Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

SÉRIE 10
À rendre avant le jeudi 28 novembre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 (4 points)
Soit A un anneau commutatif unitaire, soit $S \subset A$ une partie multiplicative et soit $S^{-1}A$ l'ensemble des class d'équivalence $\{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S\}$. Montrez :

1. La relation $(a, s) \sim (a', s') \iff \exists t \in S$ t.q. $t(as' - a's) = 0$ est une relation d'équivalence.
2. L'addition $S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A$, $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} := \frac{as'+a's}{ss'}$, est bien définie.
3. La multiplication $S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A$, $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}$, est bien définie.
4. $(S^{-1}A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice 2 (4 points)

1. Soient $S_1 := \{a \in \mathbb{Z} \mid 14 \nmid a\}$, $S_2 := \{a \in \mathbb{Z} \mid 7 \mid a\}$, $S_3 := \{1 + 3a - 22b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $S_4 := \mathbb{Z} - \{0\}$ et $S_5 := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 1 \bmod 10\}$. Quels sous-ensembles $S_i \subset \mathbb{Z}$ sont de parties multiplicatives ?
2. Déterminez les éléments irréductibles dans $S_i^{-1}\mathbb{Z}$ si S_i est une partie multiplicative.

Exercice 3 (4 points)
Soient R un anneau factoriel, $S \subset R$ une partie multiplicative et $Q(R)$ le corps des fractions de R.

De plus, soit $f(x) \in R[x]$ un polynôme irréductible et $f(x) = g(x)h(x)$ avec $g, h \in S^{-1}R[x]$. Montrez que si $g(x)$ est une unité dans $Q(R)[x]$, alors $g(x)$ est une unité dans $S^{-1}R[x]$.

Indications : Commencez par écrire $g(x) = \frac{a}{s}$ où $a \in R$ et $s \in S$; expliquez pourquoi ceci est possible. Le but est maintenant de montrer que $a \in S$.

1. *Utilisez un lemme du cours pour écrire $h(x) = \frac{b}{r}\tilde{h}(x)$, tel que $\tilde{h}(x) \in R[x]$ est primitif, $b \in R$ et $r \in S$.*
2. *Avec cela, développez l'égalité $f(x) = g(x)h(x)$ pour obtenir une égalité polynomiale dans $R[x]$.*
3. *On pose $\mathcal{Q} := \mathcal{P} - \mathcal{P}(S)$, où $\mathcal{P}$ est un ensemble de représentants des éléments premiers de R. Montrez alors que pour tout $q \in \mathcal{Q}$, q ne divise pas a.*
4. *En déduire que $a \in S$ et donc que $g(x)$ est inversible dans $S^{-1}R[x]$.*

Exercice 4 (4 points)

1. Soit $M := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - 2y \equiv 0 \bmod 3\}$. Montrez que M est un $\mathbb{Z}$-module libre. Trouvez une base de M.

2. Soit M le sous-module de $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{R}$ engendré par $v_1 := \frac{3}{7}$, $v_2 := -\frac{2}{5}$. Est-ce que (v_1, v_2) est une base de M ?

3. Soit M le sous-module de $\mathbb{Q}$-module $\mathbb{R}$ engendré par $v_1 := 1$, $v_2 := \sqrt{3}$. Est-ce que (v_1, v_2) est une base de M ?

4. Montrez que le $\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas engendré sur $\mathbb{Z}$ par un nombre fini d'éléments de $\mathbb{Q}$.