

SÉRIE 1

À rendre avant le jeudi 27 septembre, 11h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1

Identifiez les ensembles de solutions pour les systèmes d'équations suivants :

a) $x + 2y = 1, \quad 2x - y = 12,$

b) $x_1 - x_2 + x_3 = -12, \quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -20.$

Exercice 2

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 5x_3 \end{pmatrix}.$$

Déterminez le noyau $\ker(f) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$, où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit X, Y, Z les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 suivants :

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{2} \right\},$$

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\},$$

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y \right\}.$$

Dessinez les ensembles $(X \cup Y) \cap Z, (X \cap Y) \cup Z, X \setminus Y, Y \setminus Z$.

Exercice 4

Étudiez l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

$$\text{a) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^3 - y,$$

$$\text{b) } g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

Est-ce qu'il y a une application bijective parmi celles-là ? Si c'est le cas, trouvez la fonction inverse.