UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

**Cours du Prof. Dr. Anand Dessai** ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 12

*À rendre avant le jeudi 13 décembre, 11h*

---

**Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !**

**Exercice 1** 1. La matrice

$$R_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

décrit une rotation de $\mathbb{R}^3$ par l'angle $\alpha$ le long de l'axe $y$. Calculez $\det(R_\alpha)$.

2. Déterminez $\det(\phi)$ pour l'endomorphisme $\phi : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $p \mapsto p'$.

**Exercice 2**

Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure qui est inversible. Montrez que l'inverse $A^{-1}$ est aussi une matrice triangulaire supérieure, c.-à-d. l'inverse est de la forme $\begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$. Déterminez $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

**Exercice 3**

La règle de Sarrus présente l'algorithme suivant pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{ij}$ : on recopie les deux premières colonnes de $A$ à droite de la matrice $A$, cf. le diagramme suivant.

$$\left|\begin{array}{ccccc|cccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}\right.$$

Montrez (par exemple avec la formule de Leibniz) que le déterminant $\det(A)$ est la somme des produits de triplets de composantes $a_{ij}$ le long des diagonales, avec le signe $+$ dans le sens $\searrow$ et le signe $-$ dans le sans $\swarrow$, c.-à-d.

$$\det(A) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - (a_{13}\,a_{22}\,a_{31} + a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33}).$$

**Exercice 4**
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}).$$

1. (a) Trouvez, s'il existe, un vecteur $v \in \mathbb{Q}^3$, $v \neq 0$, tels que $Av = 6v$.
   (b) Trouvez, s'il existe, un vecteur $u \in \mathbb{Q}^3$, $v \neq 0$, tels que $Bu = 6u$.
2. Déterminez le rang de $A$ et celui de $B$.
3. Déterminez si $A$ et $B$ sont semblables.
4. Déterminez si $A$ et $B$ sont équivalentes.

---

**Exercice 5** (Bonus)
Soit $C := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Soit $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $(C, +, \cdot)$ est un corps.
2. Montrez que dans $C$, l'équation $X^2 + E_2 = 0$ peut être résolue. Identifiez $C$ avec un corps déjà connu.