SÉRIE 5

À rendre avant le jeudi 28 mars, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1

Soit $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $x \mapsto A \cdot x$, $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrez que :

1. $p_A = t^2 \cdot (t - 1)^2$ (et, donc, $\lambda_1 = 0$, $r_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $r_2 = 2$),
2. $N_{\lambda_1} = N_0 = \ker(A^2) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,
3. $N_{\lambda_2} = N_1 = \ker((A - E_4)^2) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et,
4. si $S^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la réduction de Jordan.

Exercice 2

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit $F : V \rightarrow V$ linéaire. Déterminez toutes les possibilités (à l'ordre près des blocs) pour la réduction de Jordan de l'endomorphisme F si

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $p_F = t^2 \cdot (t^2 - 1) \cdot (t^2 + 4t + 4)$ et $M_F = t \cdot (t^2 - 1) \cdot (t + 2)$.
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $p_F = t^2 \cdot (t^2 - 1) \cdot (t^2 + 4t + 4)$ et $M_F = p_F$.
3. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, p_F est de degré 6 et $M_F = t^2 - 7$.
4. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, p_F est de degré 6 et $M_F = t^2 - 7$.