Lie Gruppen
Übungsblatt Nr. 3

Das Übungsblatt ist fakultativ und geht nicht in die Bewertung ein.
Sie haben die Möglichkeit bearbeitete Aufgaben zur Korrektur abzugeben.
Abgabe bis: Dienstag 13. November 2018

Aufgabe 1: Sei G ein kompakte Lie Gruppe und seien V, W Darstellungen von G. Zeigen Sie für die Charaktere:

1. $V \cong W \implies \chi_V = \chi_W$.
2. $\chi_V(ghg^{-1}) = \chi_V(h)$ für alle $h, g \in G$.
3. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.
4. $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$.
5. $\chi_{V^*}(g) = \chi_{\overline{V}}(g) = \overline{\chi_V(g)} = \chi_V(g^{-1})$.
6. $\chi_V(e) = \dim V$.
7. $\overline{V} \cong V^*$.

Aufgabe 2: Sei $V_n = \mathbb{C}^n$ die $SU(n)$-Darstellung gegeben durch Matrix-Multiplikation $SU(n) \times V \to V$, $(A, v) \mapsto A \cdot v$. Zeigen Sie: V_n ist irreduzibel.

Aufgabe 3: $\lambda = \exp(it) \in S^1$ operiere auf $\mathbb{C}^2$ durch Matrix-Multiplikation mit $\left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$. Zerlegen Sie diese S^1-Darstellung in irreduzible Komponenten.

Aufgabe 4: Zeigen Sie: Ist G eine endliche Gruppe, so ist auch $Irr(G; \mathbb{C})$ endlich (d.h. eine endliche Gruppe hat nur endlich viele paarweise nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen).