UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

SÉRIE 5

À rendre avant le jeudi 25 octobre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Pour $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, soit $v^T = (v_1, \cdots, v_n)$. Pour $v = (v_1, \cdots, v_n)$, soit $v^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On dit que v^T est la transposée de v.

Exercice 1

Déterminez si l'application ϕ est linéaire.

a) $\phi = \det : \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \det A := a \cdot d - b \cdot c$

b) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |x| + y \\ x \end{pmatrix}$

c) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y + 2x \\ x - z \end{pmatrix}$

d) Soit $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $\phi : V \to \mathbb{C}^2$, $f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) + \overline{f(0)} \\ f(1) - \overline{f(1)} \end{pmatrix}$.

(i) On regarde V et $\mathbb{C}^2$ comme des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$. Est-ce que ϕ est linéaire sur $\mathbb{R}$?

(ii) On regarde V et $\mathbb{C}^2$ comme des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$. Est-ce que ϕ est linéaire sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2 a) Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{4} + \frac{z}{5} \\ \frac{z}{6} + \frac{x}{7} \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrez que ϕ est linéaire. Est-ce que ϕ est injective/surjective/bijective ?

b) Est-ce qu'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\phi((1,2)^T) = (1,1)^T$, $\phi((3,15)^T) = (7,40)^T$ et $\phi((11,7)^T) = (42,0)^T$?

Exercice 3 a) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ les vecteurs $u = (-9,-6,3)^T$ et $v = (3\alpha, 2\alpha, 1)^T$ sont-ils linéairement indépendants ?

b) Pour quels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ le vecteur $w = (\alpha, 2, \beta, 2)^T$ appartient-il à $W = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u,v)$, où $u = (1,1,4,-2)^T$ et $v = (-1,1,-6,-7)^T$?

Exercice 4
Est-ce que les vecteurs donnés u et v sont linéairement indépendants dans W, si

a) $W = \mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et $u = 1/\sqrt{5}$, $v = \sqrt{5}/2$?

b) $W = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^6$ et $u = ([2],[3],[0],[-1],[2],[-1])^T$, $v = ([1],[5],[0],[3],[1],[-4])^T$?

c) $W = \operatorname{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u = \{x \mapsto 2x\}$, $v = \{x \mapsto x^2\}$?

d) $W = \operatorname{Map}([0,2\pi],\mathbb{R})$ et $u = \{x \mapsto \sin x\}$, $v = \{x \mapsto \cos x\}$?