Cours du Prof. Dr. Anand Dessai — ALGÈBRE LINÉARE I

SÉRIE 3

À rendre avant le jeudi 11 octobre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1
Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes.

a) Montrez que si G est un groupe fini et φ est surjectif, alors H est aussi un groupe fini.

b) Montrez que si $H \neq \{e\}$ et φ est surjectif, alors $G \neq \{e\}$.

c) Montrez que si φ est un isomorphisme de groupes, alors son inverse $\varphi^{-1} : H \to G$, $\varphi(g) \mapsto g$, est aussi un isomorphisme de groupes.

Exercice 2 a) Déterminez pour chaque exemple si $(G, \star)$ est un groupe :

(i) $G = \left\{ \dfrac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}\,,\, p \neq 0,\, q \not\equiv 0 \bmod 5 \right\}$ avec $a \star b := a \cdot b$,

(ii) $G = \left\{ \dfrac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}\,,\, q \not\equiv 0 \bmod 5 \right\}$ avec $a \star b := a + b$.

b) On définit sur $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ l'opération suivante :

$$(a, b) \star (\tilde{a}, \tilde{b}) := (a \cdot \tilde{a}, b + a^{2018} \cdot \tilde{b}), \quad (a, b), (\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}.$$

Montrez que $(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}, \star)$ est un groupe. Est-il abélien ?

Exercice 3 a) Décrivez le groupe des unités de l'anneau $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Déterminez l'inverse a^{-1} de $a = [5]$ et $[7]$ dans $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

b) Soit R un anneau intègre et $a \in R$, $a \neq 0$. Montrez que
$a \cdot x = a \cdot \tilde{x}$ implique $x = \tilde{x}$ pour tout $x, \tilde{x} \in R$.

c) Soit R un anneau. Montrez que le groupe R^* des unités est un groupe.

d) Soit K un corps. Montrez que pour tout $a, b \in K$ on a
$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -a \cdot b$, $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$.

Exercice 4 a) Construisez un corps avec exactement 4 éléments. Décrivez l'addition et la multiplication.

b) Soit $R := \left\{ \frac{a}{3^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrez que R est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$, mais pas un corps.