Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 3

À rendre avant le jeudi 14 mars, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1

1. Soit $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ et p_A son polynôme caractéristique. Montrez par un calcul direct que $p_A(A) = 0$.
2. Déterminez si la matrice $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est nilpotente.

Exercice 2

L'étude des oscillations amorties est décrite par le système d'équations différentielles

$$A \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Y_0} \\ \dot{Y_1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix},$$

où ω et μ sont des nombres réels positifs et $Y_0, Y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions différentiables avec $Y_0(0) = \alpha$ et $Y_1(0) = \beta$, où α, β représentent des constantes réelles.

1. Montrez que
   - si $\mu < \omega$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
   - si $\mu > \omega$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Donnez l'ensemble des solutions du système (1), avec les conditions initiales $Y_0(0) = \alpha$ et $Y_1(0) = \beta$, pour $\mu < \omega$.
3. Donnez l'ensemble des solutions du système (1), avec les conditions initiales $Y_0(0) = \alpha$ et $Y_1(0) = \beta$, pour $\mu > \omega$.
4. Montrez que si $\mu = \omega$, la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Calculez le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $A := \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 4
Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de la dimension n et $F \in \mathrm{End}(V)$. Supposons que la matrice associée à F par rapport à la base $(v_1, \ldots, v_n)$ est de la forme $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On définit le sous-espace $V_k := \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$ et l'endomorphisme

$$G_k := (\lambda_1 \cdot \mathrm{id}_V - F) \circ \cdots \circ (\lambda_k \cdot \mathrm{id}_V - F).$$

pour $k = 1, \ldots, n$. Montrez que $G_k(V_k) = \{0\}$ pour tout k.