Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 10

À rendre avant le jeudi 29 novembre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1
Soit $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \,\middle|\, b = c \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et soit

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que $\mathcal{A} := (v_1, v_2, v_3)$ est une base de V.

2. Soit $E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $\Psi_{\mathcal{A}}$ l'isomorphisme

$$\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to V, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3.$$

Calculez $\Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(E_2)$ (c.-à-d. exprimez E_2 par une combinaison linéaire des v_i).

Exercice 2

1. Soient $\mathcal{A} := \{(0,1)^T, (1,1)^T\}$ et $\mathcal{B} := \{(1,0)^T, (1,-1)^T\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Calculez la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$ de l'application

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2)^T \mapsto (x_2, x_1)^T.$$

par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 3 \\ 0 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{C})$ une matrice avec un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculez $A \cdot A^T$ et $A^T \cdot A$.

Exercice 3

1. Soient V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Montrez que $\mu \cdot \Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

2. Montrez que pour tout $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, $B, B' \in M(r \times m, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a
$(B + B') \cdot A = B \cdot A + B' \cdot A$ et $\lambda(B \cdot A) = (\lambda B) \cdot A = B \cdot (\lambda A)$.

Exercice 4 1. Calculez tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices suivantes. Ensuite calculez $D \cdot B \cdot A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad D = (1, 3, 2).$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$. Calculez A^2, A^3, A^4 et A^{2018}.

Exercice 5 (Bonus)
Soit $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, soit $b \in \mathbb{K}^m$ et soit $B := (A, b) \in M(m \times (n+1), \mathbb{K})$. Soit $\Phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ et $\Phi_B : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^m$ les homomorphismes correspondants. Considérez le système d'équations linéaires $A \cdot x = b$. Montrez que

a) $\mathrm{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ si et seulement si $\dim(\mathrm{im}\,\Phi_A) = \dim(\mathrm{im}\,\Phi_B)$.

b) $Ax = b$ a une solution unique si et seulement si $\dim(\mathrm{im}\,\Phi_A) = \dim(\mathrm{im}\,\Phi_B) = n$.