

SÉRIE 13

À rendre avant le jeudi 19 décembre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

**Exercice 1** (4 points)

Trouvez le polynôme minimal sur  $\mathbb{Q}$  des éléments suivants :

$$2\sqrt{3}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{5}, \quad e^{\frac{2\pi i}{p}}, p \text{ un nombre premier.}$$

**Exercice 2** (4 points)

Soient  $K \subset L$  une extension de corps et  $\alpha, \beta \in L$ . Montrez que  $\alpha$  et  $\beta$  sont algébriques sur  $K$  si et seulement si  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  sont algébriques sur  $K$ .

**Exercice 3** (Bonus, 4 points)

Montrez que tout sous-corps  $K$  de  $\mathbb{C}$  a une extension  $\bar{K}$  dans  $\mathbb{C}$  qui est algébrique sur  $K$  et algébriquement close.

**Exercice 4** (Bonus, 4 points)

Soit  $\varphi \in ]0, 2\pi[$  un nombre réel tel que  $e^{i\varphi}$  est transcendant. Montrez que  $e^{i\varphi/3}$  n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de  $M = \{0, 1, e^{i\varphi}\}$ .