Lie Gruppen
Übungsblatt Nr. 4

Das Übungsblatt ist fakultativ und geht nicht in die Bewertung ein.
Sie haben die Möglichkeit bearbeitete Aufgaben zur Korrektur abzugeben.
Abgabe bis: Donnerstag 13. Dezember 2018

Aufgabe 1: Sei $\varphi : H \to G$ ein Homomorphismus von Lie Gruppen und V eine Darstellungen von G. Die Gruppe H operiere auf dem Vektorraum V durch $h(v) := \varphi(h)(v)$. Die so definierte H-Darstellung wird mit $\varphi^*(V)$ bezeichnet.

1. Zeigen Sie: $\varphi^*(V)$ ist tatsächlich eine H-Darstellung.
2. Zeigen Sie: Die Abbildung, welche die G-Darstellung V auf die H-Darstellung $\varphi^*(V)$ abbildet, definiert einen Ringhomomorphismus $\varphi^* : R(G) \to R(H)$.
3. Sei V eine irreduzible G-Darstellung. Ist dann $\varphi^*(V)$ eine irreduzible H-Darstellung?
4. Sei $\varphi^*(V)$ eine irreduzible H-Darstellung. Ist dann V eine irreduzible G-Darstellung?

Aufgabe 2: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}[V_1] \to R(SU(2))$, $\sum a_k V_1^k \mapsto \sum a_k V_1^k$, ist injektiv.

Aufgabe 3: Sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Sei $\alpha = f \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ eine Differentialform vom Grad n (kurz: n-Form) auf V mit kompaktem Träger.

1. Zeigen Sie: $\varphi^*(\alpha)(p) = f(\varphi(p)) \cdot \det(\varphi_*)_p \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ für alle $p \in U$.
2. Sei φ orientierungserhaltend. Zeigen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für Integrale:

$$\int_V \alpha = \int_U \varphi^*(\alpha).$$

siehe Rückseite

Die folgenden Aufgaben behandeln Stoff aus dem Buch *Representations of compact Lie groups* von Bröcker und tom Dieck [BrtD].

Sei G eine kompakte Lie Gruppe, sei V eine komplexe G-Darstellung und sei $J : V \to V$ ein G-äquivarianter konjugiert-linearer Homomorphismus (d.h. $J(g(v)) = g(J(v))$ und $J(\lambda \cdot v) = \overline{\lambda} \cdot J(v)$ für alle $v \in V$, $g \in G$ und $\lambda \in \mathbb{C}$). Die Abbildung $J : V \to V$ heisst **reelle Struktur** (bzw. **quaternionale Struktur**), wenn $J^2 = \mathrm{id}_V$ (bzw. $J^2 = -\mathrm{id}_V$) gilt (siehe [BrtD], S. 93).

Aufgabe 5: Sei $B : V \times V \to \mathbb{C}$ eine nicht-degenerierte G-äquivariante Bilinearform und $\langle \quad , \quad \rangle$ ein G-äquivariantes (Hermitesches) Skalarprodukt[1] auf V. Definiere $f : V \to V$, $\langle v, f(w) \rangle := B(v, w)$, für alle $v, w \in V$. Zeigen Sie: (siehe notfalls [BrtD], S. 97).

1. f is ein G-äquivarianter konjugiert-linearer Isomorphismus.
2. Sei B symmetrisch (bzw. schief-symmetrisch), d.h. $B(v, w) = \epsilon \cdot B(w, v)$ für alle $v, w \in V$, mit $\epsilon = 1$ (bzw. $\epsilon = -1$). Dann ist $\epsilon \cdot f^2$ hermitesch und positive definit, d.h. $\langle \epsilon f^2(v), w \rangle = \langle v, \epsilon f^2(w) \rangle$ und $\langle v, \epsilon f^2(v) \rangle \geq 0$ für alle $v, w \in V$.
3. Durch geeignetes Abändern der Abbildung f auf ihren Eigenräumen erhält man eine reelle (bzw. quaternionale) Struktur J.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass umgekehrt zu einer reellen (bzw. quaternionalen) Struktur auch immer eine nicht-degenerierte G-äquivariante Bilinearform definiert werden kann, die symmetrisch (bzw. schief-symmetrisch) ist (siehe [BrtD], S. 97-98).

Aufgabe 6: Sei V eine irreduzible G-Darstellung. Ist $V \cong \overline{V}$, so besitzt V eine reelle oder eine quaternionale Struktur aber nicht beide.

Tipp: Zerlegen Sie $Hom(V \times V; \mathbb{C}) \cong V^* \otimes V^*$ als direkte Summe von dem Raum S der symmetrischen Tensoren und dem Raum A der antisymmetrischen Tensoren. Zeigen Sie mit Hilfe von Schurs Lemma, dass entweder ($\dim S^G = 1$ und $\dim A^G = 0$) oder ($\dim S^G = 0$ und $\dim A^G = 1$) gilt.

Aufgabe 7: Sei V eine irreduzible G-Darstellung mit Charakter $\chi_V : G \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie (oder verstehen Sie den Beweis in [BrtD], S. 100) der folgenden Aussagen:

1. V besitzt eine reelle Struktur $\iff \int_G \chi_V(g^2) dg = 1$
2. V besitzt eine quaternionale Struktur $\iff \int_G \chi_V(g^2) dg = -1$

[1] Konvention: Das Skalarprodukt ist in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente konjugiert-linear.