SÉRIE 11

À rendre avant le jeudi 5 décembre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 (4 points)
Quels polynômes sont irréductibles ?

a) $x^2y - xy^2 - x + y \in \mathbb{Q}[x, y]$.

b) $x^2 - y^2 + z^{2019} \in \mathbb{Q}(x, y)[z]$.

Exercice 2 (4 points)
Soit R un anneau intègre. Soient E un R-module et

$$E_{\text{tor}} := \{x \in E \mid \exists r \in R, r \neq 0 \text{ avec } rx = 0\}.$$

Montrez les assertions suivantes :

1. E_{tor} est un sous-module de E.
2. Le R-module E/E_{tor} est *sans torsion*.

Exercice 3 (4 points)
Soit R un anneau intègre principal.

1. Soit F un R-module libre avec base $(x_1, \dots, x_n)$. Soit $p \in R$ un élément premier. Montrez que F/pF est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} := R/(p)$ et les classes

$$\bar{x}_1 := x_1 + pF, \dots, \bar{x}_n := x_n + pF$$

forment une base de F/pF.

2. Soit F un R-module libre. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_m)$ deux bases de F. Montrez que $n = m$.

Exercice 4 (4 points)
Soient V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et $\varphi : V \to V$ un endomorphisme. Montrez les assertions suivantes :

(a) V muni de la multiplication $p(X)v := p(\varphi)(v)$ est un $\mathbb{K}[X]$-module.

(b) Si V est de dimension fini, alors le $\mathbb{K}[X]$-module V est un module de torsion.
(*Indication : Considérez le polynôme caractéristique de* φ.)

Exercice 5 (Bonus 4 points) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et soit $\varphi : V \to V$ un endomorphisme. On muni V de la structure de $\mathbb{K}[X]$-module donnée dans l'exercice 4.

(a) Utilisez le théorème de classification des modules sur un anneau principal (et intègre) pour montrer que
$$V = \bigoplus_p V(p),$$
où les p sont des polynômes irréductibles unitaire de $\mathbb{K}[X]$ (pris dans un système de représentants d'élément premiers $\mathcal{P}$), et tel que chaque
$$V(p) \cong \mathbb{K}[X]/(p^{\nu_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}[X]/(p^{\nu_p})$$
est déterminé de manière unique (à isomorphisme près) par les $1 \leq \nu_1 \leq \cdots \leq \nu_p$.

(b) Montrez que la somme de tous les degrés des p^{ν_s} apparaissants dans la décomposition ci-dessus est égale à n, c.-à-d.
$$\sum_p (\deg(p^{\nu_1}) + \cdots + \deg(p^{\nu_p})) = n.$$

(c) Montrez que le polynôme minimal de φ est égal à
$$\prod_p p^{\nu_p}$$
où le produit est pris sur tous les polynômes irréductibles p apparaissant dans la décomposition de V donnée au point (a).

(d) Montrez qu'on peut trouver une base de V telle que la matrice de φ exprimée dans cette base est de la forme
$$\begin{pmatrix} M_{p_1^{\nu_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{p_1^{\nu_{p_1}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{p_k^{\nu_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{p_k^{\nu_{p_k}}} \end{pmatrix}$$
et où $M_{p^{\nu_s}} \in \mathrm{M}(m_{p,s} \times m_{p,s}; \mathbb{K})$ avec $m_{p,s} := \deg(p^{\nu_s})$.