SÉRIE 1

À rendre avant le jeudi 28 février, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 1. Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. Supposons que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 5$.

Calculez

$$\det \begin{pmatrix} 3d & 3e & 3f \\ a + 3g & b + 3h & c + 3i \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

2. Calculez le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 1. Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Montrez que l'homomorphisme $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto A \cdot x$, est inversible si et seulement si $p_A(0) \neq 0$.

2. Soit $A \in M(2 \times 2, \mathbb{K})$. Montrez que $p_A(t) = t^2 - \text{tr}(A) \cdot t + \det A$.

3. Soit $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ une matrice à déterminant négatif. Montrez que A possède une valeur propre négative.

Exercice 3

Est-ce que la matrice A est diagonalisable

1. sur $\mathbb{R}$, si $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ et $p_A(t) = (t^2 - 9) \cdot (t^2 - 2)$?
2. sur $\mathbb{C}$, si $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ et $p_A(t) = -(t^3 + 4t)$?
3. sur $\mathbb{R}$, si $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ et $p_A(t) = -(t^3 + 4t)$?
4. sur $\mathbb{R}$, si $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, $p_A(t) = -(t^3 + t^2)$ et $\dim(\ker A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x) = 1$?

Exercice 4 Résolvez le système différentiel linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 6y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -3x - 5y \quad , \quad \frac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z.$$