Série 6

À rendre avant le jeudi 31 octobre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 (4 points)

1. Soit A un anneau. Montrez que l'on a, pour tout $a, b \in A$:

$$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0, \qquad (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab).$$

2. Soit A un anneau commutatif unitaire de caractéristique p, avec p premier. Montrez que l'application suivante est un homomorphisme d'anneaux :[1]

$$\begin{aligned} (-)^p : A &\to A \\ a &\mapsto a^p. \end{aligned}$$

3. Montrez que pour p premier, $a^p - a$ est divisible par p pour tout $a \in \mathbb{N}$.

4. Déduisez que $11^{34} - 121$ est divisible par 17 et $3^{203} \equiv 2187 \bmod 29$.

Exercice 2 (4 points)

1. Soit A un anneau unitaire. Montrez que l'ensemble des unités muni de la multiplication est un groupe, i.e. montrez que $(A^*, \cdot)$ est un groupe.

2. Décrivez $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*$.

3. Soient R et S deux anneaux unitaires. Montrez ou trouvez un contre-exemple à l'affirmation suivante: $(R \times S)^* = R^* \times S^*$.

[1] Cet homomorphisme d'anneaux est communément appelé l'*homomorphisme de Frobenius*.

Exercice 3 (4 points)

1. Soient
$$f = 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad \text{et} \qquad g = x^2 - 2x + 1$$
des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$. Décrivez la division euclidienne de f par g .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] := \{a + b\sqrt{n} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ est un anneau commutatif. Trouvez un élément $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, $x \neq 0$, qui n'a pas d'inverse.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] := \{a + b\sqrt{n} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ est un corps.

4. Montrez que pour tous $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $n\mathbb{Z} = \{nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et calculez
$$I + J, \quad I \cap J \quad I \cdot J$$
pour $I = 30\mathbb{Z}$ et $J = 12\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (4 points)
Soient p un nombre premier et S_p le groupe symétrique.

1. Quel est l'ordre d'un p-sous groupe de Sylow de S_p ?

2. Combien y a-t-il de p-sous groupe de Sylow dans S_p ?

3. Montrez que $(p-1)! \equiv -1$ modulo p.