Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 9

À rendre avant le jeudi 2 mai, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1
Soit $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.

1. Déterminez une matrice symétrique $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ telle que $Q(x) = x^T \cdot A \cdot x$.
2. Trouvez une base orthonormale (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $Q(\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2) = -\alpha^2 + 3 \cdot \beta^2$.
3. Trouvez une base orthogonale (w_1, w_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $Q(\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2) = -\alpha^2 + \beta^2$.

Exercice 2
Soit $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle s est représentée par une matrice diagonale.
2. Déterminez une base orthogonale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle s est représentée par une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} E_k & & 0 \\ & -E_l & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. Soit A une matrice hermitienne $n \times n$ avec $A^k = 0$, pour un $k \in \mathbb{N}$. Montrez qu'on a alors $A = 0$.
2. Soit A une matrice symétrique avec polynôme caractéristique
$$p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0.$$
Montrez pour le rang de A que $\mathrm{rg}(A) = n - \min\{i \mid a_i \neq 0\}$.

Exercice 4
Considérons $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard $\langle \quad , \quad \rangle$.

Soit l'hyperplan affine H donné par $H = \left\{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\right\}$ (voir série 8, ex. 3). Soit $u = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$. La distance de H à u est définie par

$$\mathrm{d}(u, H) := \inf \{||u - v|| \mid v \in H\}.$$

1. Montrez qu'on a $d(u, H) = \frac{|a_1u_1 + \ldots + a_nu_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$.
2. Soit $N \in \mathbb{R}^n$ un vecteur orthogonal à H avec $||N|| = 1$ et $v \in H$. Montrez que H est de la *forme normale de Hesse* :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N, x - v\rangle = 0\}.$$

Exercice 5 (Bonus)
Soit $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application $\mathbb{C}$-linéaire avec valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

1. Montrez qu'il existe $S \in U(n)$ telle que SAS^{-1} est une matrice triangulaire supérieure.
2. Montrez que l'on a l'inégalité $\sum |\lambda_i|^2 \leq \mathrm{tr}(\bar{A}^T A)$ avec égalité si et seulement si les matrices A et $\bar{A}^T$ commutent (i.e. $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$).