Cours du Prof. Dr. Anand Dessai — ALGÈBRE LINÉARE I

SÉRIE 7

À rendre avant le jeudi 8 novembre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 1. Montrez que pour chaque choix de vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{2018}$ les vecteurs

$$\begin{aligned} w_1 &:= 2.8v_1 + 6v_2 - 3v_3 \\ w_2 &:= v_1 + v_2 - \sqrt{2}v_3 \\ w_3 &:= 2v_1 - 3v_2 \\ w_4 &:= v_1 + \pi \cdot v_2 - v_3 \end{aligned}$$

sont linéairement dépendents. Donnez une preuve rapide, sans calculer explicitement qu'un vecteur est une combinaison linéaire des autres.

2. Est-ce qu'il existe $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{2018}$ t.q. w_1, w_2, w_3 sont linéairement indépendents ?

Exercice 2 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq m \geq 1$, une application linéaire. Montrez que $\dim \ker \phi \geq n - m$.

2. Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Trouvez une base de $\ker \psi$ et une base de $\operatorname{im} \psi$.

Exercice 3
Soit V un espace vectoriel. Soient U et W des sous-espaces vectoriels de V.

1. Montrez que $V = U \oplus W$ si et seulement si $V = U + W$ et les vecteurs $\{u, w\}$ sont linéairement indépendants pour chaque $u \in U \setminus \{0\}$ et chaque $w \in W \setminus \{0\}$.
2. Supposons que $\dim V < \infty$. Montrez que $V = U \oplus W$ si et seulement si $V = U + W$ et $\dim U + \dim W = \dim V$.

Exercice 4 (Bonus)
Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soient $W_1, \ldots, W_k$ de sous-espaces vectoriels de V. Supposons que $V = W_1 + \ldots + W_k$. Alors :

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \iff \dim V = \dim W_1 + \ldots + \dim W_k$$