Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 13

À rendre avant le jeudi 20 décembre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

On définit *la trace* $\mathrm{tr}\,(A)$ d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{K})$ comme la somme de tous ses éléments diagonaux, c.-à-d.

$$\mathrm{tr} : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A \mapsto a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Exercice 1

1. Montrez que $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(A^T)$ et $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA) \quad \forall\, A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$.
2. Soient A, $\tilde{A} \in M(n \times n, \mathbb{K})$ deux matrices semblables (Rappel : $\tilde{A}$ et A sont semblables s'il existe une matrice $S \in Gl_n(\mathbb{K})$ t.q. $\tilde{A} = S \cdot A \cdot S^{-1}$). Montrez que $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(\tilde{A})$.

Exercice 2

Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$ où la matrice $e^A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ est définie par la série convergente $E_n + A + A^2/2! + A^3/3! + \ldots$.
2. Montrez que $\det(e^B) = e^{\mathrm{tr}(B)}$ si B et A sont semblables.

Exercice 3

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice $A_n \in M(2n \times 2n, \mathbb{R})$ est donnée par

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & c & d & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ c & 0 & \cdots & \cdots & 0 & d \end{pmatrix}$$

1. Calculez le déterminant de A_1 et A_2.
2. Montrez par récurrence que le déterminant de A_n est donné par la formule $\det(A_n) = (ad - bc)^n$. (*Indication : Utilisez les formules de Laplace.*)

Exercice 4

Considérons le système linéaire $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 7 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ -6x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 5 \end{array} \right\}$, c.-à-d. l'équation matricielle $A \cdot x = b$ pour $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & -4 \end{smallmatrix}\right)$, $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ et $b = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminez la solution du système avec la règle de Cramer.

Exercice 5 (Bonus)

Soit $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers. Montrez que A est inversible dans $M(n \times n, \mathbb{Z})$ (i.e. il existe une matrice $B \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ telle que $A \cdot B = E_n$) si et seulement si $\det A = 1$ ou $\det A = -1$. (*Indication : La règle de Cramer peut vous être utile.)*