Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE II

BONUS SÉRIE 12

À rendre avant le jeudi 23 mai, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 1. Soit $(V, \langle\,,\,\rangle)$ un espace vectoriel hermitien de dimension finie et $F \in \mathrm{End}(V)$. Montrez que

(a) F est unitaire implique que F est normal et

(b) F est normal implique que $\mathrm{im}(F^{ad}) = \mathrm{im}(F)$.

2. Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ une matrice anti-hermitienne, c.-à-d. $\bar{A}^T = -A$. Montrez que

(a) A est normal et

(b) toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A sont imaginaires pures, c.-à-d. $\lambda_j \in i \cdot \mathbb{R}$ $\forall\, j$.

Exercice 2 1. (a) Montrez que la matrice $A := \begin{pmatrix} 2i & 0 & 2i \\ 2i & 2i & 0 \\ 0 & 2i & 2i \end{pmatrix}$ est normale.

(b) Déterminez une base orthonormale de vecteurs propres de A.

2. Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ une matrice normale avec des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrez que :

(a) A est unitaire $\iff |\lambda_i| = 1\ \forall\, i$.

(b) A est hermitienne $\iff \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i$.

Exercice 3

Soit F un endomorphisme d'un espace hermitien $(V, \langle\,,\,\rangle)$. Montrez que

$$\langle F(v), v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in V \implies F = 0.$$

Indication : Développez $\langle F(v+w), v+w\rangle$ *et* $\langle F(v + i\cdot w), v + i \cdot w\rangle$.

Exercice 4

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F : V \to V$ un endomorphisme t.q. $F(F(v)) = -F(v)\ \forall\, v \in V$. Montrez que :

1. $V = \ker(F) \oplus \mathrm{im}(F)$,
2. les valeurs propres de F sont dans l'ensemble $\{0, -1\}$ et
3. $\mu(F; 0) = \dim(\ker(F))$, $\mu(F; -1) = \mathrm{rg}(F)$.
4. Déterminez le polynôme minimal de F.