Lie Gruppen
Übungsblatt Nr. 1

Das Übungsblatt ist fakultativ und geht nicht in die Bewertung ein.
Sie haben die Möglichkeit bearbeitete Aufgaben zur Korrektur abzugeben.
Abgabe bis: Mittwoch 14. November 07

Aufgabe 1: Zeigen Sie: $U(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^T = A^{-1}\}$ ist eine Lie Gruppe (Zeigen Sie zum Beispiel: E_n ist ein regulärer Wert der Abbildung

$$f : M(n \times n, \mathbb{C}) \to \{B \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid \overline{B}^T = B\}, \quad A \mapsto \overline{A}^T \cdot A)$$

Aufgabe 2:

1. Sind X, Y Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M, so ist $[X, Y] := XY - YX$ ein Vektorfeld auf M.
2. Zeigen Sie die Jacobi-Identität:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \text{ für alle Vektorfelder } X, Y, Z.$$

Aufgabe 3: Sei G eine zusammenhängende Lie Gruppe und H eine normale Untergruppe, die diskret ist (d.h. zu jedem $h \in H$ gibt es eine offene Umgebung U von G mit $U \cap H = \{h\}$). Zeigen Sie: H liegt im Zentrum von G.

Aufgabe 4: Zeigen Sie : Die Abbildungen

$$\exp : so(n) \to SO(n) \quad \text{und} \quad \exp : u(n) \to U(n)$$

sind surjektiv, aber $\exp : sl(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$ nicht.

Aufgabe 5: Sei G die Lie Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen in der Diagonalen,

$$G = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ii} = 1 \ \forall i \text{ und } a_{ij} = 0, \text{ falls } i > j\} \subset GL(n, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die Lie Algebra von G.

Aufgabe 6: Sei G eine 1-dimensionale zusammenhängende Lie Gruppe. Zeigen Sie: $G \cong \mathbb{R}$ oder $G \cong S^1$.

Aufgabe 7: Sei G eine Lie Gruppe und $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, die Multiplikation in G. Zeigen Sie:

$$\mu_* : LG \times LG \to LG, \quad \mu_*(X, Y) = X + Y$$

Aufgabe 8: Sei $a : \mathbb{R}^2 \to M$ eine differenzierbare Abbildung mit $a(s, 0) = p$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to T_pM$ die Kurve $\gamma(s) = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} a(s, t)$. Wir identifizieren $T_{\gamma(0)}(T_pM)$ kanonisch mit T_pM. Die Kurve γ definiert einen Tangentialvektor $\gamma'(0) \in T_pM$. Sei $\varphi \in \mathcal{E}(p)$. Zeigen Sie:

$$\gamma'(0)(\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}_{|s=t=0} \varphi(a(s, t)).$$

Tip: OBdA ist $(M, p) = (\mathbb{R}^n, 0)$ und φ linear.

Aufgabe 9: Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und B eine diskrete Untergruppe von V. Dann gilt: B wird von linear unabhängigen Vektoren $g_1, \ldots, g_k$ erzeugt.

1. Suchen Sie eine geeignete Literatur (z.B. das Buch von Bröcker-tom Dieck, Seite 26).

2. Lesen und verstehen Sie den Beweis.