UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 11

À rendre avant le jeudi 6 décembre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1
Soit $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation du plan autour de zéro d'angle $\pi/4$ (dans le sens anti-horaire) et soit $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $\operatorname{span}((1,1)^T)$.
Considérons les deux bases $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B} = ((1,1)^T, (1,-1)^T)$ de $\mathbb{R}^2$. Déterminez $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$, $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(R)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(R)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(R)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(S)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(S)$ et $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(S \circ R)$.

Exercice 2
Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5/3 & -4/3 \\ -4 & -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ et soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto B \cdot x$, l'application linéaire définie par B. Soient $v_1 = (0,2,1)^T$ et $v_2 = (1,0,3)^T$.

1. Calculez $\phi(v_1)$ et $\phi(v_2)$. Complétez les deux vecteurs en une base $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$, dans laquelle la matrice $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi)$ est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   Donc $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une dilatation de facteur 3 le long de la direction v_3, et de facteur 1 (pas de changement) dans le plan $\operatorname{span}(v_1, v_2)$
2. Trouvez une autre base $\mathcal{A}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $v'_3 = (-2,2,-5)^T$, dans laquelle la matrice $M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}'}(\phi)$ est aussi diagonale.

Exercice 3

1. Soient $\mathcal{A} = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ et $\mathcal{B} = \{(i,1), (1,i)\}$ deux bases de $\mathbb{C}^2$ (comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Déterminez les matrices $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ et $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.
2. Soit $f_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'automorphisme linéaire de $\mathbb{C}^2$, défini par
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \cos\theta + z_2 \sin\theta \\ -z_1 \sin\theta + z_2 \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi].$$
   Calculez $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f_\theta)$ par rapport à la base $\mathcal{A} = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$. Trouvez une base $\mathcal{B}$ telle que $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 1. Soit $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ inversible. Montrez que l'application

$$F : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A \mapsto \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)},$$

dépend de façon linéaire de chaque ligne de la matrice A.

2. Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, une matrice *triangulaire supérieure*, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale. Montrez que son déterminant est égal à $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Exercice 5 (Bonus)
Soit $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ et soit $\mathbb{K}^n$ l'espace vectoriel de vecteurs lignes (!) $(x_1 \ldots x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$ $\forall\, i$. Par définition, un *code linéaire binaire* du type $[n, k]$ est un sous-espace vectoriel $C \subset \mathbb{K}^n$ de dimension k. Donc les éléments (les *mots*) de C sont exprimés sous la forme de vecteurs lignes. On appelle *matrice génératrice* tout matrice $G \in M\,(k \times n, \mathbb{K})$ dont les lignes forment une base de C. La matrice génératrice G est dite *standard* si elle possède pour k premières colonnes une matrice identité, c'est-à-dire G est de la forme $G = (E_k\, P)$ où $P \in M\,(k \times (n-k), \mathbb{K})$.

1. Déterminez une matrice génératrice standard pour le code suivant:

$$W = \{(0000), (0011), (0110), (1001), (1100), (1010), (0101), (1111)\}.$$

2. Soit $G = (E_k\, P)$ une matrice génératrice standard pour un code C linéaire binaire du type $[n, k]$. Considerez la matrice $H := (P^T\, E_{n-k}) \in M\,((n-k) \times n, \mathbb{K})$. Montrez que

$$x \in C \iff x \cdot H^T = 0$$