Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE II

SÉRIE 2

À rendre avant le jeudi 7 mars, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 Résolvez le système de suites récurrentes :

$$u_0 = v_0 = 1 \quad , \quad \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & -7u_n & - & 18v_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & 8v_n. \end{array}$$

Exercice 2
Considérez la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez le polynôme caractéristique p_A et ses zéros.
2. Trouvez $S \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $S \cdot A \cdot S^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 3
Considérez les matrices $A = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3\ ,\ \mathbb{R})$.

1. Montrez que $A \cdot B = B \cdot A$.
2. Montrez que A et B sont diagonalisables.
3. Déterminez une base (v_1, v_2, v_3) de vecteurs propres communs (c.-à-d. (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et chaque v_i est un vecteur propre de A et de B).

Exercice 4 1. Soit $D : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, $p \mapsto p'$. Déterminez la dimension de $\mathbb{R}[x]_n$. Trouvez un drapeau de $\mathbb{R}[x]_n$ qui est D-stable.

2. Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ une matrice triangulaire *inférieure* et soit $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto A \cdot x$, l'endomorphisme associé. Trouvez un drapeau de $\mathbb{K}^n$ qui est A-stable.

3. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F \in \mathrm{End}(V)$ et λ une valeur propre de F. Soit $p = a_m \cdot t^m + \ldots + a_1 \cdot t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$. Montrez que $p(\lambda)$ est une valeur propre de $p(F)$.

4. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F \in \mathrm{End}(V)$ et $p \in \mathbb{K}[t]$ un polynôme de degré m tel que $p(F) = 0$. Montrez que pour tout $v \in V$ le sous-espace vectoriel W engendré par les vecteurs $v, F(v), \ldots, F^{m-1}(v)$ est F-invariant, c.-à-d. $F(W) \subset W$.