SÉRIE 5

À rendre avant le jeudi 24 octobre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 (4 points)
On considère le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On sait que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $m\mathbb{Z}$ pour un nombre naturel $m \in \mathbb{N}$. Montrez que si le plus grand commun diviseur de r et s $\mathrm{pgdc}(r, s) = 1$, alors $\mathbb{Z}/rs\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$.

(*Indication: Utilisez l'identité de Bézout. Si* $\mathrm{pgdc}(r, s) = d$*, alors il existe deux nombres entiers* a *et* b *tels que* $a \cdot r + b \cdot s = d$.)

Exercice 2 (4 points)

1. Soit G un groupe d'ordre 200. Est-ce qu'il y a dans G toujours un sous-groupe H d'ordre
   a) $ord(H) = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 16, 25, 200, 400$?
   b) $ord(H) = 50, 100$?
2. Soit G un groupe fini, p un nombre premier, N un sous-groupe normal de G et P un p-sous-groupe de Sylow de N. Montrez que G est le produit de $N_G(P)$ et N, i.e. $G = N_G(P) \cdot N$.

Exercice 3 (4 points)

1. Soit $V_4 := \{e, (1, 2) \cdot (3, 4), (1, 3) \cdot (2, 4), (1, 4) \cdot (2, 3)\}$. Montrez que V_4 est un sous-groupe de A_4 et que $V_4 = [A_4, A_4]$.
2. Soient g et h les deux éléments suivants de S_4 : $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Décrivez tous les éléments des classes à gauche $gV_4 \subset S_4$ et $hV_4 \subset S_4$.
3. Montrez que V_4 est un sous-groupe normal de S_4.
4. Montrez que $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et que $S_4/V_4 \cong S_3$.

Exercice 4 (4 points)

1. Soient G un groupe, $H \subset G$ un sous-groupe et $\psi : G \to G'$ un homomorphisme de groupes. Montrez que si G est résoluble, alors il en est de même de H, $\mathrm{Im}(\psi)$ et $G/\mathrm{Ker}(\psi)$.
2. Soit $1 \to K \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} L \to 1$ une *suite exacte courte*, i.e. φ est un monomorphisme, ψ est un epimorphisme et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Montrez que G est résoluble si et seulement si K et L sont résolubles.

Le but des deux prochains exercices est de montrer le théorème suivant.

Théorème. Tout groupe non-abélien d'ordre strictement plus petit que 60 n'est pas simple.

Au cours, on a vu les propositions suivantes.

Proposition. Soient p et q deux nombres premiers distincts.

i) Tout p-groupe d'ordre non premier n'est pas simple.

ii) Tout groupe d'ordre pq n'est pas simple.

iii) Tout groupe d'ordre p^2q n'est pas simple.

Exercice 5 (Bonus)

1. Listez les cas qui ne sont pas concernés par la proposition (pour démontrer le théorème ci-dessus).
2. Montrez que tout groupe d'ordre 40 admet un unique 5-sous-groupe de Sylow. Montrez que tout groupe d'ordre 42 admet un unique 7-sous-groupe de Sylow et tout groupe d'ordre 54 admet un unique 3-sous-groupe de Sylow.

Exercice 6 (Bonus)

1. Montrez que tout groupe d'ordre 30 admet soit un unique 5-sous-groupe de Sylow, soit un unique 3-sous-groupe de Sylow.
2. Montrez que tout groupe d'ordre 56 admet soit un unique 7-sous-groupe de Sylow, soit un unique 2-sous-groupe de Sylow.
3. Montrez que tout groupe G d'ordre 24 ou 48 admet soit un unique 2-sous-groupe de Sylow, soit un homomorphisme non-trivial de G dans S_3 dont le noyau nous fournit un sous-groupe normal de G.

   (*Indication: s'il existe plus qu'un 2-Sylow, en choisir un, disons P, et laisser agir le groupe G par multiplication à gauche sur l'ensemble quotient G/P.*)
4. Montrez que tout groupe G d'ordre 36 admet soit un unique 3-sous-groupe de Sylow, soit un homomorphisme non-trivial de G dans S_4 dont le noyau nous fournit un sous-groupe normal de G.