Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉARE I

SÉRIE 6

À rendre avant le **mercredi 31 octobre, 15h**

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1

1. Soit $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = [0]\}$. Déterminez une base du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel V.
2. Déterminez un complément W de $V \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, c.-à-d. déterminez un sous-espace vectoriel W de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ t.q. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 = V \oplus W$.

Exercice 2

Soient V, U les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\} \text{ et}$$
$$U = \{(a, b, a, b)^T \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Déterminez $\dim V$, $\dim U$ et $\dim V \cap U$.
2. Est-ce que $\mathbb{R}^4 = V \oplus U$?

Exercice 3

1. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit W un sous-espace vectoriel de V.
   (a) Montrez que $\dim W \leq \dim V$.
   (b) Montrez que $(\dim W = \dim V) \Leftrightarrow (W = V)$.
2. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, soit W un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f : W \to V$ un homomorphisme surjectif. Montrez que $\dim W = \infty$.