SÉRIE 8

À rendre avant le jeudi 18 avril, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 1. Montrez que $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$.

2. Soient $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie, $F \in \mathrm{End}(V)$, $\mathcal{A}$ une base orthonormale de V et $A := M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$. Montrez que : F est autoadjoint si et seulement si $A^T = A$.

Exercice 2 1. Soit $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Montrez que A est une réflexion par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^T$.

2. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application orthogonale avec $\det F = -1$. Montrez qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que F peut être représentée par rapport à la base $\mathcal{B}$ par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Considérons $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard $\langle\ ,\ \rangle$. Un sous-ensemble H de $\mathbb{R}^n$ s'appelle *hyperplan affine* s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et un sous-espace vectoriel $W \subset \mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$ tels que $H = v + W$. On dit que $s \in \mathbb{R}^n$ est *orthogonal* à H si $\langle s, x - y\rangle = 0$ pour tout $x, y \in H$. Soit $H = v + \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ un hyperplan affine. Montrez les affirmations suivantes :

1. Le vecteur s est orthogonal à $H \iff s \perp w_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n-1$.
2. Si l'hyperplan affine H est donné par $H = \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$, alors $(a_1, \ldots, a_n)^T$ est orthogonal à H.

Exercice 4 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminez une matrice $S \in O(3)$ telle que $S^T A\, S$ est diagonale.