

SÉRIE 7

À rendre avant le jeudi 11 avril, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

1. Trouvez une base orthonormale du sous-espace vectoriel U de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $v_2 = (5, 4, 2, 1)^T$, $v_3 = (-2, -4, -3, 1)^T$.
2. Déterminez le complément orthogonal $U^\perp$ de U dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 1. Soient $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Montrez que si $x^T A y = x^T B y$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}^n$, alors $A = B$.

2. Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien ou hermitien de dimension finie. Soit U un sous-espace vectoriel de V . Montrez que $(U^\perp)^\perp = U$.
3. Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Montrez que $O(V)$ est un groupe.

Exercice 3 1. On définit sur $M(n \times n, \mathbb{R})$ l'application

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T \cdot B).$$

Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $M(n \times n, \mathbb{R})$.

2. Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel hermitien et $F : V \rightarrow V$ une application unitaire. Soit v un vecteur propre qui correspond à la valeur propre λ et soit w un vecteur propre qui correspond à la valeur propre μ . Montrez que

$$(\lambda \neq \mu) \implies (v \perp w).$$

Exercice 4 1. Soit $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1-i & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$. Montrez que $A \in U(3)$.

Determinez l'inverse A^{-1} .

2. Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien ou hermitien. Soit $(v_1, \dots, v_r)$ une famille de vecteurs orthonormaux dans V . Montrez que les affirmations suivantes sont équivalentes.

(a) La famille $(v_1, \dots, v_r)$ est une base de V .

(b) Pour tout $v, w \in V$ on a $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle \cdot \langle v_i, w \rangle$.

(c) Pour tout $v \in V$ on a $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^r |\langle v, v_i \rangle|^2$.