Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉARE I

SÉRIE 2

À rendre avant le jeudi 4 octobre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1
Est-ce que X est un groupe ?

a) $X := (\mathbb{Z}, \cdot\,)$, b) $X := (\{\frac{a}{3^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}, +)$,

c) $X := (\mathbb{Q}_{<0}, \cdot\,)$ où $\mathbb{Q}_{<0} := \{q \mid q \in \mathbb{Q},\ q < 0\}$,

d) $X := \{\diamondsuit, \clubsuit\}$ avec la multiplication définie par

$$\diamondsuit * \diamondsuit := \diamondsuit, \quad \diamondsuit * \clubsuit := \clubsuit, \quad \clubsuit * \diamondsuit := \clubsuit, \quad \clubsuit * \clubsuit := \diamondsuit.$$

Exercice 2
Est-ce que l'application $\varphi : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme de groupes ?

a) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $\varphi(x) := -\frac{1}{7} \cdot x$

b) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot\,)$, $\varphi(x) := 2^{3x}$

c) $G_1 = (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot\,)$, $G_2 = (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot\,)$, $\varphi(x) := x^{-1}$

d)[1] $G_1 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot\,)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$, $\varphi(x) := \ln x$

Exercice 3 a) Soit S_n l'ensemble des applications bijectives $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et soit $\circ$ la composition des applications. Montrez que $(S_n, \circ)$ est un groupe. Montrez que $(S_n, \circ)$ n'est pas abélien pour chaque $n \geq 3$.

b) Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}$ l'ensemble des parties de X. Pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$ on définit l'opération

$$A \star B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Montrez que $(\mathcal{P}(X), \star)$ est un groupe abélien. Quel est l'élément neutre e ? Quel est l'élément inverse de A ?

---

[1] L'inverse de exp est la fonction logarithme $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4 a) Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Montrez que le noyau

$$\ker(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$$

est un sous-groupe de G.

b) Montrez que chaque groupe $(G, \bullet)$ tel que $a \bullet a = e$ pour tout $a \in G$ est abélien.

c) Soit G le groupe qui est engendré par les rotations de centre $0 \in \mathbb{R}^2$ et les réflexions par rapport à un axe passant par $0 \in \mathbb{R}^2$. Soit $H \subset G$ le sous-groupe

$$H := \{f \in G \mid f(\triangle) = \triangle\} = \{\text{symétries du triangle régulier}\}.$$

Montrez que $H \cong S_3$.