Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

SÉRIE 4

À rendre avant le jeudi 17 octobre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 (4 points)

1. Soit G un groupe. Montrez que si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien.
2. Montrez que tout groupe d'ordre p^2 est abélien. Est-ce que le résultat est vrai pour les groupes d'ordre p^3 ?

   Remarque : On peut déduire que tout groupe d'ordre p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (4 points)
Soient G un groupe abélien fini et p un nombre premier. Montrez que :

1. $P := \{x \in G \mid \mathrm{ord}(x) \text{ est une puissance de } p\}$ est un p-sous-groupe de Sylow de G.
2. Il existe un unique p-sous-groupe de Sylow de G.

Exercice 3 (4 points)
Utilisez les théorémes de Sylow pour montrer que :

1. tout groupe d'ordre 77 est cyclique.
2. tout groupe d'ordre 40 contient un sous-groupe normal P d'ordre 5.

Exercice 4 (4 points)
Utilisez les théorémes de Sylow pour montrer que :

1. tout groupe d'ordre 45 est abélien;
2. tout groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Bonus exercice (4 points) Soient $p \geq 3$ un nombre premier et G un groupe d'ordre $2p$. Montrez que $G \cong D_p$, le groupe diédral à $2p$ éléments, ou $G \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$.