

SÉRIE 8

À rendre avant le jeudi 14 novembre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 (4 points) 1. Soit A un anneau commutatif unitaire et soient $a, b \in A$. Montrez que si $I = (a) \cap (b)$ est un idéal principal de A tel que $I = (v)$, alors v est un plus petit commun multiple de a et b .

2. Déterminez un plus petit commun multiple de

$$p = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad q = x^3 + 7x^2 + 11x + 5$$

dans $\mathbb{Q}[x]$.

3. Calculez les radicaux des idéaux I et J dans l'anneau $A = \mathbb{C}[x]$ pour $I = (x^2 - 2x + 1)$ et $J = (x^3 - x^2 - x + 1)$.

4. Utilisez l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{Q}[x]$ pour trouver le plus grand commun diviseur de $p = x^6 + 8x^5 + 17x^4 + 9x^3 - 8x^2 - 17x - 10$ et $q = x^6 + x^5 - 10x^4 + 7x^3 - x^2 + 10x - 8$.

Exercice 2 (4 points)

Soient $\mathbb{Z}[t]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans \mathbb{Z} et $I = (t^2 + 1)$ l'idéal de $\mathbb{Z}[t]$ engendré par le polynôme $t^2 + 1$.

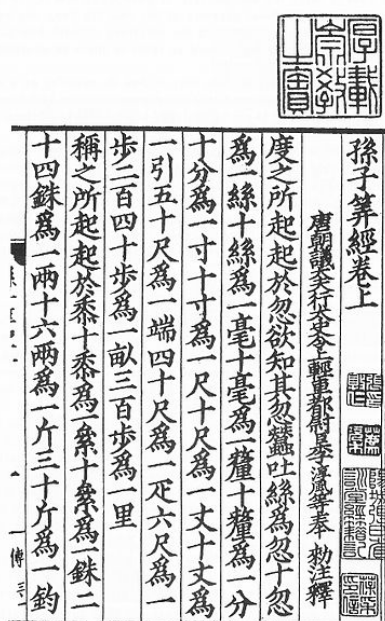
1. Utilisez la propriété universelle du quotient pour montrer que $\mathbb{Z}[t]/I \cong \mathbb{Z}[i]$.

2. Est-ce que I est un idéal premier ? Est-ce que I est un idéal maximal ?

Exercice 3 (4 points) 1. On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Montrez que $3 \in A$ est irréductible mais pas premier. Est-ce que A est factoriel ?

2. On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[i]$. L'élément $2 \in A$ est-il premier ? Est-il irréductible ? Est-ce que A est factoriel ?

- Exercice 4** (4 points) 1. Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donne au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donne alors 1 pièce d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates et s'il y a au moins 1000 pièces d'or ?
2. Combien l'armée de Han Xin comporte-t-elle de soldats si, rangés par 3 colonnes, il reste deux soldats, rangés par 5 colonnes, il reste un soldat et, rangés par 7 colonnes, il reste cinq soldats ? Déterminez toutes les possibilités ! Un problème similaire a été posé par le mathématicien chinois *Sun Tzu*. Ci-dessous, vous trouverez le texte original tiré de son livre *Calculs classiques de Sun Tzu* datant du III^e siècle.



Exercice 5 (Bonus) (4 points)

Soit $A := \{p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \in \mathbb{R}[x] \mid n \in \mathbb{N}, a_1 = 0\}$. Montrez que

1. A est un sous-anneau commutatif unitaire intègre de $\mathbb{R}[x]$.
2. $1 - x^2$ est irréductible dans A .
3. $1 - x^2$ n'est pas premier dans A .