Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 11

À rendre avant le jeudi 16 mai, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1

1. Soit V un $\mathbb{K}$-espace de dimension n. Soient $v, w \in V$. Supposons que $v \neq w$. Montrez qu'il existe $\varphi \in V^*$ t.q. $\varphi(v) \neq \varphi(w)$.
2. Soit $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire qui est antisymétrique et non dégénérée. Montrez qu'il existe une base $\mathcal{A} := (v_1, v_2)$ t.q. $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^5$ le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Déterminez une base de U°.
2. Soit $V := M(2 \times 2, \mathbb{K})$ et soit $U := \{A \in V \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Déterminez l'annulateur $U^\circ \subset V^*$.

Exercice 3

Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $F : V \to W$ linéaire. Montrez que $\ker(F^*) = \operatorname{im}(F)^\circ$.

Exercice 4

1. Soient $F : V \to W$ et $G : W \to Z$ deux applications linéaires. Montrez que $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : Z^* \to V^*$.
2. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bases de V. Montrez que[1]

$$(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^T = (T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^{-1}.$$

[1] $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ est la matrice de transformation de la base $\mathcal{A}$ à la base $\mathcal{B}$ de V et $T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ est la matrice de transformation de la base $\mathcal{A}^*$ à la base $\mathcal{B}^*$ de V^*.