SÉRIE 10

À rendre avant le jeudi 9 mai, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Une matrice $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ est dite *définie positive* (respectivement *définie négative*), si $x^T \cdot A \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$ (respectivement $x^T \cdot A \cdot x < 0 \quad \forall x \neq 0$).

Exercice 1

Déterminez si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 6 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

est définie positive, définie négative ou ni l'un ni l'autre.

Exercice 2

Soit $V := C^\infty((-1, 1), \mathbb{R}) := \{f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ différentiable}\}$ et soit

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(f, g) := (f \cdot g)'(0).$$

1. Montrez que s est symétrique bilinéaire.
2. Déterminez le noyau (=Ausartungsraum) $V_0 := \{f \in V \mid s(f, g) = 0 \quad \forall g \in V\}$ de s .

Exercice 3

Soit $\mathbb{K}$ un corps t.q. $1+1 \neq 0$. Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , soit $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique et soit $q : V \rightarrow \mathbb{K}$, $q(v) := s(v, v)$, la forme quadratique associée. Supposons que $s \neq 0$, c.-à-d. $\exists v, w \in V$ t.q. $s(v, w) \neq 0$.

1. Montrez qu'il existe $v \in V$ t.q. $q(v) \neq 0$.
2. Soit v_1 dans V t.q. $q(v_1) \neq 0$. Montrez que $V = \mathbb{K} \cdot v_1 \oplus W$, où $\mathbb{K} \cdot v_1 = \text{span}(v_1)$ est la droite engendrée par v_1 et $W := \{w \in V \mid s(w, v_1) = 0\}$.
3. Montrez par récurrence qu'il existe une base $(v_1, \dots, v_n)$ de V t.q. $s(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$.
4. Soit $\alpha_i := s(v_i, v_i)$, $i = 1, \dots, n$. Montrez que $q(\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i^2$.

Exercice 4 1. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Ecrivez les éléments v_1^* et v_2^* de la base duale comme combinaisons linéaires dans la base duale $\{e_1^*, e_2^*\}$.

2. On considère les trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi_1(x) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3, \varphi_2(x) = -5x_1 + x_2 + 3x_3, \varphi_3(x) = -7x_1 + x_2 + 4x_3,$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Forment-elles une base du dual de $\mathbb{R}^3$?