Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

SÉRIE 2

À rendre avant le jeudi 3 octobre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

Exercice 1 (4 points)
Soit $\Phi : G \to H$ un homomorphisme. Montrez que

a) $\Phi(e) = e$ et $\Phi(x^{-1}) = \Phi(x)^{-1} \quad \forall\, x \in G$.

b) $\ker(\Phi)$ est un sous-groupe de G et $\mathrm{im}(\Phi)$ est un sous-groupe de H.

c) Φ est un monomorphisme $\iff$ $\ker(\Phi) = \{e\}$.

Exercice 2 (4 points)

a) Soit G un groupe d'ordre $\mathrm{ord}(G) < 6$. Montrez que G est abélien.

b) Soit G un groupe d'ordre $\mathrm{ord}(G) = 13$. Montrez que G est abélien.

c) Soit G un groupe fini. Montrez que $x^{\mathrm{ord}(G)} = e \quad \forall\, x \in G$.

Exercice 3 (4 points)

a) Soit G un groupe cyclique d'ordre 45. Montrez que G contient 6 sous-groupes.

b) Soit G un groupe d'ordre 20 et H un groupe d'ordre 133. Montrez que chaque homomorphisme $\varphi : G \to H$ est trivial (i.e. $\varphi(x) = e \; \forall\, x \in G$).

Exercice 4 (4 points)

1. Soit G un groupe et soit H un sous-groupe d'indice 2. Montrez que $H \lhd G$.

2. Montrez les isomorphismes suivants :

$$(\mathrm{SO}(2), \circ) \cong \left(\mathbb{S}^1, \cdot\right) \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)\,.$$

Bonus exercice (4 points) Soit G un groupe fini. On définit le centre $Z(G)$ du groupe G par

$$Z(G) = \{z \in G \mid xz = zx \quad \forall\, x \in G\}$$

et l'ensemble des automorphismes intérieurs $\mathrm{Inn}(G)$ par

$$\mathrm{Inn}(G) = \{\varphi : G \to G \mid \exists\, g \in G \text{ t.q. } \varphi(x) = gxg^{-1} \quad \forall\, x \in G\}.$$

a) Montrez que $Z(G)$ est un sous-groupe normal abélien de G.

b) Soit $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G. Montrez que $\mathrm{Inn}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

c) Montrez que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Inn}(G)$.