl. Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.
X, Y kompakt $\implies$ $X \times Y, X + Y$ kompakt.

$(0,1]$ *ist nicht kompakt,* $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ *ist kompakt.*

X Hausdorff, $A \subset X$, A kompakt $\implies$ A abgeschlossen.
Satz von Heine-Borel (Beschreibung kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$)
$f: X \to Y$ bij. stetig, X kompakt, Y Hausd. $\Rightarrow$ f Homöom.
$f: X \to \mathbb{R}$ stetig, X kompakt $\Rightarrow$ f nimmt Max./Min. an.

Häufungspunkt, isolierter Punkt

Satz von Bolzano-Weierstrass
Lemma von Lebesgue

Produkt- und Box-Topologie für $\prod X_\alpha$

Satz von Tychonoff (ohne Beweis)

lokal kompakt

X lokal komp., Hausdorff $\Rightarrow$ jede Umgebung enthält eine komp. Umgebung.

Einpunktkompaktifizierung X^+, eigentliche Abbildungen

X lokal kompakt $\implies$ X^+ kompakt und $X \approx (X^+ - \{\infty\})$.
X, Y lokal kompakt, $f: X \to Y$ stetig. Dann gilt: f eigentlich $\iff$ $\exists$ stetige Fortsetzung $f^+: X^+ \to Y^+$.

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$

Quotiententopologie, Quotientenabbildung, Quotientenraum

$X/\sim$, *Quotientenraum bzgl. einer Äquivalenzrelation*
Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$.

Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie

X/A, $\bar{B}^n/\partial\bar{B}^n \approx S^n$, *Ankleben einer Zelle*
$Y := \mathbb{R}/\sim$, *wobei* $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$
Kegel CX *von* X

Es gilt: $CS^n \approx \bar{B}^{n+1}$.
$A \subset X$ abgeschlossen. Dann gilt X regulär $\implies$ X/A Hausdorffsch und es gilt X normal $\implies$ X/A normal.

Abbildungszylinder M_f , Abbildungskegel C_f
zusammenhängende Räume, wegzusammenhängende Räume

Die zusammenhängenden Teilräume von $\mathbb{R}$ sind die Intervalle.

wegzusammenhängend $\implies$ zusammenhängend

Beispiel eines zusammenhängenden Raums, der nicht wegzusammenhängend ist.

X (weg)zusammenhängend und f stetig $\Rightarrow f(X)$ (weg)zusammenhängend.
X, Y (weg)zusammenhängend $\implies X \times Y$ (weg)zusammenhängend.
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ versehen mit der Box-Topologie ist nicht zusammenhängend.
$A \subset X$ zusammenhängender Teilraum, $A \subset B \subset \bar{A} \Rightarrow B$ zusammenhängend.
$A_\alpha \subset X$ zusammenhängend, $p \in A_\alpha \ \forall\, \alpha \implies \bigcup_\alpha A_\alpha$ zusammenhängend.

ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN

Komponenten sind zusammenhängend, abgeschlossen und disjunkt.

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Homotopie zwischen Abbildungen $f, \tilde{f} : X \to Y$, $f \simeq \tilde{f}$,
Homotopie zwischen Abbildungen $f, \tilde{f} : (X, A) \to (Y, B)$,
Menge der Homotopieklassen $[(X, A), (Y, B)]$,
Homotopie von Wegen, $f \simeq_p \tilde{f}$
Addition von Wegen, $f \star g$.

$f \simeq_p \tilde{f}$, $g \simeq_p \tilde{g} \implies f \star g \simeq_p \tilde{f} \star \tilde{g}$,

$\pi_1(X, x_0)$ Fundamentalgruppe von X zum Basispunkt x_0

$\pi_1(X, x_0)$ ist eine Gruppe.

X konvex $\implies \pi_1(X, x_0) = 0$.

sternförmige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

A sternförmig $\implies \pi_1(X, x_0) = 0$.
γ Weg von x_0 nach x_1 definiert Isomorphismus $\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$,
$\gamma \simeq_p \alpha \implies \hat{\gamma} = \hat{\alpha}$

X einfach zusammenhängend

$h : X \to Y$ stetig $\implies h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, h(x_0))$ Homomorphismus,
id_* ist die Identität und $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$,
h Homöomorphismus $\implies h_*$ Isomorphismus.
$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$

