UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

**Cours du Prof. Dr. Anand Dessai** ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 14 **Bonus**

*À rendre avant le jeudi 17 janvier, 11h*

---

**Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !**

**Exercice 1**

1. Soit $A \in M(10^{2018} \times 10^{2018}, \mathbb{R})$ une matrice t.q. $A^{2018} = 0$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. Montrez que $\lambda = 0$.
2. Soit $V$ un espace vectoriel complexe de dimension 2018 et soit $F : V \to V$ une application linéaire t.q. $F^4 = \mathrm{id}_V$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $F$. Montrez que $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$.

**Exercice 2**

Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} -14 & 43 & -22 \\ 1 & 20 & -14 \\ 3 & 25 & -21 \end{pmatrix}.$$

Calculez les valeurs propres et les vecteurs propres de $T$.

**Exercice 3**

1. Soit $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ une matrice. Montrez que $p_A$, le polynôme caractéristique de $A$, s'écrit $p_A(t) = -t^3 + \mathrm{tr}(A) \cdot t^2 + \alpha t + \det A$, où $\alpha$ est un nombre réel.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Déterminez sous quelle(s) condition(s) la matrice est diagonalisable.

**Exercice 4**

1. Montrez en utilisant seulement les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le déterminant de la matrice de Vandermonde est donné par

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

2. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et soient $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe exactement un polynôme $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré $\leq n-1$ tel que $p(x_i) = y_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$.