

SÉRIE 12

À rendre avant le jeudi 12 décembre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 (4 points)

Considérez le groupe abélien $G := \mathbb{Z}/360\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$. Déterminez pour chaque nombre premier p le type de $G(p)$, c.-à-d. déterminez $\nu_{p,i} > 0$, $i = 1, \dots, s_p$, t.q. $G(p) \cong \bigoplus_{i=1}^{s_p} \mathbb{Z}/p^{\nu_{p,i}}\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (4 points)

Déterminez si les nombres suivants sont algébriques ou transcendants :

$$\frac{1}{5\sqrt{3}}, \frac{2}{e}, i + \sqrt{5}.$$

Exercice 3 (4 points)

Soit $K \subset L$ une extension de corps telle que $[L : K]$ est premier. Montrez que $L = K(\alpha)$ pour tout $\alpha \in L - K$.

Exercice 4 (4 points) 1. Y a-t-il un corps avec 15 éléments ?

2. Y a-t-il un anneau intègre avec 12 éléments ?

3. Construisez un corps à 8 éléments.