Retraktion, Retrakt

$j : A \hookrightarrow X$ Retrakt mit Retraktion $r : X \to A$. Dann gilt: j_* injektiv und r_* surjektiv.
S^1 ist kein Retrakt von $\bar{B}^2$.
Für eine stetige Abb. $h : S^1 \to X$ gilt: h null-homotop $\iff$ h kann auf $\bar{B}^2$ stetig fortgesetzt werden $\iff$ h_* ist trivial.
Die Inklusion $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ist nicht null-homotop.
Zu einem nirgends verschwindenden Vektorfeld V auf $\bar{B}^2$ gibt es $p, q \in S^1$ mit $V(p) = \lambda \cdot p$, $V(q) = \mu \cdot q$ und $\lambda > 0$, $\mu < 0$.
Brouwerscher Fixpunktsatz für $\bar{B}^2$
Existenz eines pos. EW für eine (3×3)-Matrix mit positiven Einträgen
Fundamentalsatz der Algebra

Überlagerungsabbildung $p : E \to B$, Überlagerung, Blätter

Überlagerungen sind z.B. $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos t, \sin t)$, $p_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ oder $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$ ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$, ist keine Überlagerung).

Die Überlagerungsabbildung ist ein lokaler Homöomorphismus.
Produkte von Überlagerungen sind Überlagerungen,
die Einschänkung einer Überlagerung ist eine Überlagerung,

$\mathbb{R}^2 \to T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$ ist eine Überlagerung.

Lift (Hochhebung) eines Weges

Zu $\alpha : [a, b] \to B$ stetig und $e_0 \in p^{-1}(\alpha(a))$ gibt es genau einen Lift $\widetilde{\alpha}$ mit der Anfangsbedingung $\widetilde{\alpha}(0) = e_0$.
Sei $H : Z \times [0,1] \to B$ stetig und $\widetilde{h}_0 : Z \to E$ ein Lift von $h_0 : Z \to B$, $h_0(z) := H(z, 0)$. Dann gibt es genau einen Lift $\widetilde{H} : Z \times [0,1] \to E$ mit Anfangsbedingung $\widetilde{H}(z, 0) = \widetilde{h}_0(z)$.
$\alpha, \beta : [0,1] \to B$ und $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : [0,1] \to E$ Lifts von α, β mit gleicher Anfangsbedingung, d.h. $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$. Dann gilt: $\alpha \simeq_p \beta \implies \widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$.
$p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ ist injektiv.

charakteristische Untergruppe einer Überlagerung
lokal wegzusammenhängend

Beispiel eines wegzusammenhängenden Raums, der nicht lokal wegzusammenhängend ist.

Sei $F : (Z, z_0) \to (B, b_0)$ stetig. Hat F einen Lift $(Z, z_0) \to (E, e_0)$ in der Überlagerung $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$, so ist der Lift eindeutig.
Ist Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, dann gilt:
F hat einen Lift in der Überlagerung $\iff F_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Isomorphismus zwischen zwei Überlagerungen $E \xrightarrow{p} B$ und $E' \xrightarrow{p'} B$

Es gibt Iso. $\Phi : (E, e_0) \to (E', e'_0) \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$.

Decktransformation, $\mathcal{D}$ Gruppe der Decktransformationen

$E \to B$ Überlagerung, E wegzusammenhängend $\implies$ $\mathcal{D}$ operiert frei auf E.

G operiert eigentlich diskontinuierlich auf dem Raum X

$E \to B$ Überlagerung, E wegzusammenhängend $\implies$ $\mathcal{D}$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf E.

$E \to B$ Überlagerung, E wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend
$e_0, \tilde{e}_0 \in E$ mit $p(e_0) = p(\tilde{e}_0)$. Dann gilt: Es gibt $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\varphi(e_0) = \tilde{e}_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$.

(Ohne Beweis): Ist E wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und ist G eine diskrete Gruppe, die auf E eigentlich diskontinuierlich operiert, so ist $p : E \to B := E/G$ eine Überlagerung.

universelle Überlagerung
semilokal einfach zusammenhängend

Sei B wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend und sei $b_0 \in B$ ein Basispunkt. Dann gilt:
1) B besitzt eine universelle Überlagerung.
2) Für jede Untergruppe $H \subset \pi_1(B, b_0)$ gibt es eine Überlagerung $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ mit charakteristischer Untergruppe H (ohne Beweis).

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

n-DIMENSIONALE TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT, KARTE, ATLAS, KARTENWECHSEL
DIFFERENZIERBARER ATLAS, DIFFERENZIERBARE STRUKTUR, DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEIT

$\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge, Sphäre S^n, Torus $T^2 := \mathbb{R}^2/Z^2$ sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.
Die topologische Summe von n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit,
das Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,
offene Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN ZWISCHEN MANNIGFALTIGKEITEN, DIFFEOMORPHISMEN

Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$, differenzierbare Struktur auf dem homöomorphen Bild einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit

Jede Mannigfaltigkeit M ist lokal kompakt, lokal wegzusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend und es gilt:
M zusammenhängend $\iff$ M wegzusammenhängend.

