Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 6

À rendre avant le jeudi 4 avril, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 1. Soit $N := \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\2&0&0 \end{pmatrix}$. Déterminez la réduction de Jordan à laquelle N est conjuguée : $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A := \begin{pmatrix} 3&0&0\\0&3&0\\2&0&0 \end{pmatrix}$. Déterminez une réduction de Jordan à laquelle A est conjuguée.

Dans l'exercice 2, vous pouvez utiliser sans démonstration le résultat suivant (qu'on peut montrer par recurrence) : Soient $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ deux matrices. Si A et B commutent (c.-à-d. $A \cdot B = B \cdot A$), alors la formule du binôme de Newton est vraie, c.-à-d. que pour tout entier positif l on a : $(A+B)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} A^k \cdot B^{l-k}$.

Exercice 2 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2&0&1\\0&2&1\\0&0&2 \end{pmatrix}$. Ecrivez A sous la forme $A = D+N$, où D est une matrice diagonale et N est une matrice nilpotente et $D \cdot N = N \cdot D$. Explicitez A^l pour tout entier positif l.

2. Soit $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ une matrice trigonalisable et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (pas forcément distinctes). Montrez que pour tout $k \geq 1$ entier, on a :

$$\det(A^k) = {\lambda_1}^k \cdot \ldots \cdot {\lambda_n}^k \text{ et } \operatorname{tr}(A^k) = {\lambda_1}^k + \ldots + {\lambda_n}^k.$$

Exercice 3 1. Lesquelles des opérations définies ci-dessous sont des produits scalaires dans $\mathbb{R}^3$?

(a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 - 2x_3y_3$
(b) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$
(c) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2^2y_2 + x_3y_3$
(d) $\langle x, y \rangle = \pi \cdot x_1y_1 + \cos(0.2) \cdot x_2y_2 + \exp(\sqrt{13}) \cdot x_3y_3$

2. Soit V un espace vectoriel réel quelconque et $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur V avec norme $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$, et métrique $d : V \times V \to \mathbb{R}$, $d(v, \tilde{v}) := \|\tilde{v} - v\|$. Montrez les points suivants :

(a) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ pour tous $v, w \in V$.
(b) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ pour tous $v, w \in V$.
(c) $d(v, z) \leq d(v, w) + d(w, z)$ pour tous $v, w, z \in V$.
(d) $d(v, z) \geq |d(v, w) - d(w, z)|$ pour tous $v, w, z \in V$.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On appelle *norme* sur V une application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\|v\| \geq 0 \quad \forall\, v \in V$,
- $\|v\| = 0 \implies v = 0$,
- $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \;\forall\, v \in V, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \;\forall\, v, w \in V$.

Exercice 4 Considerez l'espace vectoriel réel $V := \mathbb{R}^n$.

1. Montrez que $\|\cdot\|_{\max} : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max\{|x_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$, est une norme sur V (ici $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in V$).
2. Supposons $\dim V \geq 2$. Montrez qu'il n'existe pas un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tel que $\|v\|_{\max} = \sqrt{\langle v, v\rangle} \;\forall\, v \in V$.
3. Supposons $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ est une norme tel que $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ pour tous $v, w \in V$. Soit $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ l'application definie par
$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$
pour tous $v, w \in V$. Montrez que
   (a) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \;\forall\, v, w \in V$,
   (b) $\langle v, v\rangle \geq 0 \;\forall\, v \in V$,
   (c) $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$,
   (d) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2) \;\forall\, v, w \in V$.

Exercice 5 (Bonus) Considérez l'application $\langle\ ,\ \rangle$ dans l'exercice 4.3. Montrez que

1. $\langle v + \tilde{v}, w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle \tilde{v}, w\rangle \;\forall\, v, \tilde{v}, w \in V$,
2. $\langle \lambda \cdot v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ pour tous $v, w \in V$ si
   (a) $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq 0$,
   (b) $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda < 0$,
   (c) $\lambda \in \mathbb{Q}$, et
   (d) $\lambda \in \mathbb{R}$.

Note : Les exercices 4.3, 5.1 et 5.2 impliquent que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.