SÉRIE 9

À rendre avant le jeudi 22 novembre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1

a) Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$ et soient $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, montrez qu'il existe exactement un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]_2$ tel que $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, 3$.

b) Soient $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$. Trouvez tous les polynômes $p(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ qui interpolent ces 3 points, c'est-à-dire pour lesquels $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, 3$. Exprimez $p(x)$ d'abord dans la base canonique $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}[x]_3$ et résolvez le système linéaire correspondant.

Exercice 2

Soit $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{pour } 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

1. Dessinez le graphe de f_n et montrez que $f_0, \ldots, f_r$ sont linéairement indépendantes dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour chaque $r \in \mathbb{N}$.
2. Montrez que $\dim C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

Exercice 3

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, $\phi : V \to V$ une application linéaire. Soient les sous-espaces W_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, definis par $W_0 := V$ et $W_{k+1} := \phi(W_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Montrez que la suite $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$, se stabilise (c.-à-d. il existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $W_{k+m} = W_m$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$).