ÄQUIVALENZ VON KURVEN, TANGENTIALVEKTOREN, TANGENTIALRAUM T_pM, DIFFERENTIAL φ_* EINER DIFFERENZIERBAREN ABB. $\varphi : M \to N$

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen $p \in U \implies T_pU \cong \mathbb{R}^m$ (kanonischer Isomorphismus)
Das Differential von Karten induziert auf den Tangentialräumen T_pM, $p \in M$, eine Vektorraumstruktur.

ÄQUIVALENZKLASSEN VON FUNKTIONSKEIMEN,
VEKTORRAUM DER DERIVATIONEN $\mathcal{D}_pM$,
DAS DIFFERENTIAL φ_* VON φ ALS ABBILDUNG ZWISCHEN DERIVATIONEN

$(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m)$ ist eine Basis von $\mathcal{D}_q\mathbb{R}^m$.
$T_pM \cong \mathcal{D}_pM$ und der Isomorphismus ist verträglich mit dem Differential φ_* (es gibt ein kommutatives Diagramm).
φ_* lässt sich in lokalen Karten durch die Jacobimatrix beschreiben.

$\varphi : x \mapsto \sum x_i^2$ als Abbildung auf $\mathbb{R}^m$ oder auf S^{m-1}, die Höhenfunktion $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3$ auf S^2

SUBMERSIONEN, IMMERSIONEN, EINBETTUNGEN,
REGULÄRE PUNKTE, REGULÄRE WERTE,

Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten, Kodimension

Lemma von Sard (ohne Beweis)

Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Urbilder regulärer Werte sind Untermannigfaltigkeiten oder leer (Konsequenz aus dem Satz über inverse Funktionen).

$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum x_i^2$, *Höhenfunktion auf* S^2, *orthogonale Gruppe* $O(n)$

Tangentialbündel, Normalenbündel $\nu(N)$

q reg. Wert von $\varphi : M \to Z$, $N := \varphi^{-1}(q) \implies \varphi_* : \nu_p(N) \xrightarrow{\cong} T_qZ$.

Differentialformen und de Rham Kohomologie

ALTERNIERENDE k-FORMEN FÜR EINEN n-DIMENSIONALEN VEKTORRAUM V, $Alt^k(V)$,
PULLBACK ODER ZURÜCKGEHOLTE ALTERNIERENDE FORM $f^*(\omega)$,
KOMPONENTEN EINER ALTERNIERENDEN k-FORM BZGL. EINER BASIS

Alternierende 1-Formen sind Linearformen,
det ist alternierende n-Form ($n = \dim V$).

$Alt^k(V)$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension $\binom{n}{k}$

DIFFERENTIALFORMEN VOM GRAD k AUF M (KURZ: k-FORMEN AUF M), $\Omega^k(M)$,
$f : M \to N$ DIFFERENZIERBAR INDUZIERT PULLBACK ABBILDUNG $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$,
DIFFERENTIAL (ODER ÄUSSERE ABLEITUNG) $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$

Berechnung von $ker(d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M))$

DACH- (ODER WEDGE-)PRODUKT $\wedge$ VON ALTERNIERENDEN FORMEN UND VON DIFFERENTIALFORMEN

Eigenschaften von $\wedge$

ÄUSSERE (ODER CARTAN-)ABLEITUNG $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))$, DE RHAM KOMPLEX

Axiomatische Beschreibung der äusseren Ableitung (siehe Theorem 4.19)
Natürlichkeit der äusseren Ableitung ($d(f^*(\omega)) = f^*(d(\omega))$)

EXAKTE UND GESCHLOSSENE k-FORMEN (KORÄNDER UND KOZYKEL), k-TE DE RHAM KOHOMOLOGIE $H^k_{dR}(M)$, kTE BETTIZAHL, DE RHAM KOHOMOLOGIE $H^*_{dR}(M)$, DACHPRODUKT AUF $H^*_{dR}(M)$, PULLBACK $f^* : H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$

Dachprodukt ist bilinear und graduiert kommutativ,
$H^*_{dR}(M)$ ist ein graduiert kommutativer Ring mit 1,
$f^* : H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$ ist ein Ringhomomorphismus,
id^* ist die Identität, $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

de Rham Kohomologie von einem Punkt, von l Punkten, von $\mathbb{R}$, (a, b) oder S^1

Märchenstunde: Orientierung einer Mannigfaltigkeit, Volumenform, Integration von n-Formen, Mannigfaltigkeiten mit Rand, Satz von Stokes, Poincaré-Dualität, $\pi_1(M)_{ab}$ endlich $\implies b_1(M) = 0$, de Rham Kohomologie von S^2.