Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉARE I

SÉRIE 4

À rendre avant le jeudi 18 octobre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1

1. (i) Soit R un anneau et $a \in R$ un diviseur de zéro. Montrez que $a \notin R^*$.
   (ii) Soit $\varphi : K \to L$ un homomorphisme de corps. Montrez que φ est injectif.
2. Mettez les nombres suivants sous la forme $a + i \cdot b$, $a, b \in \mathbb{R}$:

   a) $(1+2i)/(1+i)$ *b)* $(3i)^{-3}$ *c)* $|2-5i|$

   Soit $z = (2, 2\pi/3)$ en coordonnées polaires. Déterminez les coordonnées polaires de z^{-1}.

Exercice 2

1. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrez que
   (i) $0 \cdot v = 0_V$ pour tout $v \in V$, (ici, $0_V \in V$ dénote l'élément zéro dans l'espace V)
   (ii) $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$ pour tout $v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Décidez quels ensembles W ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de V :

   (i) $V = \mathbb{R}^3, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; 2v_1 - 5v_2 = 0 \right\}$

   (ii) $V = \mathbb{R}^2, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; 3v_1 - v_2 = v_1^2 - v_2^2 \right\}$

   (iii) $V = Map(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad W := \left\{ f \in V \;\middle|\; f(x+2) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$

   (iv) $V = \mathbb{R}^2, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; v_1 + v_2 \leq 0 \right\}$

Exercice 3
Soient

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) := \left\{ a + i \cdot b\sqrt{3} \quad \middle| \quad a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{C} \quad \text{et} \quad O := \left\{ a + i \cdot b\sqrt{3} \quad \middle| \quad a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset K.$$

Montrez que

a) K est un sous-corps (ein Unterkörper) de $\mathbb{C}$,

b) O est un sous-anneau (ein Unterring) de K mais pas un sous-corps.

Exercice 4
Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{K}$ un corps. Supposons que $p \cdot x = 0 \ \forall x \in \mathbb{K}$. Montrez que $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto x^p$, est un homomorphisme de corps, c.-à-d. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{K}$ et $\varphi(1) = 1$.