Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 8

À rendre avant le jeudi 15 novembre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1

a) Résolvez par l'algorithme de Gauss-Jordan, décrivez toutes les solutions réelles :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

b) Trouvez tout $a \in \mathbb{C}$ tel que le système suivant a un nombre infini de solutions complexes :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 4a\,x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 4a\,x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Exercice 2

Déterminez $a, b \in \mathbb{R}$ tels que le système

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -4ax_2 & +x_3 & = & 4+b \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 8 \\ 3ax_1 & +x_2 & -x_3 & = & -16-b \end{array}$$

possede (i) une seule solution réelle (ii) une infinité de solutions réelles (iii) aucune solution réelle.

Exercice 3

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension fini, soit W un sous-espace vectoriel de V et soit V/W l'espace quotient. Trouvez une base de V/W. Montrez que $\dim V/W = \dim V - \dim W$.
Indication : Prenez une base de W et complétez en une base de V.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. L'expression $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ s'appelle le *polynôme sur le corps* $\mathbb{K}$. Le *degré* $\deg(p)$ *du polynôme* p est défini par

$$\deg(p) := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}, & \text{si } p \neq 0, \\ -\infty, & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de tous les polynômes p de degré $\deg(p) \leq n$ est défini par

$$\mathbb{K}[x]_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{K}, \text{pour } \forall\, i = 0, \dots, n \right\}$$

avec les opérations $p + q := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$ et $\lambda \cdot p := \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot a_i) x^i$, pour tous polynômes $p, q \in \mathbb{K}[x]_n$, $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 4

1. Montrez que les polynômes $p_0(x) := 1$, $p_1(x) := 2x - 3$ et $p_2(x) := 4x^2 + 5x - 6$ forment une base de $\mathbb{R}[x]_2$.
2. Soient p_0, p_1, $\dots$, p_n des polynômes arbitraires de $\mathbb{K}[x]_n$ avec $\deg(p_i) = i$, pour $i = 0, \dots, n$. Montrez que les polynômes p_0, p_1, $\dots$, p_n forment une base de $\mathbb{K}[x]_n$.